Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 517.11:518.5

АРИФМЕТИКА ВТОРОГО ПОРЯДКА И ПУЛЬСИРУЮЩИЕ ИЕРАРХИИ

Е. В. Гайлит

Аннотация: Осуществляется машинно-оракульное моделирование арифметики II-го порядка средствами итерированной клиниевской вычислимости. Искомый оракул строится посредством пульсирующего трансфинитного процесса, представляющего собой модификацию аналогичного процесса, использованного Н. В. Белякиным для решения частного случая этой задачи. Библиогр. 5.

1. Данная статья посвящена машинно-оракульному моделированию классического анализа (арифметики второго порядка). В теории вычислений с оракулами [1] приводятся дополнительные требования к оракулам, которые обеспечивают «комфортную» вычислимость. Эти условия должны обеспечивать замкнутость множества вычислимых функций относительно разнообразных квазиалгоритмических процедур, так или иначе связанных с бесконечным перебором. Основное условие — регулярность или наличие селекторного свойства, т. е. такой вычислимой процедуры, которая по коду непустого F-перечислимого множества (области определения F-вычислимой функции) находит его элемент. Другое полезное условие, накладываемое на оракул F: если у F-вычислимого дерева обрываются все F-вычислимые цепи, то у него обрываются все цепи.

Последнее условие равносильно F-вычислимости функционала E_1 (гиперджампа):

$$E_1(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } (\forall \eta)(\exists t)(\beta(\bar\eta(t)) = 0), \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\bar\eta(t) = \langle \eta(0), \dots, \eta(t-1) \rangle$. Это значит, что $E_1(\lambda t\{y\}^F(t))$ F-вычислимо равномерно по $y \in \mathscr{B}^*(F)$, где $\mathscr{B}^*(F)$ — множество, состоящее из всевозможных F-кодов тотальных F-вычислимых функций. Пусть $\mathscr{M}_F$ — множество всех таких функций. Задача заключается в построении такого оракула F, чтобы $\mathscr{M}_F$ давало модель арифметики второго порядка.

Нас будут далее интересовать оракулы, построенные средствами итерированной клиниевской вычислимости [2]. Напомним их определение. Пусть ν — ординальная нумерация (вообще говоря, многозначная), т. е. отображение некоторого числового множества $\mathscr{K}[\nu]$ на ординал $|\nu|$; $\nu \restriction \tau$ — начальный отрезок нумерации ν длины τ; $\mathscr{N}_\nu^\tau$ — номерное множество ординала τ.

Каждому $\tau \leqslant |\nu|$ ставится в соответствие оракул $\mathscr{H}_\nu^\tau$, определяемый как частичная числовая функция (удовлетворяющая некоторому условию минимальности), для которой (равномерно по ν, τ) выполнены условия:

а) функционал E_1 $\mathscr{H}_\nu^\tau$-вычислим;

б) графики $\mathscr{H}_\nu^\sigma$ и номерные множества $\mathscr{N}_\nu^\sigma$ $(\sigma < \tau)$ $\mathscr{H}_\nu^\tau$-разрешимы равномерно по ν-номерам σ.

В дополнение к сказанному отметим, что все оракулы $\mathscr{H}_\nu^\tau$ по построению регулярны и $\tau_1 < \tau_2 \leqslant |\nu|$ влечет $\mathscr{H}_\nu^{\tau_1} \subseteq \mathscr{H}_\nu^{\tau_2}$. Кроме того, упомянутая равномерность по ν, τ означает, что при построении $\mathscr{H}_\nu^\tau$ используются только ν-номера ординалов $\sigma < \tau$. Множество $\mathscr{M}_{\mathscr{H}_\nu^\tau}$ будем в дальнейшем обозначать через $\mathscr{M}_\nu^\tau$.

Ординал $\tau \leqslant |\nu|$ называется *точкой насыщения нумерации* ν, если

$$\mathscr{B}^*(\mathscr{H}_\nu^\tau) = \bigcup_{\sigma<\tau} \mathscr{B}^*(\mathscr{H}_\nu^\sigma).$$

Множество всех точек насыщения обозначим через $\mathfrak{N}'_0[\nu]$. Пусть $\mathfrak{N}'_{\gamma+1}[\nu]$ — множество элементов $\mathfrak{N}'_\gamma[\nu]$, являющихся предельными точками $\mathfrak{N}'_\gamma[\nu]$. Для предельных γ пусть $\mathfrak{N}'_\gamma[\nu] = \bigcap\limits_{\eta<\gamma} \mathfrak{N}'_\eta[\nu]$. Если $\tau \in \mathfrak{N}'_\gamma[\nu] - \mathfrak{N}'_{\gamma+1}[\nu]$, то будем говорить, что τ — *точка насыщения ранга* γ. Множество всех точек насыщения ранга γ обозначим через $\mathfrak{N}_\gamma[\nu]$.

Ниже мы построим нумерацию ν такую, чтобы $\mathscr{M}_\nu^{|\nu|}$ давало (стандартную) модель арифметики второго порядка. Для этого, как известно, достаточно, чтобы в $\mathscr{M}_\nu^{|\nu|}$ выполнялась схема аксиом свертывания, т. е.

$$\exists\alpha \in \mathscr{M}_\nu^{|\nu|}\, \forall x\, (\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi^{\mathscr{M}_\nu^{|\nu|}}(x)), \tag{1}$$

где φ — произвольная формула арифметики второго порядка, $\varphi^{\mathscr{M}_\nu^{|\nu|}}$ — результат ограничения функциональных кванторов φ множеством $\mathscr{M}_\nu^{|\nu|}$. Формула φ может включать помимо x другие свободные переменные (числовые и функциональные), и подразумевается, что функциональные переменные замещены произвольными $\mathscr{H}_\nu^{|\nu|}$-вычислимыми тотальными функциями.

В статье [3] построена такая ν, для которой требование (1) выполнялось лишь применительно к таким φ, которые, будучи приведены к предваренной форме, содержат в приставке не более двух функциональных кванторов. Здесь этот результат обобщается на произвольные φ.

Построение нужной нумерации ν осуществлялось в [3] посредством некоего «пульсирующего» процесса. В предлагаемой статье этот процесс надлежащим образом обобщается и модифицируется.

2. Осуществим некоторые вспомогательные построения. Как явствует из [4, гл. 16], для того чтобы удовлетворить схеме (1), достаточно построить такой оракул F, что для любого $r \in \mathscr{B}^*(F)$ множество

$$\{a : Q_1\alpha_1 \in \mathscr{M}_F \dots Q_n\alpha_n \in \mathscr{M}_F Q_{n+1} t(\{r\}^F(a, \bar\alpha_1(t), \dots, \bar\alpha_n(t)) = 0)\},$$

где $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ — цепочка чередующихся кванторов $\forall$ и $\exists$, F-разрешимо равномерно по r. Принимая это во внимание, построим для произвольной многозначной нумерации ν числовые множества $S_{\nu,r}^{i,\tau}$ для $r \in \mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}_\nu^{|\nu|}\big)$, $i < \omega$ и для подходящих $\tau \leqslant |\nu|$. Построение множеств $S_{\nu,r}^{i,\tau}$ будет осуществляться индукцией по i.

Чтобы уловить замысел этого индукционного построения, рассмотрим случаи $i = 1, 2, 3$. Дальнейший индукционный процесс после этого станет очевидным.

Итак, займемся определением множеств $S_{\nu,r}^{1,\tau}$. Для каждого $r \in \mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}_\nu^{|\nu|}\big)$ существует минимальное $\sigma^1(r) \leqslant |\nu|$ такое, что $r \in \mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}_\nu^{\sigma^1(r)}\big)$; множества $S_{\nu,r}^{1,\tau}$ определяются для $\tau \geqslant \sigma^1(r)$:

$$S_{\nu,r}^{1,\tau} = \big\{a : \exists\alpha \in \mathscr{M}_\nu^\tau\, \forall\beta\, \exists t(\{r\}^{\mathscr{H}_\nu^{\sigma^1(r)}}(a, \bar\alpha(t), \bar\beta(t)) = 0)\big\}. \tag{2}$$

Легко видеть, что поскольку рассматриваемые оракулы вычисляют гиперджамп, то в формуле (2) можно неограниченный квантор $\forall\beta$ заменить ограниченным квантором $\forall\beta \in \mathscr{M}_\nu^\tau$. Такая формула будет определять то же самое множество. Легко видеть, что при возрастании τ множества $S_{\nu,r}^{1,\tau}$ могут лишь расширяться.

Пусть нумерация ν такова, что всякая последовательность $S_{\nu,r}^{1,\tau}$ $(\sigma^1(r) \leqslant \tau \leqslant |\nu|)$ стабилизируется в некоторый момент $\tau^1(r)$ для каждого $r \in \mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}_\nu^{|\nu|}\big)$. Подразумевается, что $\tau^1(r) < |\nu|$, коль скоро $\sigma^1(r) < |\nu|$, если же $\sigma^1(r) = |\nu|$, то полагаем $\tau^1(r) = |\nu|$. Для любого $\sigma \leqslant |\nu|$ положим

$$\varphi_\nu^1(\sigma) = \bigcup\{\tau^1(r) : \sigma^1(r) \leqslant \sigma\}.$$

Легко видеть, что $\varphi_\nu^1(|\nu|) = |\nu|$ (в принципе это возможно и для $\sigma < |\nu|$). Определим теперь множества $S_{\nu,r}^{2,\tau}$ (для $r \in \mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}_\nu^{|\nu|}\big)$ и $\sigma^1(r) \leqslant \tau \leqslant |\nu|$), полагая

$$S_{\nu,r}^{2,\tau} = \big\{a : \exists\alpha \in \mathscr{M}_\nu^\tau\, \forall\beta \in \mathscr{M}_\nu^{\varphi^1_\nu(\tau)}\, \exists\eta\, \forall t(\{r\}^{\mathscr{H}_\nu^{\sigma^1(r)}}(a, \bar\alpha(t), \bar\beta(t), \bar\eta(t)) = 0)\big\}.$$

Убедимся, что $\tau_1 < \tau_2$ влечет $S_{\nu,r}^{2,\tau_1} \subseteq S_{\nu,r}^{2,\tau_2}$.

Действительно, пусть $a \in S_{\nu,r}^{2,\tau_1}$ и $\alpha \in \mathscr{M}_\nu^{\tau_1}$ такова, что

$$\forall\beta \in \mathscr{M}_\nu^{\varphi^1_\nu(\tau)}\, \exists\eta\, \forall t\, (\{r\}^{\mathscr{H}_\nu^{\sigma^1(r)}}(a, \bar\alpha(t), \bar\beta(t), \bar\eta(t)) = 0).$$

Это означает, что $a \notin S_{\nu,r'}^{1,\varphi^1_\nu(\tau_1)}$ для подходящего $r' \in \mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}_\nu^{\tau_1}\big)$, а поскольку $\varphi_\nu^1(\tau_1) \leqslant \varphi_\nu^1(\tau_2)$, то (согласно определению φ_ν^1) $a \notin S_{\nu,r'}^{1,\varphi^1_\nu(\tau_2)}$, т. е. $a \in S_{\nu,r}^{2,\tau_2}$.

Если всякая последовательность $S_{\nu,r}^{2,\tau}$ стабилизируется в момент $\tau^2(r) \leqslant |\nu|$, то можно определить функцию

$$\varphi_\nu^2(\sigma) = \bigcup\{\tau^2(r) : \sigma^1(r) \leqslant \sigma\}.$$

Ясно, что $\varphi_\nu^2(|\sigma|) = |\nu|$ начиная с некоторого $\sigma \leqslant |\nu|$. Определим множество

$$S_{\nu,r}^{3,\tau} = \big\{a : \exists\alpha \in \mathscr{M}_\nu^\tau\, \forall\beta \in \mathscr{M}_\nu^{\varphi^2_\nu(\tau)}\, \exists\eta \in \mathscr{M}_\nu^{\varphi^1_\nu\varphi^2_\nu(\tau)}\, \forall\eta'\, \exists t\, (\{r\}^{\mathscr{H}_\nu^{\sigma^1(r)}} \\ (a, \bar\alpha(t), \bar\beta(t), \bar\eta(t), \bar\eta'(t)) = 0)\big\}$$

для $r \in \mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}_\nu^{|\nu|}\big)$, $\sigma^1(r) \leqslant \tau \leqslant |\nu|$. Аналогично предыдущему случаю убеждаемся, что если $\tau_1 < \tau_2$, то $S_{\nu,r}^{3,\tau_1} \subseteq S_{\nu,r}^{3,\tau_2}$ и мы можем построить подходящую функцию $\varphi_\nu^3(\sigma)$, и т. д.

После того как закономерность уже найдена в этом индукционном процессе, мы можем построить функции $\varphi_\nu^i(\sigma)$ и множества $S_{\nu,r}^{i,\tau}$ для всех $i < \omega$, а также проверить монотонность всех множеств $S_{\nu,r}^{i,\tau}$ при возрастании τ. При этом должно выполняться условие, чтобы на каждом предыдущем шаге имела место нужная стабилизация. Более формальное описание аналогичного процесса можно найти в [5]. Здесь цель состоит в построении нумерации ν таким образом, чтобы $|\nu| \in \mathfrak{N}_0'[\nu]$, множества $S_{\nu,r}^{i,\tau}$ стабилизировались до момента $|\nu|$, а также все они были $\mathscr{H}_\nu^{|\nu|}$-разрешимыми равномерно по r.

3. Переходим к описанию пульсирующего процесса. Индукцией по $\sigma \in \mathrm{On}$ построим последовательность многозначных нумераций ν_σ и вспомогательных множеств M_σ. Пусть построены $\nu_{\sigma'}$ и $M_{\sigma'}$ $(\sigma' < \sigma)$ и приняты некоторые индукционные предположения. Вводить их будем постепенно по мере надобности.

Отметим сразу, что в этих нумерациях точки насыщения только конечных рангов и процесс будет устроен таким образом, что он оборвется при достижении первой точки насыщения ранга ω. Полученная при этом нумерация будет результирующей.

Через ξ^*_σ будем обозначать множество тех ξ, для которых существует $\sigma' < \sigma$ такое, что для любого σ'' такого, что $\sigma' \leqslant \sigma'' < \sigma$, верно $|\nu_{\sigma''}| > \xi$. Наименьшее такое σ' обозначим через $\sigma(\xi)$.

Будем говорить, что для ξ^*_σ выполняется случай (A), если начиная с некоторого $\sigma^* < \sigma$ справедливо $|\nu_{\sigma'}| \geqslant \xi^*_\sigma$.

(i) Индукционное предположение. Если $\sigma(\xi) \leqslant \sigma' < \sigma'' < \sigma$ и $\xi' \leqslant \xi < \xi^*_\sigma$, то имеет место $\mathscr{N}^{\xi'}_{\nu_{\sigma'}} = \mathscr{N}^{\xi'}_{\nu_{\sigma''}}$

(ii) Индукционное предположение. Если имеет место случай (A), то из $\sigma^* \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma$ следует, что $\varnothing \neq \overline{\mathscr{N}}^{\xi^*_\sigma}_{\nu_{\sigma_1}} \subseteq \overline{\mathscr{N}}^{\xi^*_\sigma}_{\nu_{\sigma_2}}$, где для любого $\xi \leqslant \xi^*_\sigma$

$$\overline{\mathscr{N}}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}} = \begin{cases} \mathscr{N}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}, & \text{если } \xi < |\nu_{\sigma'}|, \\ M_{\sigma'}, & \text{если } \xi = |\nu_{\sigma'}|. \end{cases}$$

Построим вспомогательную нумерацию $\dot\nu_\sigma$, $|\dot\nu_\sigma| = \xi^*_\sigma$, полагая по определению $\mathscr{N}^{\xi}_{\dot\nu_\sigma} = \mathscr{N}^{\xi}_{\nu_{\sigma(\xi)}}$ для любого $\xi < \xi^*_\sigma$. Из индукционного предположения (i) следует $\dot\nu_\sigma \upharpoonright |\nu_{\sigma(\xi)}| = \nu_{\sigma(\xi)}$ $(\xi < \xi^*_\sigma)$, $\mathscr{H}^{\tau}_{\dot\nu_\sigma} = \mathscr{H}^{\tau}_{\nu_{\sigma(\xi)}}$ для любого $\tau \leqslant |\nu_{\sigma(\xi)}|$ и, значит, нумерации $\nu_{\sigma(\xi)}$ и $\dot\nu_\sigma \upharpoonright |\nu_{\sigma(\xi)}|$ имеют одни и те же точки насыщения тех же рангов.

Займемся теперь описанием структуры множеств $\overline{\mathscr{N}}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}$.

(iii) Индукционное предположение. Если $\xi \leqslant |\nu_{\sigma'}|$ не точка насыщения $\nu_{\sigma'}$, то множество $\overline{\mathscr{N}}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}$ состоит из всевозможных четверок вида $(0; r; a; s)$, где $r \in \mathscr{B}^*\bigl(\mathscr{H}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}\bigr) - \bigcup\bigl\{\mathscr{B}^*\bigl(\mathscr{H}^{\zeta}_{\nu_{\sigma'}}\bigr); \zeta < \xi\bigr\}$ и

$$\forall\beta\,\exists t\,(\{r\}^{\mathscr{H}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}}(a, \bar\alpha(t), \bar\beta(t)) = 0)$$

для некоторой функции α, графиком которой является множество таких s, что $(0; r; a; s) \in \overline{\mathscr{N}}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}$. Говоря неформально, функция α удостоверяет принадлежность a множеству $S^{1,\xi+1}_{\nu_{\sigma'},r}$ (когда $\xi < |\nu_{\sigma'}|$). Напомним, что согласно определению итерированной клиниевской вычислимости множество $\mathscr{N}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}$, вообще говоря, не является $\mathscr{H}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}$-разрешимым и поэтому $\mathscr{H}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}$-вычислимость α не гарантируется.

Замечание. Сказанное в (iii) распространяется и на множества $\overline{\mathscr{N}}^{\xi}_{\dot\nu_\sigma}$ для ξ, не являющихся точками насыщения нумерации $\dot\nu_\sigma$, так как $\dot\nu_\tau \upharpoonright |\nu_{\sigma(\xi)}| = \nu_{\sigma(\xi)}$.

Далее ищем наименьший ординал $\delta = \delta(\sigma) < |\dot\nu_\sigma|$ (если он существует) такой, что для некоторых $r \in \mathscr{B}^*\bigl(\mathscr{H}^{\delta(\sigma)}_{\dot\nu_\sigma}\bigr) - \bigcup\bigl\{\mathscr{B}^*\bigl(\mathscr{H}^{\gamma}_{\dot\nu_\sigma}\bigr) : \gamma < \delta(\sigma)\bigr\}$ найдутся $a \in S^{1,|\dot\nu_\sigma|}_{\dot\nu_\sigma,r}$ такие, что никакая четверка вида $(0; r; a; s)$ не принадлежит $\mathscr{N}^{\delta(\sigma)}_{\dot\nu_\sigma}$. Каждую такую пару r, a будем называть *нарушающей парой.* Если для $\dot\nu_\sigma$ существует хотя бы одна нарушающая пара, то будем говорить, что имеет место *пульсация первого рода.* В этом случае по определению $\nu_\sigma = \dot\nu_\sigma \upharpoonright \delta(\sigma)$.

Займемся построением M_σ применительно к данному случаю.

Для каждой нарушающей пары r, a находим $\mathscr{H}^{|\dot\nu_\sigma|}_{\dot\nu_\sigma}$-вычислимую функцию $\alpha_{r,a}$ (с минимальным гёделевским номером), «удостоверяющую» принадлежность a множеству $S^{1,|\dot\nu_\sigma|}_{\dot\nu_\sigma,r}$, т. е. такую, что

$$\forall\beta\,\exists t\,(\{r\}^{\mathscr{H}^{\delta(\sigma)}_{\dot\nu_\sigma}}(a, \bar\alpha_{r,a}(t), \bar\beta(t)) = 0).$$

Для данной нарушающей пары r, a строим множество четверок вида $(0; r; a; s)$ для всех s, принадлежащих графику $\alpha_{r,a}$. Каждое такое множество добавляем к номерному множеству $\mathscr{N}_{\dot\nu_\sigma}^{\delta(\sigma)}$, и эту сумму берем в качестве M_σ.

Допустим, что пульсации (первого рода) нет и ξ_σ^* не точка насыщения нумерации $\dot\nu_\sigma$. Если для ξ_σ^* имеет место случай (A), то возьмем в качестве ν_σ нумерацию длины $\xi_\sigma^* + 1$ такую, что $\nu_\sigma \restriction \xi_\sigma^* = \dot\nu_\sigma$ и

$$\mathscr{N}_{\nu_\sigma}^{\xi_\sigma^*} = \bigcup\bigl\{\overline{\mathscr{N}}{}_{\nu_{\sigma'}}^{\xi_\sigma^*} : \sigma^* \leqslant \sigma' < \sigma\bigr\}.$$

Построим множество M_σ для этого случая. Оно состоит из четверок вида $(0; r; a; s)$ таких же, как в индукционном предположении (iii), но применительно к

$$r \in \mathscr{B}^*\bigl(\mathscr{H}_{\nu_\sigma}^{|\nu_\sigma|}\bigr) - \bigcup\bigl\{\mathscr{B}^*\bigl(\mathscr{H}_{\nu_\sigma}^{\zeta}\bigr) : \zeta < |\nu_\sigma|\bigr\}.$$

Очевидно, что M_σ непусто, поскольку $|\nu_\sigma|$ — непредельный ординал (см. [2]).

Допустим, что для ξ_σ^* не имеет места случай (A). Полагаем $\nu_\sigma = \dot\nu_\sigma$. Множество M_σ построим, как в предыдущем случае. Непустота M_σ в данном случае обеспечивается тем, что ξ_σ^* не точка насыщения и в $\mathscr{B}^*\bigl(\mathscr{H}_{\nu_\sigma}^{|\nu_\sigma|}\bigr)$ наверняка найдутся новые гёделевские номера тождественно истинного предиката.

Рассмотрим следующую возможность: когда пульсации (первого рода) нет, но ξ_σ^* является точкой насыщения того или иного ранга. Тогда в зависимости от ранга ξ_σ^* следует принять то или иное индукционное предположение.

Займемся сначала случаем, когда ранг равен нулю, т. е. ξ_σ^* — изолированная точка насыщения $\dot\nu_\sigma$. При этом ниже нам понадобятся множества вида $S_{\dot\nu_\sigma,r}^{2,\tau}$ и потому надо предварительно выяснить, как обстоит дело с функцией $\varphi_{\dot\nu_\sigma}^1$, и одновременно что-то предположить по индукции касательно функций $\varphi_{\nu_{\sigma'}}^1$ $(\sigma' < \sigma)$.

(iv) Индукционное предположение. Пусть ξ — какая-нибудь точка насыщения нумерации $\nu_{\sigma'}$. Берем $\tau < \xi$ и любое $r \in \mathscr{B}^*\bigl(\mathscr{H}_{\nu_{\sigma'}}^{\tau}\bigr)$. Рассмотрим последовательность $S_{\nu_{\sigma'},r}^{1,\tau'}$, где $\tau \leqslant \tau' \leqslant |\nu_{\sigma'}|$. Предположение заключается в том, что для любого такого r эта последовательность стабилизируется на некотором шаге $\tau^1(r) < \xi$. (Тогда в соответствии с определением из п. 2 имеем для $\tau < \xi$ в силу регулярности оракула $\mathscr{H}_{\nu_{\sigma'}}^{\xi}$ $\varphi_{\nu_{\sigma'}}^1(\tau) < \sigma$ и $\varphi_{\nu_{\sigma'}}^1(\xi) = \xi$.)

Очевидно, если для $\xi < \xi_\sigma^*$ имеет место $\xi \in \mathfrak{N}_0'[\nu_{\sigma(\xi)}]$, то для σ_1, σ_2, где $\sigma(\xi) \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma$, справедливо $\varphi_{\nu_{\sigma_1}}^1 \restriction \xi = \varphi_{\nu_{\sigma_2}}^1 \restriction \xi$. Отсюда, в частности, вытекает, что $\varphi_{\dot\nu_\sigma}^1(\tau) = \varphi_{\nu_{\sigma(\xi)}}^1(\tau)$, если $\tau < |\nu_{\sigma(\xi)}|$. Так как ξ_σ^* — точка насыщения, то $\varphi_{\dot\nu_\sigma}^1(\xi) < \xi_\sigma^*$ для $\xi < \xi_\sigma^*$ и $\varphi_{\dot\nu_\sigma}^1(\xi_\sigma^*) = \xi_\sigma^*$.

(v) Индукционное предположение. Если $\xi \leqslant |\nu_{\sigma'}|$ — точка насыщения нумерации $\nu_{\sigma'}$ ранга 0, то $\overline{\mathscr{N}}{}_{\nu_{\sigma'}}^{\xi}$ состоит из всевозможных четверок вида $\{1; r; a; s)$, где

$$r \in \mathscr{B}^*\bigl(\mathscr{H}_{\nu_{\sigma'}}^{\xi}\bigr) - \bigcup\bigl\{\mathscr{B}^*\bigl(\mathscr{H}_{\nu_{\sigma'}}^{\zeta}\bigr) : \zeta < \xi \text{ и } \zeta \in \mathfrak{N}_0[\nu_{\sigma'}]\bigr\}.$$

При этом для каждого такого r и для каждого a, упомянутого в четверке, содержащей r, имеет место

$$\forall \beta \in \mathscr{M}_{\nu_{\sigma'}}^{\varphi_{\nu_{\sigma'}}^1(\xi^+)}\, \exists \eta\, \forall t\, (\{r\}^{\mathscr{H}_{\nu_{\sigma'}}^{\xi}}(a, \bar\alpha(t), \bar\beta(t), \bar\eta(t)) = 0)$$

для некоторой функции α, графиком которой является множество таких s, что $(1; r; a; s) \in \overline{\mathscr{N}}{}_{\nu_{\sigma'}}^{\xi}$ (где $\xi^+ = \xi + 1$, если $\xi < |\nu_{\sigma'}|$, и $\xi^+ = |\nu_{\sigma'}|$, если $\xi = |\nu_{\sigma'}|$).

Функция α на этот раз удостоверяет принадлежность a множеству $S^{2,\xi+1}_{\nu_{\sigma'},r}$ (для $\xi < |\nu_{\sigma'}|$).

Замечание. Сказанное распространяется на нумерацию $\dot\nu_\sigma$, как это было для индукционного предположения (iii) по аналогичной причине. Введем понятие *пульсации второго рода.*

Ищем наименьший ординал $\delta = \delta^2(\sigma) < |\dot\nu_\sigma|$ (если он существует) такой, что для некоторых

$$r \in \mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}^{\delta^2(\sigma)}_{\dot\nu_\sigma}\big) - \bigcup\big\{\mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}^{\gamma}_{\dot\nu_\sigma}\big) : \gamma < \delta^2(\sigma) \text{ и } \gamma \in \mathfrak{N}_0[\dot\nu_\sigma]\big\}$$

найдутся a, принадлежащие $S^{2,|\dot\nu_\sigma|}_{\dot\nu_\sigma,r}$, такие, что никакая четверка вида $(1;r;a;s)$ не принадлежит $\mathscr{N}^{\delta^2(\sigma)}_{\dot\nu_\sigma}$. Каждую такую пару r, a будем называть *нарушающей парой* (*второго рода*). Если для $\dot\nu_\sigma$ существует хотя бы одна такая нарушающая пара, то будем говорить, что имеет место *пульсация второго рода*, и тогда положим $\nu_\sigma = \dot\nu_\sigma \restriction \delta^2(\sigma)$. Множество M_σ строится так. Для каждой нарушающей пары r, a находим $\mathscr{H}^{|\dot\nu_\sigma|}_{\dot\nu_\sigma}$-вычислимую функцию $\alpha_{r,a}$ (с минимальным гёделевским номером), «удостоверяющую» принадлежность a множеству $S^{2,|\dot\nu_\sigma|}_{\dot\nu_\sigma,r}$. Для каждой нарушающей пары r, a строим множество четверок вида $(1;r;a;s)$ для всех s, принадлежавших графику $\alpha_{r,a}$. Каждое такое множество добавляем к номерному множеству $\mathscr{N}^{\delta^2(\sigma)}_{\dot\nu_\sigma}$, и эту сумму берем в качестве M_σ.

Если нет пульсации (второго рода), а ξ^*_σ — изолированная точка насыщения и при этом имеет место случай (A), то в качестве ν_σ берем нумерацию длины $|\dot\nu_\sigma| + 1$, полагая $\nu_\sigma \restriction \xi^*_\sigma = \dot\nu_\sigma$, а $\mathscr{N}^{\xi^*_\sigma}_{\nu_\sigma} = \bigcup\big\{\overline{\mathscr{N}}^{\xi^*_\sigma}_{\nu_{\sigma'}} : \sigma^* < \sigma' < \sigma\big\}$.

Если не имеет места случай (A) (и $\xi^*_\sigma \in \mathfrak{N}_0[\dot\nu_\sigma]$), то полагаем $\nu_\sigma = \dot\nu_\sigma$. Строим M_σ так же, как в случае, когда ξ^*_σ не была точкой насыщения, но на этот раз применительно к

$$r \in \mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}^{|\dot\nu_\sigma|}_{\dot\nu_\sigma}\big) - \bigcup\big\{\mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}^{\zeta}_{\dot\nu_\sigma}\big), \zeta < |\dot\nu_\sigma|, \zeta \in \mathfrak{N}_0[\dot\nu_\sigma]\big\}$$

(и для $a \in S^{2,|\dot\nu_\sigma|}_{\dot\nu_\sigma,r}$).

Непустота этого множества обосновывается, как выше. Случаи, когда ранг ξ^*_σ больше нуля, разбираются аналогично, поскольку закономерность уже уловлена.

Опишем вкратце случай, когда $\xi^*_\sigma \in \mathfrak{N}_1[\dot\nu_\sigma]$. Тогда на основании уже рассмотренного ранее мы можем определить функцию $\varphi^2_{\dot\nu_\sigma}$, предварительно приняв надлежащее индукционное предположение, которое в данном случае имеет следующий вид.

(vi) Индукционное предположение. Пусть ξ — какая-нибудь точка насыщения нумерации $\nu_{\sigma'}$ ранга ≥ 1. Берем $\tau < \xi$ и любое $r \in \mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}^{\tau}_{\nu_{\sigma'}}\big)$. Рассмотрим последовательность $S^{2,\tau'}_{\nu_{\sigma'},r}$ для $\tau' \geqslant \tau$. Предположение заключается в том, что для любого r эта последовательность стабилизируется на некотором шаге $\tau^2(r) < \xi$. Тогда в соответствии с определением из п. 2 имеем $\varphi^2_{\nu_{\sigma'}}(\xi) = \xi$ для $\varphi^2_{\nu_{\sigma'}}(\tau) < \xi$, $\tau < \xi$.

(vii) Индукционное предположение. Если ξ — точка насыщения нумерации $\nu_{\sigma'}$ ранга 1, то $\overline{\mathscr{N}}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}$ состоит из всевозможных четверок вида $(2;r;a;s)$, где

$$r \in \mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}\big) - \bigcup\big\{\mathscr{B}^*\big(\mathscr{H}^{\zeta}_{\nu_{\sigma'}}\big) : \zeta < \xi \text{ и } \zeta \in \mathfrak{N}_1[\nu_{\sigma'}]\big\}.$$

При этом для каждого такого r и для каждого a, упомянутого в какой-нибудь четверке, содержащей r, имеет место

$$\forall\beta \in \mathscr{M}_{\nu_{\sigma'}}^{\varphi^2_{\nu_{\sigma'}},(\xi^+)}\, \exists\eta_1 \in \mathscr{M}_{\nu_{\sigma'}}^{\varphi^1_{\nu_{\sigma'}},\varphi^2_{\nu_{\sigma'}},(\xi^+)}\, \forall\eta_2\, \exists t\, (\{r\}^{\mathscr{H}^{\xi}_{\nu_{\sigma'}}}(a, \bar{\alpha}(t), \bar{\beta}(t), \bar{\eta}_1(t), \bar{\eta}_2(t)) = 0)$$

для некоторой функции α, графиком которой является множество таких s, что $(2; r; a; s) \in \overline{\mathscr{N}}^{\,\xi}_{\nu_{\sigma'}}$. Функция α на этот раз «удостоверяет» принадлежность a множеству $S^{3,\xi+1}_{\nu_{\sigma'},r}$ (для $\xi < |\nu_{\sigma'}|$).

Замечание. Сказанное в (vi) и (vii) распространяется на нумерацию $\dot{\nu}_\sigma$, как было для индукционных предположений (iii), (v) по аналогичной причине.

Аналогичным образом определяем *пульсацию третьего рода*, и далее идет разбор тех же случаев, что в ситуации, когда ξ^*_σ было точкой насыщения ранга 0. Построение ν_σ, M_σ осуществляется подобным образом. А именно, определяются *нарушающие пары третьего рода*, *пульсация третьего рода*, и разбираются случаи:

a) пульсация есть;

b) пульсации нет, но имеет место случай (A) для ξ^*_σ;

c) пульсации нет, но не имеет места случай (A).

По мере возрастания ранга ξ^*_σ мы каждый раз принимаем надлежащие индукционные предположения, аналогичные ранее введенным, в которых задействованы $S^{i,\tau}_{\nu,r}$ и φ^i_ν для последующих $i < \omega$.

Описание индукционного шага тем самым завершается. Нетрудно усмотреть, что индукционные предположения сохраняют свою силу при переходе от σ к $\sigma + 1$.

Замечание. Когда σ — предельный ординал, мы просто объединяем семейства $\{\nu_{\sigma''}, M_{\sigma''} \mid \sigma'' < \sigma'\}$ для $\sigma' < \sigma$. При таком объединении индукционные предположения тривиальным образом сохраняются.

Как видно из этого описания, процесс обрывается при достижении такого σ, когда $\xi^*_\sigma \in \mathfrak{N}_\omega[\dot{\nu}_\sigma]$. В силу индукционных предположений (iv), (vi) и т. д. все множества вида $S^{i,\tau}_{\dot{\nu}_\sigma,r}$ будут разрешимы равномерно по r (в силу регулярности $\mathscr{H}^{|\dot{\nu}_\sigma|}_{\dot{\nu}_\sigma}$), откуда и следует, что замыкающий оракул нумерации $\dot{\nu}_\sigma$ даст искомую модель арифметики второго порядка. Осталось только показать, что процесс действительно оборвется.

Предположим от противного, что процесс длится по всем ординалам. Множества $\overline{\mathscr{N}}^{\,0}_{\nu_\sigma}$ можно определить для всех σ, и последовательность этих множеств монотонно расширяется по включению. Значит, она должна стабилизироваться на некотором σ_0. Для $\sigma > \sigma_0$ очевидно, что $|\nu_\sigma| \geqslant 1$, тем самым $\overline{\mathscr{N}}^{\,1}_{\nu_\sigma}$, $\sigma > \sigma_0$, могут быть определены и снова образуют монотонную последовательность, стабилизирующуюся на некотором шаге σ_1. Так как $\sigma_0 \leqslant \sigma_1$, то $\overline{\mathscr{N}}^{\,0}_{\nu_{\sigma_0}} = \overline{\mathscr{N}}^{\,0}_{\nu_{\sigma_1}}$, и поэтому $\overline{\mathscr{N}}^{\,0}_{\nu_{\sigma_0}}$ и $\overline{\mathscr{N}}^{\,1}_{\nu_{\sigma_1}}$ не пересекаются, будучи номерными множествами одной нумерации.

Продолжая, мы построим последовательность ординалов σ_ξ такую, что множества $\overline{\mathscr{N}}^{\,\xi}_{\nu_{\sigma_\xi}}$ определены и попарно не пересекаются.

Но поскольку ξ пробегает по всем ординалам, это невозможно. Значит, последовательность ν_σ обрывается, что и требовалось доказать.

В заключение заметим, что описанный здесь «пульсирующий» процесс использует счетное число индукционных предположений. Каждое из них в отдельности выражается посредством некоторой формулы второго порядка, и поскольку определения множеств $S^{i,\tau}_{\nu,r}$ при разных i задаются разными формулами, свести все эти предположения к одной формуле (второго порядка) не удается. Более того, это невозможно в силу теоремы Гёделя о неполноте. Тем не менее такое сведение осуществимо в рамках теории ZFC, так как в этой теории выразима истинность формул арифметики второго порядка в их естественной интерпретации (посредством определения истинности по Тарскому). Следовательно, описанное в данной статье построение нужной модели осуществимо в ZFC.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ганов В. А., Белякин Н. В.* Общая теория вычислений с оракулами. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1989.
2. *Белякин Н. В.* Итерированная клиниевская вычислимость // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 6. С. 27–32.
3. *Белякин Н. В.* Пульсирующие иерархии // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 520–526.
4. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
5. *Белякин Н. В.* Обобщенные вычисления и арифметика второй ступени // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 375–405.

Статья поступила 17 апреля 2001 г.

Гайлит Евгения Валерьевна
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
regina@math.nsc.ru