Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 517.957+514.752

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МАКСИМАЛЬНЫХ ТРУБОК И ЛЕНТ В ОКРЕСТНОСТИ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБЕННОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

В. А. Клячин

Аннотация: Изучается асимптотическое поведение максимальных поверхностей типа ленты и трубки в окрестности изолированной особой точки. В частности, доказана возможность разложения радиус-вектора двумерной поверхности в степенной ряд с вещественно-аналитическими коэффициентами по временной координате. Показано также, что касательные лучи в особой точке образуют световую поверхность. Для многомерных максимальных трубок в терминах их асимптотического поведения в особой точке доказана точная оценка времени существования и полностью описан класс поверхностей, на которых данная оценка достигается. Библиогр. 17.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{R}_1^{n+1}$ — пространство-время Минковского, т. е. $(n+1)$-мерное вещественное линейное пространство с метрикой сигнатуры $(1,n)$ [1]. Пусть $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\chi = (t, x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ полагаем

$$|\chi|^2 = -t^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \tag{1}$$

и через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначаем соответствующее скалярное произведение.

Вектор $\chi \in \mathbb{R}^{n+1_1}$, $\chi \neq 0$, называется *пространственноподобным* (*времениподобным, светоподобным*), если $|\chi|^2 > 0$ ($|\chi|^2 < 0$, $|\chi|^2 = 0$).

Пусть M — p-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^3. Рассмотрим поверхность $\mathscr{M} = (M,u)$, заданную C^3-погружением $u : M \to \mathbb{R}_1^{n+1}$. Поверхность $\mathscr{M}$ называется *пространственноподобной*, если любой касательный к ней вектор пространственноподобен. На пространственноподобных поверхностях форма (1) индуцирует риманову метрику и риманову связность $\nabla_{\mathscr{M}}$. Стандартную связность в $\mathbb{R}_1^{n+1}$ будем обозначать через $\overline{\nabla}$. Имеют место формулы [1, 2]

$$\nabla_{\mathscr{M}} h = (\overline{\nabla} h)^T, \tag{2}$$

$$(\nabla_{\mathscr{M}})_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T \tag{3}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (грант № 10170).

для произвольной функции $h(m) \in C^1(M)$ и гладких векторных полей X, Y на M. Здесь через $(v)^T$ обозначена ортогональная проекция вектора v на касательную плоскость $T_m\mathscr{M}$ к поверхности $\mathscr{M}$ в соответствующей точке.

Разность $B(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - (\nabla_{\mathscr{M}})_X Y$ называется *второй фундаментальной формой поверхности* $\mathscr{M}$. Отметим, что форма $B(X,Y)$ является билинейной симметричной формой (см. [2, с. 56]). Выберем в касательном пространстве $T_m\mathscr{M}$ ортонормированный базис $\{E_i\}_{i=1}^p$. Вектор

$$H = \operatorname{tr} B = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} B(E_i, E_i)$$

называется *вектором средней кривизны* поверхности $\mathscr{M}$.

Поверхность $\mathscr{M} = (M, u)$ называется *максимальной*, если ее вектор средней кривизны тождественно равен нулю. Происхождение данного термина связано с тем, что в пространстве Минковского естественно ставится задача на максимум площади, а не на ее минимум, как в евклидовом пространстве. Соответствующее уравнение максимальных поверхностей имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}\right) = 0. \tag{4}$$

В настоящее время имеется широкий спектр работ, посвященных различным проблемам теории максимальных поверхностей. Такие вопросы, как задача Дирихле, поведение на бесконечности решений уравнения (4), строение в целом максимальных поверхностей, затронуты в работах [3–9].

Цель настоящей статьи состоит в исследовании асимптотических свойств максимальных поверхностей коразмерности выше 1, обладающих изолированной особенностью. Дадим необходимые определения.

Пусть $f(m) = t \circ u(m)$, $x_i(m) = x_i \circ u(m)$, $m \in M$, — координатные функции погружения u. Поверхность $\mathscr{M} = (M, u)$ называется *лентой с проекцией* (a, b), если

1) для любых $a < t_1 < t_2 < b$ множество $M(t_1, t_2) = \{m \in M : t_1 < f(m) < t_2\}$ односвязно и предкомпактно;

2) для любого $a < t < b$ множество $\{m \in \partial M : f(m) = t\}$ непусто;

3) в любой точке $u(m) \in \partial\mathscr{M}$ вектор внешней нормали $\vec{n}$ к $\partial\mathscr{M}$ ортогонален оси времени $0t$, т. е. если $e_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, то $\langle \vec{n}, e_0\rangle = 0$.

Поверхность $\mathscr{M}$ называется *трубчатой* (или просто *трубкой*), если выполнено условие 1 и $\partial M = \varnothing$. Конечную или бесконечную разность $b - a$ мы назовем *протяженностью* или *временем существования* максимальной трубки или ленты. В дальнейшем будем считать, что рассматривается трубка или лента с проекцией $(0, b)$.

Будем говорить, что лента (или трубка) *имеет в точке* $\chi_0 = (t_0, x_0) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ *особенность*, если $\Sigma(t_0) = x_0$. Здесь $\Sigma(t) = \{m \in M : f(m) = t\}$. Без ограничения общности мы предполагаем, что особенность поверхности расположена в начале координат. Примеры трубок и лент с изолированными особенностями указанного вида можно найти в работах [5, 7, 10].

Геометрико-топологические аспекты строения лоренцевых многообразий с сингулярностями исследовались ранее (см., например, [11, 12] и цитированную там литературу).

В § 3, 4 настоящей статьи рассматривается проблема, возникающая естественным образом из-за специфики изолированных особенностей решений уравнения (4). Еще К. Экером в [10] было доказано, что если положительное решение $t = f(x)$ имеет особенность в точке x_0, то $|f(x) - f(x_0)| \sim |x - x_0|$ при $x \to x_0$. Геометрически это означает, что все касательные лучи графика функции $t = f(x)$ в точке x_0 образуют световой конус в $\mathbb{R}^{n+1}_1$. В работе [5] установлено более точное поведение решения в окрестности особой точки. А именно, было доказано, что

$$\limsup_{x\to x_0} \frac{|x - x_0| - |f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{2n-1}} < +\infty.$$

В процессе дальнейших исследований возник вопрос об асимптотическом разложении решения уравнения (4) в окрестности точки x_0. Данная задача была решена автором в работе [13] для двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^3_1$. В этой работе была доказана возможность разложения решения уравнения (4) в окрестности изолированной особенности по степеням $|x - x_0|$ с вещественно-аналитическими коэффициентами. Более того, даны некоторые геометрические интерпретации коэффициентов разложения при малых степенях, и доказана теорема об однозначном определении решения уравнения (4) по первым двум коэффициентам разложения.

В настоящей работе мы доказываем возможность разложения радиус-вектора максимальной ленты в окрестности особой точки в ряд по степеням временно́й координаты. Кроме того, мы приводим аналог теоремы Экера, которая в нашем случае оказывается более содержательной, чем в случае гиперповерхностей. В частности, мы показываем, что касательные лучи в особой точке образуют световую коническую поверхность. Также мы приводим геометрические интерпретации коэффициентов разложения и, как следствие, находим достаточное условие отсутствия особенности у поверхности. В отличие от работы [13] в данной статье мы даем теорему существования максимальной ленты с заданными характеристиками в особой точке.

Не менее интересным с геометрической точки зрения является вопрос о времени существования максимальных трубок и лент. Некоторые оценки этой величины для гиперповерхностей в терминах отклонения их от светового конуса в окрестности особенности получены в работах [5, 7]. Кроме того, в [8] выявлены емкостные признаки конечности времени существования трубок и лент в некоторых лоренцевых пространствах без предъявления каких-либо оценок. Как и в [5, 7], применяя технику функции обхвата

$$\rho(t) = \sup_{m\in\Sigma(t)} \left(x_i^2(m)\right)^{1/2}, \tag{5}$$

можно получить аналогичные оценки протяженности максимальных трубок и лент коразмерности выше 1. Однако этот подход не дает полного описания поверхностей, на которых эта оценка может достигаться. В настоящей работе мы предлагаем вместо функции обхвата использовать функцию, являющуюся интегральным усреднением расстояния от оси времени до сечения $\Sigma(t)$. Это позволяет не только получить точную оценку времени существования максимальной трубки или ленты, но и построить класс поверхностей (отличный от класса гиперповерхностей вращения), дающих равенство в соответствующих неравенствах.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\{e_i\}$, $i = 0, \dots, n$, — стандартный базис в $\mathbb{R}_1^{n+1}$. Через $\Delta_{\mathscr{M}}$ будем обозначать оператор Лапласа — Бельтрами на поверхности $\mathscr{M}$.

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная максимальная поверхность в $\mathbb{R}_1^{n+1}$. Тогда*
1) $\nabla_{\mathscr{M}} x_i = e_i^T$, $\nabla_{\mathscr{M}} f = -e_0^T$;
2) $\Delta_{\mathscr{M}} f = \Delta_{\mathscr{M}} x_i = 0$;
3) $\sum\limits_{i=1}^{n} |\nabla_{\mathscr{M}} x_i|^2 - |\nabla_{\mathscr{M}} f|^2 = p$.

Доказательство. Утверждения 1, 2 доказываются так же, как и в [2] для минимальных поверхностей с использованием формул (2) и (3). Докажем равенство 3. Пусть $\{E_1, E_2, \dots, E_p\}$ — ортонормированный базис в касательной плоскости к поверхности $\mathscr{M}$. На основании п. 1 имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |\nabla_{\mathscr{M}} x_i|^2 - |\nabla_{\mathscr{M}} f|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|e_i^T\right|^2 - \left|e_0^T\right|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (\langle e_i, E_j \rangle)^2 - \sum_{j=1}^{p} (\langle e_0, E_j \rangle)^2 = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} (\langle e_i, E_j \rangle)^2 - (\langle e_0, E_j \rangle)^2 = p.$$

Лемма доказана полностью.

Заметим, что в силу гармоничности функции $f(m)$ в метрике поверхности $\mathscr{M}$ для максимальных трубок и лент величина

$$\mu = \int\limits_{\Sigma(t)} |\nabla_{\mathscr{M}} f|$$

не зависит от t [7]. Действительно, пусть $0 < t_1 < t_2 < b$. Граница $\partial M(t_1, t_2)$ состоит из пары множеств $\Sigma(t_1)$, $\Sigma(t_2)$ и части границы ∂M. В силу формулы Стокса и условия 3 из определения ленты получаем

$$0 = \int\limits_{M(t_1,t_2)} \Delta_{\mathscr{M}} f = \int\limits_{\Sigma(t_2)} |\nabla_{\mathscr{M}} f| - \int\limits_{\Sigma(t_1)} |\nabla_{\mathscr{M}} f|.$$

Следовательно, величина μ действительно не зависит от t.

Пусть $h(m) \in C^2(M)$. Определим среднее значение функции $h(m)$ формулой

$$h(t) = \frac{1}{\mu} \int\limits_{\Sigma(t)} h(m) |\nabla_{\mathscr{M}} f|.$$

Лемма 2. *Имеют место формулы*

$$h'(t) = \frac{1}{\mu} \int\limits_{\Sigma(t)} \langle \nabla_{\mathscr{M}} h, \nu \rangle, \quad h''(t) = \frac{1}{\mu} \int\limits_{\Sigma(t)} \frac{\Delta_{\mathscr{M}} h}{|\nabla_{\mathscr{M}}|} - \frac{1}{\mu} \int\limits_{\Sigma(t) \cap \partial M} \frac{\langle \nabla_{\mathscr{M}} h, \vec{n} \rangle}{|\nabla_{\mathscr{M}} f|},$$

где $\nu = \nabla_{\mathscr{M}} f / |\nabla \mathscr{M} f|$.

Доказательство. На основании формулы Остроградского для всех $0 < t_0 < t < b$ находим

$$\int\limits_{M(t_0,t)} \Delta_{\mathscr{M}} h = \int\limits_{\Sigma(t)} \langle \nabla_{\mathscr{M}} h, \nu \rangle - \int\limits_{\Sigma(t_0)} \langle \nabla_{\mathscr{M}} h, \nu \rangle + \int\limits_{\partial M \cap M(t_0,t)} \langle \nabla_{\mathscr{M}} h, \vec{n} \rangle. \tag{6}$$

С другой стороны, из формулы для ко-площади Кронрода — Федерера [14] получаем

$$\int\limits_{\Sigma(t)} \langle \nabla_{\mathscr{M}} h, \nu\rangle = \frac{d}{dt} \int\limits_{M(t_0,t)} \langle \nabla_{\mathscr{M}} h, \nabla_{\mathscr{M}} f\rangle.$$

Тогда, применяя еще раз формулу Остроградского, используя гармоничность $f(m)$ и граничное условие $\langle \nabla_{\mathscr{M}} f, \vec{n}\rangle = \langle e_0, \vec{n}\rangle = 0$, приходим к равенству

$$\int\limits_{\Sigma(t)} \langle \nabla_{\mathscr{M}} h, \nu\rangle = \frac{d}{dt} \int\limits_{\Sigma(t)} h|\nabla_{\mathscr{M}} f| - \frac{d}{dt} \int\limits_{M(t_0,t)\cap\partial M} h\langle \nabla_{\mathscr{M}} f, \vec{n}\rangle = \mu h'(t).$$

Таким образом, первая из требуемых формул доказана. Дифференцируя (6) по t и применяя формулу Кронрода — Федерера, выводим равенство

$$\int\limits_{\Sigma(t)} \frac{\Delta_{\mathscr{M}} h}{|\nabla_{\mathscr{M}} f|} = \mu h''(t) + \frac{d}{dt} \int\limits_{\partial M\cap M(t_0,t)} \langle \nabla_{\mathscr{M}} h, \vec{n}\rangle. \tag{7}$$

Заметим, что в силу граничного условия на ленту градиент функции $f(m)$ касается границы ∂M. Поэтому последнее слагаемое в (7) равно

$$\int\limits_{\Sigma(t)\cap\partial M} \frac{\langle \nabla_{\mathscr{M}} h, \vec{n}\rangle}{|\nabla_{\mathscr{M}} f|}.$$

Это равенство вместе с (7) приводит ко второму равенству в лемме 2. Лемма доказана полностью.

Замечание 1. Если в лемме 2 предположить, что $\mathscr{M}$ — максимальная трубка, то получим равенство

$$h''(t) = \frac{1}{\mu} \int\limits_{\Sigma(t)} \frac{\Delta_{\mathscr{M}} h}{|\nabla_{\mathscr{M}} f|}.$$

Пусть теперь $\mathscr{M}$ — 2-мерная максимальная лента в $\mathbb{R}_1^{n+1}$. Ввиду гармоничности функции $f(m)$ сопряженная дифференциальная форма $*df$ замкнута. В силу односвязности $\mathscr{M}$ существует гладкая функция $g(m)$ такая, что $dg = *df$. Нетрудно показать, что функция $g(m)$, как и $f(m)$, является гармонической. Вследствие условия 3 из определения ленты функция $g(m)$ принимает постоянные значения на границе ∂M. Не ограничивая общности, будем предполагать, что минимальное такое значение равно 0. Тогда $g(m) \geq 0$ в силу принципа минимума для гармонических функций. Рассмотрим комплекснозначную функцию $F(m) = f(m) + ig(m) : M \to \mathbb{C}$.

Лемма 3. *Функция $F(m)$ является голоморфной и осуществляет взаимно-однозначное соответствие поверхности $\mathscr{M}$ на прямоугольник*

$$R_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < b,\ 0 < \operatorname{Im} z < \mu\},$$

где

$$\mu = \int\limits_{\Sigma(t)} |\nabla_{\mathscr{M}} f|. \tag{8}$$

Доказательство. В силу односвязности M функция $g(m)$ строится по интегралу

$$g(m) = g(m_0) + \int\limits_{\gamma} *df,$$

где γ — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки m и m_0. Поскольку

$$\int\limits_{\Sigma(t)} |\nabla_{\mathscr{M}} f| = \int\limits_{\Sigma(t)} *df,$$

функция $g(m)$ изменяется монотонно от значения 0 до значения μ на $\Sigma(t)$. Таким образом, функция $F(m)$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие поверхности M на прямоугольник R_0. Голоморфность $F(m)$ следует из равенств $dg = *df$, $\langle df, *df\rangle = 0$. Лемма доказана.

Обозначим через $U : R_0 \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ композицию обратного к $F(m)$ отображения и погружения $u : M \to \mathbb{R}^{n+1}_1$. Ясно, что в силу конформности $F(m)$ построенное отображение также конформно и задает на поверхности $\mathscr{M}$ конформные координаты (t, s). В частности,

$$U(\{(t,s) : t = \tau\}) = \Sigma(\tau), \quad U(\{(t,s) : s = 0\}) \cup U(\{(t,s) : s = \mu\}) = \partial M.$$

Как и выше, через $x_i(t, s)$ мы обозначаем координатные функции погружения $U(t, s)$. Введем следующие обозначения. Если $h(t, s) \in C^2(R_0)$, то

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right), \quad \Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}, \quad (\nabla h)^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)^2.$$

Лемма 4. *Имеют место равенства*

1) $\Delta x_i(t, s) = 0$, $i = 0, \ldots, n$;

2) $(\nabla x_i)^2 = \left|e_i^T\right|^2 \cdot \left|e_0^T\right|^{-2}$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{\partial x_i}{\partial s})^2 = |\nabla_{\mathscr{M}} f(U(t, s))|^{-2}$.

Доказательство. Равенство 1 следует из того, что композиция конформного отображения и гармонической функции является гармонической функцией. Равенство 2 следует из конформности отображения $F(m)$, леммы 1 и равенства

$$|dF(m)| = |\nabla_{\mathscr{M}} f(m)| = |e_0^T|.$$

Докажем равенство 3. Поскольку

$$(\nabla x_i)^2 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial s}\right)^2,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial s}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\nabla x_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2.$$

На основании леммы 1 и равенства 2

$$\sum_{i=1}^{n} (\nabla x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\nabla_{\mathscr{M}} x_i|^2}{|\nabla_{\mathscr{M}} f|^2} = \frac{2 + |\nabla_{\mathscr{M}} f|^2}{|\nabla_{\mathscr{M}} f|^2}.$$

В силу конформности координат (t,s) имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\langle\nabla_{\mathscr{M}}x_i,\nabla_{\mathscr{M}}f\rangle)^2}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|^4}=\frac{1}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|^4}\sum_{i=1}^{n}(\langle e_i^T,e_0^T\rangle)^2$$

$$=\frac{1}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|^4}\left(\sum_{i=1}^{n}\big(\langle e_i,e_0^T\rangle\big)^2-\big(\langle e_0,e_0^T\rangle\big)^2\right)+\frac{1}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|^4}\big(\langle e_0,e_0^T\rangle\big)^2=\frac{1}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|^2}+1. \tag{9}$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial s}\right)^2=1+\frac{2}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|^2}-\left(1+\frac{1}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|^2}\right)=\frac{1}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|^2}.$$

Лемма доказана полностью.

§ 3. Некоторые внешние и внутренние характеристики строения двумерных максимальных лент в окрестности особой точки

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{M}$ — двумерная максимальная лента в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^{n+1}$ с проекцией $(0,b)$ и особенностью в точке $\chi_0=0$. Тогда $\mathscr{M}$ может быть задана конформным погружением $U(t,s)$ прямоугольника R_0, имеющим вещественно-аналитические координатные функции вплоть до части границы $\{(t,s)\in R_0:t=0\}$. Радиус-вектор $U(t,s)$ может быть разложен в равномерно сходящийся ряд*

$$U(t,s)=\sum_{k=0}^{+\infty}w_k(s)t^{2k+1}+te_0,$$

где $w_k(s)$ — вещественно-аналитические функции, заданные на интервале $(0,\mu)$ и удовлетворяющие системе равенств

$$w''_{k-1}(s)+2k(2k+1)w_k(s)=0,\quad k=1,2,3,\dots. \tag{10}$$

Доказательство. В силу наличия особенности имеем $x_i(0,s)=0$ для всех $s\in(0,\mu)$. На основании принципа симметрии все координатные функции могут быть нечетным образом продолжены до гармонических функций, заданных в прямоугольнике $R=\{(t,s):-b<t<b,0<s<\mu\}$. Поэтому функции $x_i(t,s)$ являются вещественно-аналитическими вплоть до отрезка прямой $t=0$. Это, в частности, позволяет разложить радиус-вектор $U(t,s)$ в равномерно сходящийся ряд по нечетным степеням переменной t:

$$U(t,s)=\sum_{k=0}^{+\infty}w_k(s)t^{2k+1}+te_0.$$

Чтобы показать справедливость равенств (10), достаточно записать условие гармоничности $U(t,s)$ в терминах коэффициентов $w_k(s)$. Имеем

$$\Delta U(t,s)=\sum_{k=0}^{+\infty}w''_k(s)t^{2k+1}+\sum_{k=0}^{+\infty}2k(2k+1)w_k(s)t^{2k-1}=0,$$

откуда и получаем (10). Теорема доказана полностью.

Введем обозначение S^{n-1} для единичной сферы, полученной пересечением светового конуса и плоскости $\{(t,x)\in\mathbb{R}_1^{n+1}:t=1\}$. Следующая теорема представляет собой аналог теоремы Экера о касательных лучах.

Теорема 2. *Если $\mathscr{M}$ — максимальная лента с проекцией $(0,b)$ и особенностью в точке 0, то существует предел*

$$\lim_{t\to 0}\frac{U(t,s)}{t}=w_0(s)+e_0,\quad e_0=(1,0,\dots,0),\tag{11}$$

причем радиус-вектор $w_0(s)$ при $0<s<\mu$ описывает вещественно-аналитическую кривую γ, лежащую на сфере S^{n-1}.

Доказательство. Существование предела следует из теоремы 1. Так как радиус-вектор $w_0(s)$ является вещественно-аналитическим, он описывает кусочно вещественно-аналитическую кривую. Покажем, что эта кривая лежит на единичной сфере. На основании леммы 4 имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial s}\right)^2=\frac{1}{|\nabla_{\mathscr{M}}f(U(t,s))|^2}.$$

С другой стороны, в силу наличия особенности выражение в левой части должно быть равно нулю при $t=0$. Поэтому

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{|\nabla_{\mathscr{M}}f(U(t,s))|^2}=0.$$

Тогда из (9) получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2=1$$

при $t=0$. Последнее и означает, что для всякого $s\in(0,\mu)$ имеет место включение $w_0(s)+e_0\in S^{n-1}$. Теорема доказана.

Замечание 2. Как нетрудно видеть, из доказанной теоремы следует, что предельные касательные лучи к поверхности в особой точке образуют световую коническую поверхность с направляющим радиус-вектором $w_0(s)+e_0$.

Теперь вычислим кривизну максимальной поверхности и выясним ее поведение в окрестности особой точки. Пусть $\mathscr{M}$ — 2-мерная максимальная лента, заданная погружением $U(t,s)$ прямоугольника $R=\{(t,s):0<t<b,\ 0<s<\mu\}$ (теорема 1). Поскольку погружение U конформно, первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$dl^2=|U_s|^2(dt^2+ds^2)=\lambda(dt^2+ds^2)=|U_t|^2(dt^2+ds^2).$$

Тогда гауссова кривизна поверхности может быть вычислена по формуле [15]

$$K(t,s)=-\frac{1}{\lambda(t,s)}\Delta\log\lambda(t,s).\tag{12}$$

Определение 1. Величина

$$\kappa(t,s)=\frac{K(t,s)}{\sinh^4\alpha(t,s)},$$

где α — значение угла между осью $0t$ и нормальной плоскостью к $\mathscr{M}$, называется *удельной кривизной* поверхности $\mathscr{M}$.

В работе [13] показано, что эта величина достаточно полно описывает поведение решения уравнения (4) в окрестности особой точки. В нашем случае справедлива

Теорема 3. *При любом фиксированном значении $s \in (0, \mu)$ существует предел*
$$\lim_{t\to 0} \kappa(t,s) = |w_0'(s)|^2.$$

Доказательство. На основании конформности радиус-вектора $U(t,s)$ имеем

$$\lambda_t = 2\langle U_{st}, U_s\rangle,\ \lambda_{tt} = 2\langle U_{tts}, U_s\rangle + 2U_{st}^2,\ \lambda_s = 2\langle U_{ss}, U_s\rangle,\ \lambda_{ss} = 2\langle U_{sss}, U_s\rangle + 2U_{ss}^2,$$
$$\lambda_s = 2\langle U_t, U_{st}\rangle, \quad \lambda_t^2 + \lambda_s^2 = 4U_{st}^2\lambda, \quad \Delta\lambda = 2\big(U_{st}^2 + U_{ss}^2\big).$$

Тогда
$$\Delta \log \lambda = \frac{2U_{ss}^2 - 2U_{st}^2}{\lambda}.$$

Поэтому выражение для гауссовой кривизны (12) примет вид
$$K = -\frac{U_{ss}^2 - U_{st}^2}{\lambda^4}.$$

С другой стороны, нетрудно подсчитать, что
$$\sinh\alpha = |\nabla_{\mathscr{M}} f| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \tag{13}$$

поэтому окончательно получаем
$$\kappa(t,s) = -U_{ss}^2 + U_{st}^2.$$

Далее, при $t = 0$ имеет место равенство $U(t,s) \equiv 0$, значит, $\kappa(0,s) = U_{st}^2(0,s)$. Из разложения $U(t,s)$ в ряд (теорема 2) нетрудно подсчитать, что
$$\kappa(0,s) = -U_{ss}^2(0,s) + U_{st}^2(0,s) = |w_0'(s)|^2.$$

Теорема доказана.

Теорема 3 может быть применена для доказательства одного необходимого условия существования у максимальной ленты особенности рассматриваемого вида. Известно [16], что минимальные трубчатые поверхности не могут иметь конических особенностей. На наш взгляд, это обстоятельство связано с ограничениями на гауссову кривизну минимальных поверхностей (гауссова кривизна неположительна). Нижеприведенное следствие утверждает, что класс максимальных поверхностей, заведомо не имеющих конических особенностей, несколько шире, чем класс минимальных поверхностей, изометрично вложенных в подпространство $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$.

Следствие 1. *Максимальные ленты с ограниченной сверху гауссовой кривизной особенностей рассматриваемого вида не имеют.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. при наличии особенности будем предполагать существование постоянной $K_0 > 0$ такой, что $K(t,s) \le K_0$. Тогда, используя теорему 4 и (13), получаем
$$|w_0'(s)|^2 = \lim_{t\to 0} \frac{K(t,s)}{\sinh^4 \alpha(t,s)} \le \lim_{t\to 0} \frac{K_0}{\sinh^4 \alpha(t,s)} = 0.$$

Другими словами, $w_0 \equiv \mathrm{const}$. Последнее противоречит определению двумерной поверхности.

§ 4. Теорема существования и единственности

В этом параграфе мы докажем, что вещественно-аналитическая кривая γ на единичной сфере и удельная кривизна достаточно полно описывают поведение максимальной ленты в окрестности особой точки.

Зафиксируем произвольное положительное число μ.

Теорема 4. *Для любого вещественно-аналитического радиус-вектора $r : [0,\mu] \to S^{n-1}$ существует единственная максимальная лента, для которой μ определяется равенством* (8), *а предел* (11) *совпадает с* $r(s)+e_0$.

Замечание 3. Следует отметить, что радиус-вектор $r : [0,\mu] \to S^{n-1}$ однозначно определяется вещественно-аналитической кривой на сфере и вещественно-аналитической функцией $|r'(s)|^2$. Таким образом, из теоремы 4 следует, что максимальная лента однозначно задается величиной μ, аналитической кривой γ и предельными значениями удельной кривизны $\kappa(s) = |w_0'(s)|^2$.

Доказательство. Рассмотрим радиус-вектор, заданный рядом

$$U(t,s) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k(s) t^{2k+1} + te_0, \tag{14}$$

где $w_0(s) = r(s) - e_0$, $w''_{k-1}(s) + 2k(2k+1)w_k(s) = 0$, $k = 1,2,\ldots$.

Поскольку функция $r(s)$ является вещественноаналитической, ряд (14) сходится равномерно в некоторой области $|t| < b$, $0 < s < \mu$ вместе со своими производными. Действительно, в силу (10)

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t,s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{w_0^{(2k)}(s)}{(2k)!} t^{2k} + e_0.$$

Последний ряд абсолютно сходится в той же области, где сходится ряд Тейлора функции $w_0(s)$, так как, очевидно, им мажорируется. Следовательно, ряд $U(t,s)$ можно почленно дифференцировать по t нужное число раз. Аналогично доказывается возможность почленного дифференцирования по переменной s. Дифференцируя ряд $U(t,s)$ дважды, легко увидеть, что $U(t,s)$ является гармоническим радиус-вектором заданным, в прямоугольнике $R = \{(t,s) : -b < t < b,\ 0 \le s < \mu\}$. Для доказательства того, что $U(t,s)$ задает максимальную поверхность, достаточно убедиться в том, что (t,s) — конформные координаты. Нам понадобится

Лемма 5. *Функция $h(t,s) : R \to \mathbb{C}$, $h = |U_s|^2 - |U_t^2| + 2i\langle U_s, U_t\rangle$ голоморфна в R.*

Доказательство. Необходимо проверить условия Коши — Римана для функции h. Имеем $(\operatorname{Re} h)_t = 2(\langle U_{st}, U_s\rangle - \langle U_{tt}, U_t\rangle)$. На основании гармоничности $U(t,s)$ получаем $(\operatorname{Re} h)_t = 2(\langle U_{st}, U_s\rangle + \langle U_{ss}, U_t\rangle) = (\operatorname{Im} h)_s$. Аналогично

$$(\operatorname{Re} h)_s = 2(\langle U_{ss}, U_s\rangle - \langle U_{st}, U_t\rangle) = -2(\langle U_{tt}, U_s\rangle - \langle U_{st}, U_t\rangle) = -(\operatorname{Im} h)_t.$$

Лемма доказана.

Теперь заметим, что при $t = 0$ имеют место равенства $U_s(0,s) = 0$, $U_t(0,s) = r(s)$. Поэтому $|U_s(0,s)|^2 = 0$, $|U_t(0,s)|^2 = 0$ (радиус-вектор $r(s)$ лежит на единичной сфере, находящейся на световом конусе!) и $\langle U_t(0,s), U_s(0,s)\rangle = 0$. Таким образом, $h(t,s)=0$ при $t=0$. По теореме единственности голоморфной функции заключаем, что $h(t,s)\equiv 0$. Последнее и означает, что координаты (t,s) являются конформными.

Единственность максимальной ленты следует из однозначной определенности разложения радиус-вектора $U(t,s)$ в степенной ряд по первому коэффициенту $w_0(s)=r(s)$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если касательные лучи максимальной ленты в особой точке лежат в некоторой k-мерной плоскости, то сама поверхность лежит в некоторой $(k+1)$-мерной плоскости.*

Доказательство. Действительно, при выполнении условий теоремы существует k-мерная плоскость P, для которой $w_0(s)\in P$ при всех $s\in(0,\mu)$. Тогда и все производные радиус-вектора $w_0(s)$ также лежат в P. Поэтому $U(t,s)\in P\oplus\{te_0\}$, что и требовалось доказать.

§ 5. Некоторые асимптотические свойства многомерных трубок и лент

Всюду ниже мы будем предполагать, что $\mathscr{M}=(M,u)$ — p-мерная максимальная трубка или лента с особенностью в точке $\chi_0=0$. Введем в рассмотрение функцию

$$v(m)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2(m)\right)^{1/2}.$$

Для случая максимальной ленты будем рассматривать следующее условие на функцию $v(m)$:

$$\langle\nabla_{\mathscr{M}}v(m),\vec{n}\rangle\le 0. \tag{15}$$

Теорема 5. *Функция $r(t)=\big(\frac{1}{\mu}\int\limits_{\Sigma(t)}v^2(m)|\nabla_{\mathscr{M}}f(m)|\big)^{1/2}$ на интервале $(0,b)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству*

$$r''(t)r(t)+\frac{\delta(t)}{2}\ge(p-1)(r'^2(t)-1), \tag{16}$$

где

$$\delta(t)=\frac{1}{\mu}\int\limits_{\Sigma(t)\cap\partial M}\frac{\langle\nabla_{\mathscr{M}}v^2,\vec{n}\rangle}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|}.$$

Доказательство. Положим

$$\eta(t)=\frac{1}{\mu}\int\limits_{\Sigma(t)}v^2(m)|\nabla_{\mathscr{M}}f(m)|.$$

Согласно лемме 2 имеем

$$\eta''(t)=\frac{2}{\mu}\int\limits_{\Sigma(t)}\frac{p+|\nabla_{\mathscr{M}}f|^2}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|}-\frac{1}{\mu}\int\limits_{\Sigma(t)\cap\partial M}\frac{\langle\nabla_{\mathscr{M}}v^2,\vec{n}\rangle}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|}=\frac{2}{\mu}\int\limits_{\Sigma(t)}\frac{p+|\nabla_{\mathscr{M}}f|^2}{|\nabla_{\mathscr{M}}f|}-\delta(t). \tag{17}$$

Из первого равенства леммы 2 получаем

$$\eta'(t)=\frac{2}{\mu}\int\limits_{\Sigma(t)}v\langle\nabla_{\mathscr{M}}v,\nu\rangle.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат и применим неравенство Коши. Это дает нам оценку

$$\eta'^2(t) \leq \frac{4}{\mu}\eta(t) \int\limits_{\Sigma(t)} \frac{(\langle \nabla_{\mathscr{M}} v, \nu\rangle)^2}{|\nabla_{\mathscr{M}} f|}.$$

Далее, имеем

$$(\langle \nabla_{\mathscr{M}} v, \nu\rangle)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (\langle \nabla_{\mathscr{M}} x_i, \nu\rangle)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\langle e_i, \nu\rangle)^2 = 1 + \left(\left\langle e_0^T, \nu\right\rangle\right)^2 = 1 + |\nabla_{\mathscr{M}} f|^2. \tag{18}$$

Поэтому

$$\eta'^2(t) \leq \frac{4}{\mu}\eta(t) \int\limits_{\Sigma(t)} \frac{1 + |\nabla_{\mathscr{M}} f|^2}{|\nabla_{\mathscr{M}} f|}.$$

Теперь из (17) получаем

$$\eta'^2(t) \leq 4\eta(t) \left(\frac{\eta''(t) + \delta(t) - 2}{2p} + 1\right).$$

Делая замену $r^2(t) = \eta(t)$ в этом дифференциальном неравенстве, после несложных преобразований приходим к требуемому неравенству (16). Теорема доказана.

Замечание 4. Равенство в (18) имеет место тогда и только тогда, когда сечение $\Sigma(t)$ лежит на сфере. Это следует из условия коллинеарности радиус-вектора сечения и проекции вектора ν на гиперплоскость $t = 0$.

Предположим, что M — максимальная трубка или лента с дополнительным граничным условием (15). В этом случае дифференциальное неравенство (16) приобретает вид

$$r''(t)r(t) \geq (p-1)(r'^2(t) - 1). \tag{19}$$

Следствие 3. *Функция $r(t)$ является выпуклой вниз, и*

$$\lim_{t\to 0} \frac{r(t)}{t} = \lim_{t\to 0} r'(t) \geq 1.$$

Действительно, поскольку из леммы 1 следует, что

$$\Delta_{\mathscr{M}}(v^2(m) - f^2(m)) = 2p,$$

то на основании леммы 2 мы получаем выпуклость вниз функции $r^2(t) - t^2$. В силу наличия особенности у поверхности $\mathscr{M}$ легко видеть, что производная этой функции в точке $t = 0$ равна 0. Из выпуклости имеем

$$r'(t)r(t) - t \geq 0, \quad r^2(t) - t^2 > 0.$$

Последнее дает требуемое неравенство.

Положим

$$\Psi_p(r) = \int\limits_0^r \frac{dy}{\sqrt{y^{2(p-1)} + 1}}, \quad \varphi_p = \Psi_p(+\infty) < +\infty \quad \text{при } p > 2.$$

Как и в [5], мы даем оценку протяженности трубки и ленты через величину φ_p в терминах среднего отклонения ленты в окрестности особенности от светового конуса и указываем исчерпывающий класс максимальных трубок и лент, на которых эта оценка достигается.

Рассмотрим $(p-1)$-мерную поверхность, лежащую на единичной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ и заданную C^2-погружением $R : F \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ компактного многообразия F (вообще говоря, $\partial F \neq \varnothing$).

Зафиксируем произвольный интервал (a,b) и C^2-функцию $g(t)$, определенную на (a,b). Тогда можно построить p-мерную поверхность $\mathscr{M}$, заданную C^2-погружением $u : F \times (a,b) \to \mathbb{R}^n$ таким образом, что если $y \in F$, $t \in (a,b)$, то

$$u(y,t) = r(t)R(y) + te_0. \tag{20}$$

Теорема 6. *Поверхность $\mathscr{M}$ вида (20) является максимальной лентой или трубкой (если $\partial F = \varnothing$) с проекцией (a,b) в том и только в том случае, когда $R : F \to S^{n-1}$ — минимальное погружение в сферу, а функция $g(t)$ является решением дифференциального уравнения*

$$r''(t)r(t) = (p-1)({r'}^2(t) - 1). \tag{21}$$

Доказательство полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения в [17].

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{M} = (M,u)$ — максимальная трубка или лента с граничным условием (15) и протяженностью b. Если $\mathscr{M}$ имеет особенность в точке $\chi_0 = 0$, то существует предел*

$$2(2p-1)\lim_{t\to 0}\frac{r(t)-t}{t^{2p-1}} = \lambda^2 < \infty, \tag{22}$$

а при $p \geq 3$ имеет место оценка

$$\lambda^{\frac{1}{p-1}} b \leq \varphi_p. \tag{23}$$

В неравенстве (23) имеет место равенство тогда и только тогда, когда поверхность $\mathscr{M}$ имеет вид (20).

Доказательство. Из следствия 3 заключаем, что при $0 < t < b$ выполнено $r'(t) > 1$. Тогда дифференциальное неравенство (19) можно записать в виде

$$\frac{r''(t)}{{r'}^2(t)-1} \geq \frac{p-1}{r(t)}.$$

Домножая это неравенство на $r'(t)$ и интегрируя по отрезку $[t_0,t]$, получим

$$\frac{{r'}^2(t)-1}{{r'}^2(t_0)-1} \geq \left(\frac{r(t)}{r(t_0)}\right)^{2(p-1)}. \tag{24}$$

Неравенство (24) означает, что функция $({r'}^2(t)-1)r^{2(1-p)}(t)$ неубывающая, и поэтому предел (22) существует. В частности, при наличии особенности $r'(0) = 1$. Тогда из (24) получаем

$${r'}^2(t) - 1 \geq \lambda^2 r^{2(p-1)}.$$

После несложных преобразований и интегрирования по отрезку $[0,t]$ будем иметь

$$\int\limits_0^{r(t)} \frac{dz}{\sqrt{\lambda^2 z^{2(p-1)} + 1}} \geq t, \tag{25}$$

или

$$\Psi_p(\lambda^{\frac{1}{p-1}} r(t)) \geq \lambda^{\frac{1}{p-1}} t.$$

При $t \to b$ приходим к (23).

Пусть теперь в (23) выполнено равенство. Рассуждая, как в [5], получим $r(t) = \Phi_p(t)$, где $\Phi_p(t)$ — функция, обратная к $\Psi_p(r)$. Функция $\Phi_p(t)$ является решением уравнения (21). Поэтому функция $r(t)$ дает равенство в (19) с $\delta(t) = 0$. Тогда при доказательстве неравенства (19) во всех неравенствах, в частности в (18), будет выполнено равенство. Из замечания 4 следует, что сечения $\Sigma(t)$ лежат на сферах радиуса $r(t)$. Поскольку проекции линий градиента функции $f(m)$ на гиперплоскость $t = 0$ суть прямые линии, сечения $\Sigma(t)$ гомотетичны друг другу. Отсюда следует, что наша поверхность имеет вид (20). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бим Дж., Эрлих П.* Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 2.
3. *Bartnik R.,Simon L.* Spacelike hypersurfaces with prescribed boundary values and mean curvature // Comm. Math. Phys. 1982. V. 87, N 1. P. 131–152.
4. *Клячин А. А., Миклюков В. М.* Существование решений с особенностями уравнения максимальных поверхностей в пространстве Минковского // Мат. сб. 1995. Т. 80, № 1. С. 87–104.
5. *Клячин В. А., Миклюков В. М.* Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 1. С. 206–217.
6. *Клячин В. А.* Максимальные трубчатые поверхности произвольной коразмерности в пространстве Минковского // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 4. С. 118–131.
7. *Миклюков В. М.* Максимальные трубки и ленты в пространстве Минковского // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 12. С. 45–76.
8. *Клячин В. А., Миклюков В. М.* Условия конечности времени существования максимальных трубок и лент в искривленных лоренцевых произведениях // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 3. С. 196–210.
9. *Cheng S., Yau S.-T.* Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz — Minkowski space // Ann. Math. 1976. V. 104, N 2. P. 407–419.
10. *Ecker K.* Area maximizing hypersurfaces in Minkowski space having an isolated singularity // Manuscripta Math. 1986. V. 56. P. 375–397.
11. *Артыкбаев А., Соколов Д. Д.* Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. Ташкент: Фан, 1991.
12. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.* The large scale structure of Space-time. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1972.
13. *Клячин В. А., Миклюков В. М.* Геометрическое строение трубок и лент нулевой средней кривизны в пространстве Минковского // Геометрия и анализ. Волгоград: Изд-во Волгогр. гос. ун-та, 1999. С. 133–161.
14. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
15. *Решетняк Ю. Г.* Двумерные многообразия ограниченной кривизны // Современные фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 70. С. 5–189. (Итоги науки и техники).
16. *Веденяпин А. Д., Миклюков В. М.* Внешние размеры трубчатых минимальных гиперповерхностей // Мат. сб. 1986. Т. 131, № 2. С. 240–250.
17. *Клячин В. А.* Новые примеры трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 1. С. 154–156.

Статья поступила 17 мая 2000 г.

Клячин Владимир Александрович
Волгоградский гос. университет, ул. 2-я Продольная, 30, Волгоград 400062
klchnv@mail.ru