Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 514.76

ОБОБЩЕННАЯ АКСИОМА СФЕР

С. И. Окрут

Аннотация: Предлагается обобщение аксиомы сфер. Построено семейство римановых пространств, удовлетворяющих обобщенной аксиоме сфер, однако не удовлетворяющих известным ранее аксиомам подмногообразий. Найдено строение тензора кривизны многообразий с обобщенной аксиомой сфер. Это строение оказывается во многом схожим со строением тензора кривизны многообразий с обобщенной аксиомой плоскостей. Библиогр. 8.

Введение

Основным вопросом в теории аксиом подмногообразий является аналитическая характеризация римановых пространств, удовлетворяющих некоторому синтетическому свойству, как принято говорить, аксиоме. С прекрасным обзором по теории аксиом подмногообразий можно ознакомиться в [1]. Данная статья посвящена характеризации класса римановых пространств, удовлетворяющих предлагаемому ниже обобщению аксиомы сфер Леунга — Номидзу [2]. Это обобщение проводится в духе обобщения аксиомы плоскостей Картана, рассмотренного ранее автором [3]. Описание указанного класса пространств получено в теореме 3.1 в терминах строения тензора кривизны. В первом параграфе показано, что класс римановых пространств с обобщенной аксиомой сфер шире класса римановых пространств с обобщенной аксиомой плоскостей.

Произвольно выбираемые многообразия, функции и тензорные поля предполагаются гладкими (класса C^∞). Основные понятия и обозначения соответствуют принятым, например, в [4, 5]. На протяжении всего изложения действует правило о суммировании по повторяющемуся на разных уровнях индексу.

§ 1. Существование пространств с обобщенной аксиомой сфер

Подмногообразие называется *вполне омбилическим*, если его вторая основная форма пропорциональна первой, т. е. $\alpha(X,Y) = g(X,Y)H$ для любых касательных векторов X и Y, где H — вектор средней кривизны. Вполне омбилическое подмногообразие с параллельным в нормальной связности вектором средней кривизны, т. е. $D_X H = 0\ \forall X \in TM$, называется *внешней сферой*. Подмногообразие называют *гиперподмногообразием*, если его коразмерность равна 1. Очевидно, для того чтобы вполне омбилическое гиперподмногообразие было внешней сферой, необходимо и достаточно, чтобы вектор средней кривизны имел постоянную норму. Внешнюю сферу будем называть *гиперсферой*, если она является гиперподмногообразием.

Определение 1.1. Риманово многообразие N^n *удовлетворяет аксиоме (l,s)-сфер* ($1 \le l \le s < n$ и l, s — целые фиксированные числа) *в точке*

$x \in N$, если для любого l-мерного подпространства $Q \subset T_xN$ существует s-мерная внешняя сфера W^s, проходящая через x, такая, что $Q \subset T_xW^s$. Будем говорить, что риманово многообразие *удовлетворяет аксиоме* (l,s)-*сфер*, если оно удовлетворяет ей в каждой точке.

Пример 1.1. Пусть M^{n-1} — евклидово пространство с прямоугольными декартовыми координатами x^i $(i = 1,\dots,n-1)$. Будем рассматривать M как плоское риманово многообразие с канонической римановой метрикой $g^M = (dx^1)^2 + \dots + (dx^{n-1})^2$, порожденной скалярным произведением. Определим на многообразии M функцию

$$\psi = 1 + \frac{c}{4}((x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2),$$

где c — некоторая константа. Зададим многообразие $N := \{(u,x) \in \mathbb{R} \times M \mid \psi - u > 0\}$, являющееся одной из компонент связности n-мерного аффинного пространства, на которые его разбивает параболоид вращения. С помощью формулы (1.1) определим на N риманов метрический тензор

$$g = (\psi - u)^{-2}(dv^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^{n-1})^2), \tag{1.1}$$

где $u = u(v)$ — некоторая вещественная функция. Как видно из формулы (1.1), риманова метрика g является конформной деформацией евклидовой метрики g^0, т. е. $g = \exp(2f)g^0$. Здесь показатель конформной деформации задается с помощью выражения $f = -\ln(\psi - u)$. Обозначим через $\nu : N \to M$ проекцию на второй сомножитель. Покажем, что прообраз $W = \nu^{-1}(S)$ вполне геодезического подмногообразия S в M является внешней сферой в N. Так как вполне геодезические подмногообразия в M — это в точности аффинные подпространства, то, учитывая произвол в выборе прямоугольной аффинной системы координат, можно считать, что подмногообразие S, а следовательно, и подмногообразие W задаются системой уравнений вида $x^\gamma = 0$ $(\gamma = q,\dots,n-1)$. Как известно, например, из [6, с. 18], при конформной деформации метрики вполне геодезические подмногообразия в метрике g^0 переходят во вполне омбилические подмногообразия в метрике g. При этом вектор средней кривизны H_W подмногообразия W в метрике g может быть вычислен с использованием формул (3.1) и (3.9) из [6] следующим образом:

$$H_W = -e^{-2f}(\operatorname{gr}^0 f)^\perp, \tag{1.2}$$

где символом gr^0 (gr^M) обозначается градиент относительно метрики g^0 (g^M соответственно), а символом $\perp$ обозначается нормальная составляющая вектора относительно подмногообразия W. Эта составляющая одинаковая как в метрике g^0, так и в метрике g. Таким образом, чтобы убедиться в том, что W — это внешняя сфера, необходимо проверить два равенства для ковариантной производной нормальной связности:

$$D_V H_W = 0, \quad D_{X_i} H_W = 0, \quad \text{где} \quad V = \frac{\partial}{\partial v},\ X_i = \frac{\partial}{\partial \nu} x^i, \quad i = 1,\dots,q-1. \tag{1.3}$$

Обозначим через $\widetilde{H}_W$ координатное представление вектора средней кривизны H_W относительно введенных выше координат. Так как $\nu_* \operatorname{gr}^0 f = -e^f \operatorname{gr}^M \psi$, для векторного поля $\widetilde{H}_W$ имеется следующее выражение:

$$\widetilde{H}_W = \frac{c}{2} e^{-f}(0,0,\dots,0,x^q,\dots,x^{n-1}).$$

Воспользуемся равенством (3.6) из [6], которое в наших обозначениях принимает вид $D_X = D_X^0 + df(X)\,\mathrm{Id}$ (здесь $X \in TW$, а Id — это тождественный оператор), и приведенным выше координатным представлением вектора средней кривизны. Тогда проверка равенств (1.3) сводится к проверке следующих двух очевидных равенств ($i = 1, \dots, q-1$):

$$\frac{\partial \widetilde{H}_W}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}\widetilde{H}_W = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{H}_W}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\widetilde{H}_W = 0.$$

Возьмем произвольное подпространство Q в T_pN размерности l, причем $0 < l < s < n$. Рассмотрим его проекцию $E = \nu_* Q$ в T_yM, где $y = \nu(p)$, при этом $\dim E \le l$. Учитывая неравенства между l и s, подпространство E всегда можно расширить до $(s-1)$-мерного подпространства F, т. е. $E \subset F \subset T_yM$. Так как M является плоским $(n-1)$-мерным римановым пространством, существует вполне геодезическое подмногообразие S, касательное пространство которого в точке $y = (y^1, \dots, y^{n-1})$ совпадет с подпространством F. Выше показано, что подмногообразие $W = \nu^{-1}(S)$ является внешней сферой. А так как согласно построению подмногообразия W выполняется включение $Q \subset T_pW$, в итоге получаем, что риманово пространство N удовлетворяет аксиоме (l,s)-сфер. Важно отметить, что в построенном примере внешние сферы, существование которых постулируется аксиомой (l,s)-сфер, как видно из формулы (1.2), вообще говоря, не являются вполне геодезическими подмногообразиями.

§ 2. Векторы, замкнутые относительно преобразования кривизны

Этот раздел носит технический характер. Примем следующие соглашения. Если Ψ и Φ — два подпространства в одном касательном пространстве, то равенство $k(\Psi \wedge \Phi) = \varkappa$ означает, что значения секционных кривизн $k(X \wedge U)$ равны одному и тому же числу $\varkappa$ независимо от выбора векторов X из Ψ и U из Φ. То же соглашение о независимости значений будет действовать и в тензорных выражениях, где вместо векторов стоят подпространства, т. е. выражение $R(\Psi,\Phi)\Psi \subset \Phi$ следует понимать так, что $R(X,U)Y \in \Phi$ для любых $X, Y \in \Psi$, $U \in \Phi$. Через $L(X_1, \dots, X_m)$ будет обозначаться линейная оболочка системы векторов $X_1, \dots, X_m$.

Определение 2.1 [7]. Для произвольного тензора R, обладающего теми же алгебраическими свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия, назовем вектор X *R-замкнутым*, если равенство $R(U,V)X = 0$ выполняется для любых векторов U, V, ортогональных вектору X.

Лемма 2.1 [7]. *Если X и Y — неортогональные R-замкнутые векторы из одного касательного пространства, то каждый вектор из линейной оболочки $L = L(X,Y)$ является R-замкнутым и для любых единичных векторов Z и W из L и для любого вектора U из ортогонального дополнения $L^\perp$ выполняется равенство $R(U,Z)Z = R(U,W)W$.*

Лемма 2.2. *Пусть подпространство $S \subset T_xM$ состоит из R-замкнутых векторов, а R-замкнутый вектор X неортогонален подпространству S. Тогда подпространство $P = S + L(X)$ состоит из R-замкнутых векторов и выполняется равенство $R(U,Z)Z = R(U,W)W$ для любых единичных $Z, W \in P$ и любого $U \in L^\perp(Z,W)$.*

Доказательство. Если $X \in S$, то доказываемая лемма следует из предыдущей леммы. Предположим теперь, что $X \notin S$. Применяя лемму 2.1 к вектору X и его ортогональной проекции Y на подпространство S, приходим к заключению, что плоскость $L(X, Y)$, натянутая на векторы X и Y, состоит из R-замкнутых векторов. Для пространства P имеется разложение в прямую ортогональную сумму

$$P = S^{\perp} \overset{\perp}{\oplus} L(Y) \overset{\perp}{\oplus} L^{\perp}(X, Y), \tag{2.1}$$

где ортогональные дополнения берутся в пространстве P. Пусть Z — произвольный вектор из P. Тогда имеется единственное разложение вектора $Z = N + Q + K$ в сумму векторов, соответствующую прямой сумме подпространств (2.1). Рассмотрим два случая.

Случай 1. $Q \neq 0$. Определим векторы

$$Y_1 = N + \frac{1}{2}Q, \quad Y_2 = \frac{1}{2}Q + K.$$

Вектор Y_1 является R-замкнутым, так как по доказанному выше принадлежит плоскости $L(X, Y)$, состоящей из R-замкнутых векторов. Вектор же Y_2 является R-замкнутым по условию, так как он принадлежит подпространству S. По построению векторы Y_1 и Y_2 неортогональные. Применяя к паре векторов Y_1, Y_2 лемму 2.1, получаем, что вектор Z, как и все векторы из линейной оболочки $L(Y_1, Y_2)$, является R-замкнутым вектором.

Случай 2. $Q = 0$. В этом случае достаточно положить

$$Y_1 = N + Q', \quad Y_2 = -Q' + K,$$

где Q' — некоторый ненулевой вектор из пересечения $L(X, Y) \cap S$, и применить все рассуждения из предыдущего случая.

Равенство леммы следует из леммы 2.1, которая применяется к произвольной плоскости $L(Z, W)$, натянутой на единичные векторы Z, W и состоящей по доказанному выше из R-замкнутых векторов. $\square$

Пусть ϱ — оператор кривизны, определяемый традиционным образом с помощью равенства $\langle \varrho(X \wedge Y), W \wedge Z\rangle = \langle R(X, Y)Z, W\rangle$.

Теорема 2.1. *Пусть Ψ — некоторое подпространство касательного пространства T_xM^n риманова многообразия* ($\dim \Psi = n - m > 1$). *Следующие условия эквивалентны:*

(а) *подпространство Ψ состоит из R-замкнутых векторов;*

(б) *имеется разложение в прямую ортогональную сумму подпространств* ($\dim \Phi_\alpha = 1\ \forall \alpha = 1, \dots m$)*:*

$$T_xM = \Psi \oplus \Phi, \quad \Phi = \Phi_1 \oplus \dots \oplus \Phi_m, \tag{2.2}$$

причем для указанного разложения

$$k(\Psi \wedge \Psi) = k, \quad k(\Psi \wedge \Phi_\alpha) = \varkappa_\alpha, \tag{2.3}$$

$$R(\Psi, \Psi)\Phi_\alpha = 0, \quad R(\Phi_\alpha, \Phi_\beta)\Psi = 0, \quad R(\Phi_\alpha, \Psi)\Psi \subset \Phi_\alpha; \tag{2.4}$$

(в) *существует разложение касательного пространства в прямую ортогональную сумму подпространств* (2.2), *и если $X \in \Psi$, а A, B — произвольные векторы, то*

$$R(X, A)B = \langle B, JA\rangle X - \langle B, X\rangle JA, \tag{2.5}$$

$$JA := \sum_\alpha \varkappa_\alpha \Pr_\alpha A + k \operatorname{ort} A, \tag{2.6}$$

причем определенный выше (1,1)*-тензор* J *является симметрическим, а* Pr_α *и* ort *суть операторы проектирования на* Φ_α *и* Ψ *соответственно;*

(г) *существует разложение касательного пространства в прямую ортогональную сумму подпространств* (2.2), *и пространство бивекторов разлагается в прямую ортогональную сумму подпространств:*

$$\Lambda^2_x M = \Lambda^2\Psi \overset{\perp}{\oplus} \Lambda_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \Lambda_m \overset{\perp}{\oplus} \Lambda^2\Phi,$$

где $\Lambda^2\Psi = \Psi \wedge \Psi$, $\Lambda_\alpha = \Psi \wedge \Phi_\alpha$, $\Lambda^2\Phi = \Phi \wedge \Phi$ (*здесь* $\Phi = \Phi_1 + \cdots + \Phi_m$), *среди которых* $\Lambda^2\Psi$ *и* Λ_α — *это подпространства, состоящие из собственных векторов для оператора кривизны* ϱ, *отвечающие собственным значениям* k *и* $\varkappa_\alpha$ *соответственно.*

Доказательство. Сначала докажем импликацию (б)⇒(в). Пусть для тензора кривизны риманова многообразия выполнены условия (2.2)–(2.4). Тогда из первого равенства в (2.4) и I-го тождества Бьянки следует, что $R(U_\alpha, X)Y = R(U_\alpha, Y)X$ для любых векторов X, Y из Ψ и единичного вектора U_α из Φ_α. Отсюда вытекает, что билинейный функционал $\langle R(U_\alpha, X)Y, U_\alpha\rangle$ является симметрическим относительно X и Y. По второму равенству (2.3) квадратичная форма, им порожденная, принимает на единичной сфере в Ψ постоянное значение $\varkappa_\alpha$. Поэтому из последнего включения в (2.4) получаем, что

$$R(U_\alpha, X)Y = \varkappa_\alpha \langle X, Y\rangle U_\alpha. \tag{2.7}$$

Выберем теперь базис из единичных взаимно ортогональных векторов U_α и X_i таким образом, чтобы $U_\alpha \in \Phi_\alpha$, а $X_i \in \Psi$. Проделаем следующие вычисления:

$$\langle R(X, A)B, C\rangle = \sum_\alpha \langle A, U_\alpha\rangle \langle R(X, U_\alpha)B, C\rangle + \sum_i \langle A, X_i\rangle \langle R(X, X_i)B, C\rangle. \tag{2.8}$$

Для преобразования первой суммы в равенстве (2.8) на основании свойств из (2.4) и равенства (2.7) получим такое выражение:

$$\begin{aligned}\langle R(X, U_\alpha)B, C\rangle &= \sum_\beta \langle B, U_\beta\rangle \langle R(X, U_\alpha)U_\beta, C\rangle \\ &\quad + \langle R(X, U_\alpha)\,\mathrm{ort}\,B, C\rangle = \varkappa_\alpha(\langle B, U_\alpha\rangle\langle X, C\rangle - \langle B, X\rangle\langle U_\alpha, C\rangle),\end{aligned}$$

а для преобразования второй суммы в (2.8) на основании первого равенства из (2.4) и первого равенства из (2.3) — следующее выражение:

$$\langle R(X, X_i)B, C\rangle = k(\langle B, X_i\rangle\langle X, C\rangle - \langle B, X\rangle\langle X_i, C\rangle).$$

Подставляя полученные выражения в формулу (2.8) и используя определение тензора J, имеем

$$\begin{aligned}\langle R(X, A)B, C\rangle &= \sum_\alpha \varkappa_\alpha \langle A, U_\alpha\rangle(\langle B, U_\alpha\rangle\langle X, C\rangle - \langle B, X\rangle\langle U_\alpha, C\rangle) \\ &\quad + k\sum_i \langle A, X_i\rangle(\langle B, X_i\rangle\langle X, C\rangle - \langle B, X\rangle\langle X_i, C\rangle) \\ &= \langle B, JA\rangle\langle X, C\rangle - \langle B, X\rangle\langle JA, C\rangle.\end{aligned}$$

Таким образом, импликация (б)⇒(в) доказана.

Докажем импликацию (в)⇒(б). Если тензор кривизны удовлетворяет равенству (2.5), то непосредственной проверкой, использующей формулы $JX =$

kX, $JU_\alpha = \varkappa_\alpha U_\alpha$ для $X \in \Psi$, $U_\alpha \in \Phi_\alpha$, легко проверить справедливость равенств (2.3), (2.4). В итоге доказана эквивалентность пп. (б) и (в).

Покажем, что п. (в) влечет п. (а). Из п. (в) следует, что

$$\langle R(B,C)X, A\rangle = \langle R(X,A)B, C\rangle = \langle B, JA\rangle\langle X, C\rangle - \langle B, X\rangle\langle JA, C\rangle = 0,$$

если $X \perp B, C$, т. е. (в)$\Rightarrow$(а).

Докажем импликацию (а)$\Rightarrow$(б). Покажем сначала, что секционные кривизны вдоль двумерных плоскостей из Ψ не зависят от выбора этих плоскостей. Случай $\dim\Psi = 2$ тривиален. Пусть размерность Ψ больше 2. Тогда в каждой из любых двух плоскостей из Ψ можно выбрать по вектору X, Z, которые будут взаимно ортогональными и единичными. Пусть дополнительные им орты в соответствующих плоскостях суть Y и W соответственно. Рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} k(X\wedge Y) = \langle R(X,Y)Y, X\rangle &= \langle R(X,Z)Z, X\rangle \\ &= \langle R(Z,X)X, Z\rangle = \langle R(Z,W)W, Z\rangle = k(Z\wedge W). \end{aligned}$$

Так как по построению $X \perp Y, Z$, второе равенство получено на основании равенства леммы 2.2. Третье равенство следует из алгебраических свойств тензора кривизны. Четвертое равенство также сводится к равенству указанной леммы, ибо по построению $Z \perp X, W$. Обозначим через $k := k(X\wedge Y)$ постоянную секционной кривизны вдоль двумерных плоскостей из Ψ.

Оператор $R(\cdot, X)X$, как следует из алгебраических свойств тензора кривизны, является самосопряженным в касательном пространстве риманова многообразия. Возьмем произвольные единичные векторы X, Z из построенного подпространства Ψ. Согласно лемме 2.2 сужения на $\Psi^\perp$ операторов $R(\cdot, X)X$ и $R(\cdot, Z)Z$ совпадают. В частности, они имеют общие собственные векторы U_α, отвечающие общим собственным значениям $\varkappa_\alpha$. Определим прямые в касательном пространстве $\Phi_\alpha := L(U_\alpha)$. Покажем, что секционная кривизна $k(U_\alpha \wedge X)$ не зависит от выбора вектора X из подпространства Ψ. Пусть X, Z — произвольные единичные векторы из Ψ. Тогда

$$k(U_\alpha\wedge Y) = \langle R(U_\alpha, Y)Y, U_\alpha\rangle = \langle R(U_\alpha, Z)Z, U_\alpha\rangle = \varkappa_\alpha = k(U_\alpha\wedge Z).$$

Равенства (2.3) доказаны.

По условию п. (а) все векторы из Ψ R-замкнуты. Отсюда сразу вытекает справедливость второго равенства из (2.4). Первое равенство из (2.4) следует из 1-го тождества Бьянки и R-замкнутости ортогональных векторов X, Y из Ψ. Действительно,

$$R(X,Y)U = R(U,Y)X + R(X,U)Y = 0.$$

Последнее включение в (2.4) получаем из того, что для любых единичных векторов X, Y из Ψ справедливо равенство

$$R(U,X)Y = R(U,X)(Y - \langle Y, X\rangle X) + \langle Y, X\rangle R(U,X)X.$$

Воспользовавшись снова R-замкнутостью векторов из Ψ, можно заключить, что первое слагаемое в последнем равенстве равно нулю и его можно переписать в следующем виде:

$$R(U,X)Y = \langle X, Y\rangle R(U,X)X.$$

Согласно построению подпространства Φ_α являются собственными подпространствами одновременно для всех операторов вида $R(\cdot, X)X$, где X — любой орт из Ψ. Этим доказывается и последнее включение из (2.4). Импликация (а)$\Rightarrow$(б) полностью доказана, и тем самым установлена эквивалентность пп. (а)–(в).

Пусть выполнены условия п. (в) и X, Y — произвольные векторы из подпространства Ψ. Так как оператор кривизны самосопряженный в пространстве бивекторов, для доказательства импликации (в)$\Rightarrow$(г) достаточно убедиться в том, что бивекторы $X \wedge Y$ и $X \wedge U_\alpha$ являются собственными для оператора кривизны и отвечают собственным значениям k и $\varkappa_\alpha$ соответственно. Это следует из формулы (2.5) и того, что векторы X, Y и U_α, как видно из вышеприведенных формул, суть собственные векторы симметрического тензора J и отвечают собственным значениям k и $\varkappa_\alpha$ соответственно. Импликация (г)$\Rightarrow$(б) очевидна из спектральных свойств самосопряженного оператора ϱ, поэтому с учетом предыдущих эквивалентностей теорема полностью доказана. $\square$

§ 3. Кривизна пространств с аксиомой гиперсфер

Ограничимся рассмотрением аксиом (l, s)-сфер с максимальным s, т. е. когда в римановом пространстве N через всякое l-мерное подпространство касательного пространства проходит гиперсфера. Для краткости такую аксиому будем называть аксиомой *l-гиперсфер*.

Лемма 3.1. *Нормаль к гиперсфере является R-замкнутым вектором.*

Доказательство. Пусть X, Y, Z — произвольные касательные к гиперсфере векторы, а ξ — нормальный вектор. Воспользуемся уравнением Кодацци

$$R(X, Y; Z, \xi) = \langle D_Y H, \xi\rangle\langle X, Z\rangle - \langle D_X H, \xi\rangle\langle Y, Z\rangle$$

для вполне омбилического подмногообразия с вектором средней кривизны H. Из приведенного уравнения и алгебраических свойств тензора кривизны следует, что $R(X, Y)\xi = 0$. $\square$

Лемма 3.2. *Если вторая основная форма подмногообразия обращается в нуль на взаимно ортогональных векторах, то подмногообразие является вполне омбилическим.*

Доказательство. Обозначим вторую основную форму подмногообразия через α. Для любых взаимно ортогональных касательных к подмногообразию векторов X и Y справедливы равенства

$$g(A_\xi X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \xi\rangle = 0.$$

Поэтому для любой нормали ξ оператор Вейнгартена A_ξ — гомотетия. Остается воспользоваться следующим вполне очевидным утверждением. Подмногообразие является вполне омбилическим тогда и только тогда, когда все его операторы Вейнгартена A_ξ суть гомотетии. При этом коэффициент гомотетии будет скалярным произведением вектора нормали на вектор средней кривизны. $\square$

Под пересечением подмногообразий понимаются лишь такие пересечения, которые также являются, по крайней мере локально, подмногообразиями (ненулевой размерности). Пересечение пары трансверсальных подмногообразий всегда будет подмногообразием.

Лемма 3.3. *Пересечение вполне омбилических подмногообразий является вполне омбилическим подмногообразием.*

Доказательство. Пусть W_t $(t = 1, 2)$ — это вполне омбилические подмногообразия, а $W = W_1 \cap W_2$ — их пересечение. Через ∇, ∇^t обозначим ковариантные производные для объемлющего риманова пространства и подмногообразий

W_t соответственно. Для произвольных касательных взаимно ортогональных векторов $X, Y \in TW$ из первой формулы Гаусса — Вейнгартена для каждого из подмногообразий W_t получаем следующие условия принадлежности:

$$\nabla_X Y = \nabla^1_X Y \in TW_1, \quad \nabla_X Y = \nabla^2_X Y \in TW_2.$$

Рассматривая их совместно, приходим к заключению, что $\nabla_X Y \in TW$. Последнее означает, что вторая основная форма для W на взаимно ортогональных векторах обращается в нуль. Применяя лемму 3.2, приходим к заключению, что W является вполне омбилическим подмногообразием. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть подпространство Ψ касательного пространства T_pM риманова многообразия M^n состоит из R-замкнутых векторов, и пусть существует такой набор вполне омбилических гиперподмногообразий $W_1, \dots, W_{n-m}$, что нормали к ним образуют базис в подпространстве Ψ. Тогда имеется разложение* (2.2), *для которого выполнены свойства* (2.3), (2.4), *кроме того, справедливо равенство*

$$\nabla_{\Phi_\alpha} R(\Psi, \Psi)\Phi_\beta = 0 \quad (\forall \alpha, \beta : \alpha \neq \beta). \tag{3.1}$$

Доказательство. По модулю эквивилентности пп. (а) и (б) теоремы 2.1 в доказательстве нуждается лишь равенство (3.1). Обозначим нормаль к гиперподмногообразию W_i через X_i. Если вектор средней кривизны H_i для гиперподмногообразия W_i отличен от нуля, то в качестве такой нормали всегда будет выбираться орт вектора средней кривизны $X_i = H_i/\|H_i\|$. Произвольный вектор $U_\alpha|_p \in \Phi_\alpha$ гладко продолжим до некоторого произвольного векторного поля U_α, касательного к пересечению гиперподмногообразий $W = W_1 \cap \dots \cap W_m$. Так же построим и векторное поле U_β $(\beta \neq \alpha)$ из произвольного вектора $U_\beta|_p$. Из вполне омбиличности каждого гиперподмногообразия W_i следует, что формула Гаусса — Вейнгартена принимает такой вид:

$$(\nabla_{U_\alpha} X_i) = -\|H_i\| U. \tag{3.2}$$

Поэтому, применяя эквивалентность пп. (а) и (в) теоремы 2.1 и лемму 3.3, проделаем следующие вычисления:

$$\begin{aligned}(\nabla_{U_\alpha} R)(X_i, X_j)U_\beta = \nabla_{U_\alpha}(R(X_i, X_j)U_\beta) - R(\nabla_{U_\alpha} X_i, X_j)U_\beta \\ - R(X_i, \nabla_{U_\alpha} X_j)U_\beta - R(X_i, X_j)\nabla_{U_\alpha} U_\beta = \|H_i\| R(U_\alpha, X_j)U_\beta \\ + \|H_j\| R(X_i, U_\alpha)U_\beta - R(X_i, X_j)\nabla_{U_\alpha} U_\beta = 0.\end{aligned}$$

Так как векторы X_i по условию образуют базис в пространстве Ψ, из алгебраических свойств тензора кривизны следует заключение леммы. $\square$

Следующая теорема характеризует кривизну римановых пространств с аксиомой гиперсфер почти так же, как теорема 1 из [8]. Отличие содержится в формуле (3.6). В [8] допускалось, что $\alpha = \beta$.

Теорема 3.1. *Если риманово многообразие M удовлетворяет аксиоме l-гиперсфер, то в каждой точке x из M имеется прямое ортогональное разложение*

$$T_xM = \Psi \overset{\perp}{\oplus} \Phi, \quad \Phi = \Phi_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} \Phi_m, \tag{3.3}$$

$$k(\Psi \wedge \Psi) = k, \quad k(\Psi \wedge \Phi_\alpha) = \varkappa_\alpha, \tag{3.4}$$

$$R(\Psi, \Psi)\Phi_\alpha = 0, \quad R(\Phi_\alpha, \Phi_\beta)\Psi = 0, \quad R(\Phi_\alpha, \Psi)\Psi \subset \Phi_\alpha, \tag{3.5}$$

$$\nabla_{\Phi_\alpha} R(\Psi, \Psi)\Phi_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \tag{3.6}$$

где $\dim \Psi > l$, $\dim \Phi_\alpha = 1$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, m)$.

Доказательство. Выполнение аксиомы l-гиперсфер обеспечивает существование в каждой точке x из M некоторого набора взаимно ортогональных гиперсфер W_i $(i = 1, \dots, s > l)$. То, что таких гиперсфер больше чем l, обусловленно следующим способом их построения. Проведем гиперсферу W_1, касающуюся некоторого произвольного l-мерного подпространства P_1. Выберем теперь $(l-1)$-мерное подпространство $S_2 \subset T_x W_1$. Тогда по аксиоме l-гиперсфер для l-мерного подпространства $P_2 := S_2 + T_x^\perp W_1$ существует гиперсфера W_2, касающаяся P_2, а следовательно, ортогональная W_1. Этот процесс можно продолжить, если построено k штук взаимно ортогональных гиперсфер, причем $k \le l$. Тогда можно выбирать произвольное $(l-k)$-мерное подпространство S_{k+1} так, что

$$S_{k+1} \subset T_x W_1 \cap \dots \cap T_x W_k.$$

Выбор такого подпространства всегда возможен, ибо $l < n$, а размерность приведенного выше пересечения гиперсфер равна $n - k$. Теперь построим l-мерное подпространство

$$P_{k+1} := S_{k+1} + T_x^\perp W_1 + \dots + T_x^\perp W_k$$

и проведем касающуюся его гиперсферу W_{k+1}. Таким образом, показано, что действительно $s > l$. Будем считать набор взаимно ортогональных гиперсфер W_i $(i = 1, \dots, s)$ в точке x максимальным. Пусть X_i — единичная нормаль к гиперсфере W_i в точке x. Так как $s > l$, существует ненулевое подпространство Q, натянутое на векторы $V_1, \dots, V_{s-l}$ из линейной оболочки $L = L(X_1, \dots, X_s)$ такого положения, что для всевозможных наборов $i_1, \dots, i_{s-l}$ выполняется условие

$$\langle V_1 \wedge \dots \wedge V_{s-l}, X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_{s-l}} \rangle \ne 0. \tag{3.7}$$

Формальное доказательство существования такого подпространства Q следует из того, что объединение конечного числа нигде не плотных множеств является нигде не плотным множеством, так как если в формуле (3.7), заменив знак неравенства знаком равенства, рассмотреть множество решений полученного уравнения при фиксированном наборе $i_1, \dots, i_{s-l}$, то оно, очевидно, будет нигде не плотным. На самом деле искомые подпространства расположены всюду плотно в грассмановом многообразии $G(s-l, s)$ $(s-l)$-мерных подпространств в s-мерном пространстве L. С геометрической точки зрения подпространство Q характеризуется тем, что в Q не содержится ненулевых векторов, ортогональных одновременно хотя бы одному набору из $s - l$ векторов X_i. Это следует из определения продолжения римановой метрики на поливекторы, которое приводит к следующей формуле:

$$\langle V_1 \wedge \dots \wedge V_{s-l}, Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{s-l} \rangle = \det(\langle V_i, Y_j \rangle) \quad (1 \le i, j \le s - l).$$

В частности, Q не содержит ни одного вектора X_i. Подпространство $Q + L^\perp$ имеет размерность $n - l$. По аксиоме l-гиперсфер существует гиперсфера такая, что ортогональный ей вектор Z лежит в подпространстве $Q + L^\perp$. В разложении вектора (здесь $i = 1, \dots, s$)

$$Z = V + a^i X_i,$$

где вектор V принадлежит $L^\perp$, не все a^i равны нулю, так как по предположению набор взаимно ортогональных гиперсфер максимальный. Из формулы (3.7) следует, что в разложении вектора Z присутствует не менее $l + 1$ коэффициентов a^j, отличных от нуля, ибо в противном случае проекция вектора Z

на L, принадлежащая Q, была бы ортогональна одновременно набору из $s-l$ векторов, что противоречит построению Q. Не ограничивая общности, можно считать, что $j=1,\dots,l+1$.

Положим $\Psi := L(X_1,\dots,X_{l+1},Z)$. Тогда $\dim\Psi > l$, причем $\langle Z, X_i\rangle \neq 0$ для любого X_i из Ψ, так что векторы Z, X_i неколлинеарны. Так как каждый из векторов $X_1,\dots,X_{l+1},Z$ служит ортогональным вектором к гиперсфере, то все эти векторы, как обсуждалось ранее, R-замкнуты. Применяя лемму 2.1 к паре векторов Z, X_1 и лемму 2.2 последовательно к подпространству $L(Z,X_1,\dots,X_j)$ и вектору X_{j+1} для индекса j, меняющегося от 1 до l, получим, что все векторы из подпространства Ψ R-замкнуты. Теперь свойства (3.3)–(3.5) заключения теоремы следуют из эквивалентности пп. (а) и (б) теоремы 2.1.

Из построения подпространства Ψ вытекает, что в подпространстве Ψ можно выбрать базис из нормалей к гиперсферам. Действительно, в качестве такого базиса можно взять максимальную линейно независимую подсистему в системе векторов $X_1,\dots,X_{l+1},Z$. Теперь свойство (3.6) заключения теоремы следует из леммы 3.4. $\square$

В заключение автор выражает благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний, которые способствовали улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van Lindt D., Verstraelen L.* A survey on axioms of submanifolds in Riemannian and Kaehlerian geometry // Colloq. Math. 1987. V. 54, N 2. P. 193–213.
2. *Leung D. S., Nomizu K.* The axiom of spheres in Riemannian geometry // J. Differential Geom. 1971. V. 5. P. 487–489.
3. *Окрут С. И.* Обобщенная аксиома плоскостей // Докл. РАН. 1998. Т. 360, № 4. С. 454–456.
4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1.
5. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 2.
6. *Chen B. Y.* Geometry of submanifolds and its applications. Tokio: Sci. Univ. Tokio, 1981.
7. *Окрут С. И.* Римановы многообразия с обобщенной аксиомой плоскостей // Укр. геометр. сб. 1992. Т. 35. С. 103–110.
8. *Окрут С. И.* Структура кривизны риманова многообразия с аксиомой гиперплоскостей // Мат. физика, анализ, геометрия. 1994. Т. 1, № 2. С. 227–231.

Статья поступила 5 июня 2000 г., окончательный вариант — 2 октября 2000 г.

Окрут Сергей Иванович
Харьковский национальный университет, механико-математический факультет, кафедра высшей математики и информатики, пл. Свободы, 4, Харьков 61077, Украина