Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 517.15

ОБ ОДНОЙ ИЕРАРХИИ ГРУПП ВЫЧИСЛИМЫХ АВТОМОРФИЗМОВ

А. С. Морозов, А. Н. Бузыкаева

Аннотация: Получено полное описание групп вида $\bigoplus\limits_{i\in I}\mathbb{Z}_{p_i}$, которые могут реализоваться как группы всех вычислимых автоморфизмов подходящих вычислимых моделей. Предложена трехступенчатая классификация типов изоморфизма групп вычислимых автоморфизмов по возможной арифметической сложности их орбит, и доказана ее нетривиальность. Библиогр. 5.

Основные понятия и результаты по группам вычислимых автоморфизмов представлены в работе [1].

Напомним основные определения. *Вычислимая модель*

$$\mathfrak{M} = \langle A, f_0^{n_0}, \dots ; P_0^{m_0}, \dots \rangle$$

— это модель, в которой A — вычислимое подмножество множества натуральных чисел ω, отображения $i \mapsto n_i$ (арность f_i) и $i \mapsto m_i$ (арность P_i) вычислимы, а также все операции f_i и предикаты P_i равномерно вычислимы по i. *Вычислимым автоморфизмом* вычислимой модели $\mathfrak{M}$ называют автоморфизм модели $\mathfrak{M}$, который является вычислимой функцией на основном множестве модели. Все такие автоморфизмы образуют группу, которую будем обозначать через $\mathrm{Aut}_c\,\mathfrak{M}$.

Одна из основных задач при изучении групп вычислимых автоморфизмов состоит в характеризации класса групп вычислимых автоморфизмов. Однако любая попытка его описания наталкивается на серьезные трудности. В частности, он не может быть описан как класс всех групп, вычислимых относительно некоторого оракула [2]. Элементарная теория класса таких групп оказывается вычислимо изоморфной арифметике [3]. Не приводят к успеху также попытки разумно описать даже конечно-порожденные подгруппы таких групп [4]. Единственным вносящим хоть какую-то ясность в этот вопрос результатом в настоящее время является

Теорема 1 [1, 5]. *Произвольная конечно-порожденная группа G изоморфна группе $\mathrm{Aut}_c\,\mathfrak{M}$ для подходящей вычислимой модели $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, когда проблема равенства в этой группе разрешима* (*иначе говоря, когда эта группа изоморфна вычислимой группе*).

В этой работе мы дадим еще одно описание групп вычислимых автоморфизмов внутри одного очень узкого класса групп, которое, однако, даст нам возможность определить естественную трехступенчатую иерархию внутри этого класса и доказать ее нетривиальность.

Мы будем обозначать через p_i i-е простое число, т. е. $p_0 = 2$, $p_1 = 3, \dots$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00485).

Теорема 2. *Группа вида* $\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{p_i}$ *изоморфна группе* $\mathrm{Aut}_c\,\mathfrak{M}$ *для подходящей вычислимой модели* $\mathfrak{M}$ *тогда и только тогда, когда* $I\in\Sigma^0_3$.

Доказательство. Докажем достаточность. Нам понадобится следующая

Лемма 1 [5]. *Пусть* $I\in\Sigma^0_3$. *Существует вычислимая последовательность линейных порядков* L_j, $j\in\omega$, *такая, что*

1) *если* $j\in I$, *то порядок* L_j *вычислимо изоморфен порядку типа* ω^2, *в котором вычислимы множества пар соседних элементов и существует монотонно возрастающее перечисление множества всех предельных элементов* (*равномерность по* j *не гарантируется*);

2) *если* $j\notin I$, *то* L_j *изоморфен* ω.

Заметим, что все вычислимые линейные порядки, удовлетворяющие условию 1 этой леммы, вычислимо изоморфны между собой.

Основное множество модели $\mathfrak{M}$ будет состоять из нескольких типов элементов. Сначала введем в рассмотрение упорядоченное множество

$$B=\{a^0_0<a^0_1<a^1_0<a^1_1<a^1_2<\ldots<a^k_0<\ldots<a^k_{p_k-1}<\ldots\}.$$

Это множество B можно представить как объединение семейства непересекающихся блоков вида $\{a^k_0,a^k_1,\ldots,a^k_{p_k-1}\}$, $k=0,1,\ldots$, расположенных друг за другом. Мы будем называть множество $\{a^j_0,a^j_1,\ldots,a^j_{p_j-1}\}$, состоящее из p_j элементов, j*-м блоком*.

Зафиксируем некоторый вычислимый линейный порядок L по типу ω^2, у которого рекурсивно множество соседних элементов, а также существует монотонно возрастающее перечисление множества всех предельных элементов.

Основное множество модели $\mathfrak{M}$ будет состоять из двух непересекающихся частей: элементов множества B и множества упорядоченных пар вида $\langle a^j_i,b\rangle$, где b — элемент из некоторого порядка L'_j, возникающего в ходе построения, почти не отличающегося от порядка L_j из леммы для $i\neq 0$, и элемент из порядка L для $i=0$.

Основные предикаты модели определим таким образом.

1. Предикат U^1 выделяет множество B.

2. Предикат R^2 истинен на паре элементов модели $\langle x,y\rangle$ в том и только в том случае, когда $U(x),\neg U(y)$ и $y=\langle x,b\rangle$.

3. Предикат P^2 истинен на паре $\langle x,y\rangle$, если $x=a^j_i$, $y=a^j_{i+1}$ при $i<p_j-1$ или $x=a^j_{p_j-1}$, $y=a^j_0$ (т. е. он образует цикл длиной p_j на j-м блоке).

4. Предикат $\preceq$ определяет отношение линейного порядка на элементах, принадлежащих множествам $\{a^j_k\}\times L'_j$, $j\in\omega$, которые получаются перенесением исходного упорядочения на L'_j с помощью отображения $x\in L'_j\mapsto\langle a^j_k,x\rangle$. Элементы разных множеств $\{a^j_k\}\times L'_j$, $j\in\omega$, $0\le k\le p_j-1$, попарно несравнимы относительно $\preceq$.

Идея доказательства. Сначала к элементам a^j_0 для всех $j\in\omega$ с помощью предиката R подвесим порядки L типа ω^2. Далее мы будем строить модель $\mathfrak{M}$ по шагам, подвешивая ко всем элементам, кроме a^j_0, жесткие линейные порядки L_j типа ω или ω^2 из леммы. Любой автоморфизм будет переставлять элементы внутри блоков. Чтобы не допустить возникновения автоморфизма, переставляющего бесконечное число блоков, на некоторых шагах будем добавлять новые элементы в какой-либо из подвешиваемых к элементу a^j_k, $k\neq 0$, порядок таким образом, что число добавленных в каждый такой порядок элементов окажется конечным и ни один из добавленных элементов не окажется максимальным в этом порядке. Благодаря этому типы изоморфизма и алгоритмические свойства порядков, упомянутые в лемме, останутся прежними.

Поймем, что произвольный автоморфизм $\mathfrak{M}$ сможет двигать только элементы внутри блоков с порядками, изоморфными ω^2. Действительно, пусть некоторый автоморфизм f переводит элемент одного блока в элементы другого: $f(a_i^k) = a_j^r$, $k \neq r$. Тогда из-за того, что f сохраняет P, получим, что $k = r$, т. е. указанное перемешивание невозможно. Если предположить, что f двигает элементы внутри блоков с подвешенными порядками, изоморфными ω, то получим $f(a_i^j) = a_0^j$, $i \neq 0$, и, значит, некоторое упорядочение по типу ω под действием f перейдет в упорядочение по типу ω^2, что невозможно. Если же все подсоединяемые внутри j-го блока порядки имеют тип ω^2, то добавление конечного числа новых немаксимальных элементов сохранит свойство рекурсивности множества соседних элементов и существование монотонного перечисления всех предельных элементов. Все такие порядки окажутся вычислимо изоморфными между собой. Ввиду этого возможен вычислимый автоморфизм, циклически переставляющий элементы внутри j-го блока и оставляющий на месте все элементы других блоков.

Формальное описание построения. Мы начинаем с множества B, описанного ранее. Определим P, как описано выше.

В дальнейшем слова «надстраиваем над элементом a_i^j порядок S» будем понимать как добавление в нашу модель новых элементов вида $\langle a_i^j, b\rangle$, $b \in S$, с определением порядка $\preceq$ как образа порядка на S относительно отображения $b \mapsto \langle a_i^j, b\rangle$, полагая $R\big(a_i^j, \langle a_i^j, b\rangle\big)$ для всех $b \in S$.

Будем считать, что построение ведется на натуральных числах, естественным образом ассоциируя элементы строящейся модели с натуральными числами.

Фиксируем некоторую клиниевскую вычислимую нумерацию всех частично рекурсивных функций φ_n, $n \in \omega$. Под φ_n^t будем понимать конечную часть функции φ_n, вычисленную за первые t шагов.

Будем использовать построение порядков L_j $(j \in \omega)$ из леммы 1, зафиксировав процесс их перечисления:

$$L_j^0 \subseteq L_j^1 \subseteq \ldots \subseteq L_j^t \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_s L_j^s = L_j,$$

при котором на каждом шаге в порядок добавляется в точности один элемент, т. е. $\big|L_j^{t+1} \backslash L_j^t\big| = 1$ для всех $t \in \omega$. Зафиксируем такое же перечисление и для порядка L.

На каждом шаге t мы надстраиваем над a_i^j, $i \neq 0$, порядок L_j', помещая туда вновь перечисленные в L_j до шага t элементы, а также, возможно, новые элементы, возникающие в ходе построения. Над каждым a_0^j надстраиваем порядок L.

Если на шаге t появились n, $j \leq t$ такие, что $n < j$, а также элементы $b_0, b_1, b_0', b_1' \leq t$, $k \neq 0$, $k < p_j$, такие, что

$$\varphi_n^t\big(\langle a_0^j, b_0\rangle\big) = \langle a_k^j, b_0'\rangle, \quad \varphi_n^t\big(\langle a_0^j, b_1\rangle\big) = \langle a_k^j, b_1'\rangle,$$

и при этом b_0 и b_1 — соседние элементы в L, b_0 не больше b_1 в L, n еще не рассматривалось раньше, b_0' меньше b_1' в надстраиваемом над a_k^j порядке, то для минимального такого n выбираем минимальное подходящее j и добавляем в порядок, надстраиваемый над a_k^j между b_0' и b_1', новый элемент c, с тем чтобы b_0' и b_1' оказались уже не соседними элементами, и полагаем $R\big(a_k^j, \langle a_k^j, c\rangle\big)$. После этого считаем n рассмотренным и никогда больше его не рассматриваем. В дальнейшем если возникает необходимость добавления нового элемента, соответствующего элементу из L_j, в порядок, надстраиваемый над a_k^j, то из-за добавляемых новых элементов может возникнуть неоднозначность в выборе места для этого элемента. В этом случае мы вставляем новый элемент на самое левое из всех возможных мест.

Конец описания построения.

Из построения ясно, что построенная модель вычислима.

Заметим также, что для любого m в каждый надстраиваемый над некоторым элементом m-го блока порядок в процессе построения может быть добавлено лишь конечное число элементов, поскольку в каждом случае добавления нового элемента будет рассмотрено некоторое $n \le m$, которое впоследствии не может быть рассмотрено.

Кроме того, как уже отмечалось, любой автоморфизм этой модели циклически переставляет элементы внутри блоков, у которых все надстроенные над элементами порядки изоморфны ω^2. Ввиду жесткости линейных порядков, надстраиваемых над элементами блока, действие любого автоморфизма полностью определено его действием на блоках. Далее, если функция φ_n задает автоморфизм нашей модели, то она не может нетривиально переставлять элементы внутри блоков с номерами, большими n, так как в противном случае на некотором достаточно большом шаге будет обеспечено, что φ_n переводит пару соседних элементов относительно порядка $\preceq$ в пару несоседних элементов, а именно пару соседей из некоторого порядка, надстраиваемого над a_0^j, в пару несоседей из порядка, надстраиваемого над a_k^j. Противоречие.

Таким образом, если мы обозначим через γ_i вычислимый автоморфизм, циклически переставляющий элементы i-го блока для $i \in I$, то любой автоморфизм полученной модели будет произведением конечного числа автоморфизмов γ_i. Это дает нам изоморфизм между $\bigoplus\limits_{i\in I}\mathbb{Z}_{p_i}$ и $\mathrm{Aut}_c\,\mathfrak{M}$.

Докажем достаточность. Предположим, что группа $\bigoplus\limits_{i\in I}\mathbb{Z}_{p_i}$ изоморфна группе всех вычислимых автоморфизмов подходящей вычислимой модели. Тогда нетрудно убедиться, что

$$i \in I \iff \exists x_0 \dots x_{p_i-1}\Big(\bigwedge_{0\le k<j<p_i}(x_k \ne x_j) \vee (\langle x_0 \dots x_{p_i-1}\rangle \cong_c \langle x_1 \dots x_{p_i-1}, x_0\rangle)\Big). \tag{1}$$

Мы сделаем это чуть позже.

Как отмечалось в [5], отношение $\cong_c$ всегда лежит в Σ_3^0, что, впрочем может быть легко проверено непосредственно. Из приведенной эквивалентности следует, что $I \in \Sigma_0^3$.

Проверим теперь саму эквивалентность (1). Предположим, что $i \in I$. Это означает, что у модели есть вычислимый автоморфизм p_i-го порядка, что дает существование указанного цикла $x_0 \dots x_{p_i-1}$ простой длины p_i. Пусть теперь выполнено условие справа. Возьмем вычислимый автоморфизм f, циклически переставляющий элементы $x_0 \dots x_{p_i-1}$. Ввиду изоморфности группы всех автоморфизмов прямой сумме циклических групп различных простых порядков, порядок этого автоморфизма конечен и делится на p_i, Это означает, что в группе есть порождающий порядка p_i, т. е. $i \in I$. В противном случае если мы обозначим изоморфный образ f через $\hat{f}$, то получим $\hat{f} = a_{p_{j_1}}^{i_1} \dots a_{p_{j_q}}^{i_q}$, где $a_{p_{j_s}}$ — порождающий прямого слагаемого $\mathbb{Z}_{p_{j_s}}$, $s = 1, \dots, q$, $p_{j_s} \neq p_i$, откуда $f^{p_{j_1} \dots p_{j_q}}(x_0) \neq x_0$ и $1 \neq (\hat{f})^{p_{j_1} \dots p_{j_q}} = \left(a_{p_{j_1}}^{i_1} \dots a_{p_{j_q}}^{i_q}\right)^{p_{j_1} \dots p_{j_q}} = 1$; противоречие. $\square$

Перейдем к определению трехступенчатой иерархии на классе групп вычислимых автоморфизмов и доказательству ее нетривиальности.

Обозначим через Γ_i класс всех групп, которые изоморфны группам всех вычислимых автоморфизмов вычислимых моделей M, у которых отношение $\cong_c$ лежит в классе Σ_i^0, $i = 1, 2, 3$. Как уже отмечалось, это отношение всегда лежит в Σ_3^0, и поэтому рассматривать более высокие уровни не имеет смысла.

Теорема 3. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\Gamma_1 \subsetneqq \Gamma_2 \subsetneqq \Gamma_3.$$

Доказательство. Оба включения очевидны, необходимо доказать их нетривиальность.

Лемма 2. *Пусть $G_I = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{p_i}$ и G_I изоморфна группе всех вычислимых автоморфизмов некоторой вычислимой модели M. Пусть $k \in \{1, 2, 3\}$. Тогда если отношение $\cong_c$ на M лежит в классе Σ_k^0, то и $I \in \Sigma_k^0$.*

Доказательство непосредственно следует из эквивалентности (1).

Продолжим доказательство теоремы. Возьмем произвольное множество $I \in \Sigma_3^0 \setminus \Sigma_2^0$. В силу леммы, а также учитывая, что отношение $\cong_c$ всегда лежит в Σ_3^0, получаем $G_I \in \Gamma_3 \setminus \Gamma_2$.

Осталось проверить нетривиальность включения $\Gamma_1 \subsetneqq \Gamma_2$. Возьмем произвольное иммунное множество $I \in \Pi_1^0 \setminus \Sigma_1^0$ с перечислимым дополнением и построим модель $\mathfrak{M}$ следующим образом. Сигнатура модели $\mathfrak{M}$ будет содержать единственный бинарный предикат P. Начнем построение модели с множества, являющегося объединением нетривиальных непересекающихся направленных циклов, образованных предикатом P, причем для каждого простого числа p_i, $i < \omega$, в нем будет содержаться в точности по одному циклу длины p_i. Далее будем перечислять без повторения дополнение множества I и каждый раз, когда выяснится, что какой-то элемент i не принадлежит I, мы подсоединяем к имеющемуся единственному циклу длины p_i при помощи предиката P один новый элемент так, чтобы лишить этот цикл всех его нетривиальных симметрий.

Из построения ясно, что группа всех вычислимых автоморфизмов построенной таким образом модели будет изоморфна G_I, поскольку в силу иммунности множества I ни один вычислимый автоморфизм не может двигать элементы бесконечно многих циклов.

Кроме того, из построения ясно, что отношение $\cong_c$ на нашей модели $0'$-вычислимо и, следовательно, лежит в Σ_2^0 (и даже в Δ_2^0). Стало быть, $G_I \in \Gamma_2$, а в силу леммы имеем $G_I \notin \Gamma_1$. $\square$

Вопрос. Существует ли группа, которая изоморфна группе всех вычислимых автоморфизмов подходящей вычислимой модели с перечислимым отношением $\cong_c$, но не изоморфна никакой группе всех вычислимых автоморфизмов, в которой это отношение вычислимо?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morozov A. S.* Handbook of recursive mathematics. Studies in logic and foundations of mathematics. V. 1. Groups of computable automorphisms. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998. Chapter 8. P. 311–345.
2. *Морозов А. С.* О степенях групп рекурсивных автоморфизмов // Алгебра, логика и приложения. Иркутск: Иркутский гос. ун-т, 1994. С. 79–84. (Сборник научных трудов, посвященный памяти А. И. Кокорина).
3. *Морозов А. С.* О теориях классов групп рекурсивных перестановок // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1989. Т. 12. С. 91–104.
4. *Морозов А. С.* Еще раз о вопросе Хигмана // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 134–144.
5. *Морозов А. С.* О вычислимых группах автоморфизмов моделей // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 415–424.

Статья поступила 14 марта 2001 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru

Бузыкаева Анна Николаевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
A.N.Buzykaeva@inp.nsk.su