Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 517.958

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГРАНИЧНЫХ РАВНОВЕСИЙ В СИСТЕМАХ С КОСИММЕТРИЕЙ

Л. Г. Куракин

Аннотация: Прямым методом Ляпунова исследуется устойчивость равновесия косимметричного векторного поля в случае, когда спектр устойчивости лежит в замыкании левой полуплоскости, а нейтральный спектр (лежащий на мнимой оси) состоит из простых собственных значений нуль и пары чисто мнимых. Из-за косимметрии оно является членом непрерывного однопараметрического семейства равновесий с переменным спектром устойчивости. Используются теоремы об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных. Критерии устойчивости найдены в случае общего положения, а также для всех вырождений коразмерности один и одного случая коразмерности два. В результате получилось описание опасных и безопасных границ устойчивости. Библиогр. 22.

Согласно общему определению [1, 2] косимметрией векторного поля называется аннулирующая его в каждой точке дифференциальная 1-форма. Если задана риманова или евклидова метрика, то можно отождествить косимметрию с векторным полем. Поскольку в работе все рассмотрения носят локальный характер, ограничимся дифференциальными уравнениями на евклидовом пространстве.

Равновесие косимметрично, если оно общее для векторного поля и его косимметрии. Непрерывное однопараметрическое семейство некосимметричных равновесий встречается в условиях общего положения в динамических системах с косимметрией [1–5]. В невырожденном случае спектр устойчивости меняется вдоль такого семейства [2], но из-за неизолированности равновесий обязательно содержит точку нуль. Равновесие семейства устойчиво, если весь его спектр устойчивости, кроме простого нулевого собственного значения, лежит внутри левой полуплоскости [6]. Равновесия, чья устойчивость определяется линейным приближением, образуют открытые устойчивые и неустойчивые дуги. Они разделены в семействе граничными равновесиями, устойчивость которых зависит от нелинейностей.

Непрерывные однопараметрические семейства равновесий встречаются также в системах с непрерывной группой симметрии как орбиты ее однопараметрических подгрупп. Однако спектр устойчивости вдоль них сохраняется.

Перемещаясь вдоль семейства некосимметричных равновесий, при переходе с устойчивой дуги на неустойчивую будем наблюдать как бы потерю устойчивости равновесием, точнее, изменение устойчивости, связанное с изменением параметра — дуги кривой равновесий. Она может быть жесткой или мягкой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00–15–96188, 01–01–22002) и Межвузовской программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (код проекта 4087).

(опасной или безопасной), как и в случае изолированного равновесия системы с параметром (см., например [7, 8] и имеющиеся там ссылки). Не приводя строгих определений, заметим, что мягкой (жесткой) она является, если соответствующее граничное равновесие устойчиво (неустойчиво). Уже это показывает, что полезно знать, устойчиво граничное равновесие или нет.

Наличие в системе с косимметрией граничного равновесия является случаем общего положения. Будем говорить, что некоторая ситуация (вырождение) *имеет коразмерность* 1, если она встречается неустранимым образом (сохраняется при малых гладких косимметричных возмущениях) в однопараметрических семействах косимметричных векторных полей.

В данной работе исследуется устойчивость граничного равновесия в случае, когда нейтральный спектр (лежащий на мнимой оси) состоит из собственных значений нуль и пары чисто мнимых, причем все они просты. Используются теоремы об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных [9, 10]. Критерии устойчивости получены в случае общего положения, а также для всех вырождений коразмерности один и одного случая коразмерности два. Интерес к разобранным нелинейным вырождениям вызван тем, что каждое из них — необходимое условие одной из двух основных локальных бифуркаций или их пересечения в системах с параметром и косимметрией [11–15]: рождения цикла; появления неустойчивой дуги на устойчивом первоначально семействе равновесий.

Применяется прямой метод Ляпунова. Построенные в работе функции Ляпунова полиномиальны во всех случаях, кроме одного, когда построена трансцендентная (и к тому же многозначная) функция Ляпунова и доказано, что полиномиальных не существует.

Отметим, что для изолированного равновесия критический случай устойчивости совместных простых собственных значений нуль и пары чисто мнимых изучался в работах [8, 16–18]. Часть полученных в них общих теорем о достаточных условиях неустойчивости применима и для систем с косимметрией (см. § 5). Ситуация, когда неизолированное равновесие может быть устойчивым по Ляпунову, осталась нерассмотренной в этих работах, как и часть других случаев, названных существенно особенными [16], для которых задача устойчивости не решается привлечением конечного числа слагаемых ряда Тейлора исходной системы.

Часть результатов данной работы анонсирована в статье [19], где исследована устойчивость граничных равновесий и в ряде других критических случаев.

Статья состоит из пяти параграфов. Первый носит вводный характер. В § 2 применяется принцип сведения [20, 21], понижающий размерность исходной системы до трех. Доказывается, что полученную систему можно рассматривать просто как систему, имеющую однопараметрическое семейство равновесий, для которой выполнены определенные условия гладкости и невырожденности. В § 3 дается формулировка основной теоремы, условия устойчивости которой обосновываются в § 4, а неустойчивости — в § 5.

§ 1. Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим дифференциальное уравнение в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{u} = F(u), \quad u \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Отображение $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ является аналитическим в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и допускает непрерывную косимметрию $L : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Последнее означает [1, 2] что в каждой точке $u \in \Omega$ векторы $F(u)$ и $L(u)$ ортогональны:

$$(F(u), L(u)) = 0. \tag{1.2}$$

Предполагается, что

(A1) уравнение (1.1) имеет некосимметричное равновесие $u_0 \in \Omega : F(u_0) = 0,\ L(u_0) \neq 0$.

Заметим, что линейный функционал $L(u_0)$, который отождествляется с вектором в соответствии с каноническим изоморфизмом Рисса, принадлежит ядру оператора A^*, сопряженного к производной $A = F'(u_0)$. Для гладкой косимметрии это следует из равенства [1–5]

$$F'^*(u)L(u) + L'^*(u)F(u) = 0, \tag{1.3}$$

полученного дифференцированием тождества (1.2). Действительно, равенство (1.3) при $u = u_0$ принимает вид $A^*L(u_0) = 0$. Таким образом, точка нуль принадлежит спектрам $\sigma(A)$ и $\sigma(A^*)$ операторов A и A^*.

Рассмотрим случай, когда

(A2) нулевое собственное значение матрицы A является простым.

Введем обозначения: $X_0 = \ker A$ — ядро оператора A, X_1 — ортогональное дополнение к X_0, $\Omega_1 \subset \Omega$ — некоторая окрестность точки u_0, а $J = X_0 \cap \Omega_1$ — отрезок прямой X_0.

Роль предположений (A1), (A2) состоит в том, что рассматривается система общего положения в классе динамических систем с косимметрией. К таким системам применима косимметрическая версия теоремы о неявной функции [1–5]. Из нее следует, что равновесие u_0 содержится в однопараметрическом семействе некосимметричных равновесий S, параметризуемое аналитическим отображением

$$T : J \to \Omega, \quad V : s \mapsto s + T_1(s),$$

где $T_1 : J \to X_1$ — аналитическое отображение, которое обращается в 0 в точке u_0 вместе со своей производной: $T_1(u_0) = 0$, $T_1'(u_0) = 0$.

Для всех $s \in J$ выполнены условия: $F(T(s)) = 0$, $L(T(s)) \neq 0$; спектр $\sigma(A_s)$ матрицы линеаризации $A_s = F'(T(s))$ содержит простое нулевое собственное значение. Заметим, что $A = A_s$, когда $s = u_0$. В окрестности Ω_1 нет равновесий, не принадлежащих указанному семейству.

Спектр $\sigma(A_s)$, вообще говоря, зависит от параметра s [2]. Его сохранение вдоль семейства S — вырождение бесконечной коразмерности.

Справедлив принцип линеаризации [6]: равновесие $T(s)$ семейства S устойчиво, если весь его спектр устойчивости $\sigma(A_s)$, кроме простого нулевого собственного значения, лежит строго в левой полуплоскости (см. [6, § 31, 32]), и неустойчиво, когда этот спектр содержит точку из правой полуплоскости. Устойчивость равновесия здесь и далее понимается как нейтральная устойчивость вдоль семейства равновесий и одновременно асимптотическая устойчивость в трансверсальных к нему направлениях. Неустойчивость же, как это обычно и принято, означает неустойчивость по Ляпунову.

Даже в условиях общего положения равновесия, к которым применим принцип линеаризации (т. е. такие, чья устойчивость определяется линейным приближением), образуют в семействе S несколько открытых дуг, разделенных граничными равновесиями. Спектр устойчивости граничного равновесия расположен в замыкании левой полуплоскости, а его пересечение с мнимой осью непусто и отлично от простого нулевого собственного значения. В задаче устойчивости такого равновесия имеет место критический случай, т. е. линейного приближения недостаточно для ее решения.

Сделаем еще одно предположение.

(А3) Спектр $\sigma(A)$ представляет собой объединение непересекающихся спектральных множеств $\sigma_0(A)$ и $\sigma_-(A)$, причем $\sigma_0(A)$ — нейтральный спектр, лежащий на мнимой оси, а $\sigma_-(A)$ — устойчивый спектр, расположенный внутри левой полуплоскости. Нейтральный спектр состоит из простой пары чисто мнимых собственных значений и обязательной точки нуль: $\sigma_0(A) = \{0, \pm i\omega_0\}$, $\omega_0 > 0$.

Таким образом, из предположений (А1)–(А3) следует существование однопараметрического аналитического семейства S равновесий уравнения (1.1), для которого u_0 — граничное равновесие ($u_0 \in S$) с нейтральным спектром $\sigma_0(A) = \{0, \pm i\omega_0\}$. Далее исследуется устойчивость равновесия u_0. Рассматриваемый критический случай устойчивости встречается в условиях общего положения в системах с косимметрией.

§ 2. Уравнение на центральном многообразии. Влияние косимметрии на его ряд Тейлора

Пусть φ_0, φ — собственные векторы оператора A, а Φ_0, Φ — оператора A^*, так что

$$A\varphi_0 = 0, \quad A\varphi = i\omega_0\varphi, \quad A^*\Phi_0 = 0, \quad A^*\Phi = i\omega_0\Phi. \tag{2.1}$$

Проектор P_0 на ядро X_0 определяется равенством $P_0 u = (u, \Phi_0)\varphi_0$ для любого $u \in \mathbb{R}^n$.

Локальная замена переменных

$$u = u_0 + u_1 + T_1(P_0 u_1) \tag{2.2}$$

распрямляет семейство равновесий S и приводит систему (1.1) к виду

$$\dot{u}_1 = f(u_1). \tag{2.3}$$

Поле f сохраняет гладкость поля F, а его равновесия заполняют целиком некоторую окрестность нуля одномерного подпространства X_0.

Согласно принципу сведения [20] задачи устойчивости нулевых решений системы (2.3) и ее сужения на 3-мерное центральное многообразие эквивалентны. Поэтому мы не нарушим общности рассмотрения, заменяя далее пространство $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^3$. В этом случае спектр $\sigma(B)$ производной $B = f'(0)$ целиком лежит на мнимой оси

$$\sigma(B) = \sigma_0(A) = \{0, \pm i\omega_0\}. \tag{2.4}$$

Существенно, что при переходе от уравнения (1.1) к сужению системы (2.3) на центральное многообразие косимметрическое свойство сохраняется. Действительно, косимметрия при диффеоморфизме (2.2) преобразуется как дифференциальная 1-форма, после чего остается лишь перейти к ее сужению на центральное многообразие системы.

Система (2.3), приведенная к нормальной форме Пуанкаре — Дюлака [21] до четвертого порядка включительно при условии, что $\{0, \pm i\omega_0\}$ — спектр линеаризации есть и существует однопараметрическое семейство равновесий, записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= b_0|z|^2 + b_1 x|z|^2 + b_2 x^2|z|^2 + b_3|z|^4 + Q_1(v), \\ \dot{z} &= i\omega_0 z + C_1 xz + Dz|z|^2 + C_2 x^2 z + C_3 x^3 z + C_4 xz|z|^2 + Q_2(v). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $v = (x, z, z^*)$, x — вещественная, а z — комплексная амплитуды, соответствующие разложению произвольного вектора $u \in \mathbb{R}^3$:

$$u = x\varphi_0 + z\varphi + z^*\varphi^*.$$

Коэффициенты b_j $(j = 0, \dots, 3)$ вещественны, а D, C_k $(k = 1, \dots, 4)$ комплексны. Для них можно получить явные полуинвариантные формулы [22], в которые входят коэффициенты разложения поля F в ряд Тейлора и собственные векторы φ_0, φ, Φ_0, Φ.

Отображения $Q_1 : \Omega_2 \to \mathbb{R}$, $Q_2 : \Omega_2 \to C$ определены в окрестности нуля $\Omega_2 \in \mathbb{R} \times C^2$, отвечающей области $\Omega_1 \in \mathbb{R}^3$. Их разложения в ряд Тейлора начинаются со слагаемых не ниже пятой степени.

Множество равновесий системы (2.5) заполняет целиком окрестность нуля прямой $z = 0 : Q_k(x, 0, 0) \equiv 0$, $k = 1, 2$.

Система (2.5), в которой отброшены слагаемые Q_1, Q_2, допускает косимметрию (согласно разультатам работы [19] это следует уже из существования невырожденного семейства равновесий)

$$L_0 :\ v \to \big(L_1(v), L_2(v), L_2^*(v)\big),$$

$$L_1(v) = 2\left(\omega_0 + \sum_{j=1}^{4} \operatorname{Im} C_j x^j + \operatorname{Im} D|z|^2\right), \quad L_2(v) = -iz\left(\sum_{i=0}^{2} b_i x^i + b_3|z|^2\right). \tag{2.6}$$

Заметим, что равновесие $v = 0$ системы (2.5) с нулевыми слагаемыми Q_1, Q_2 некосимметрично: $L_1(0) = (2\omega_0, 0, 0) \neq 0$.

Косимметрическое равенство проверяется непосредственно:

$$gL_1 + 2\operatorname{Re}\big(hL_2^*\big) = 0, \tag{2.7}$$

где через g и h обозначены правые части уравнений (2.5). Косимметрию L_0 можно также получить и из исходной косимметрии L. Для этого достаточно разложить L в ряд Тейлора по степеням $u - u_0$ и провести замены, приводящие систему к нормальной форме. При этом используется также возможность умножать косимметрию на произвольную нигде не исчезающую функцию.

Заметим, что система (2.5), когда $Q_1 = Q_2 = 0$, и косимметрия (2.6) удовлетворяют всем условиям косимметричной версии теоремы о неявной функции [1–5].

Теперь понятно, что наличие косимметрии не приводит к каким-либо соотношениям между выписанными явно коэффициентами системы (2.5) и их можно считать независимыми, принимающими произвольные значения.

Наша задача теперь свелась к исследованию системы (2.5). Отбросим в ней слагаемые Q_1, Q_2 и введем полярные координаты, полагая $z = re^{i\varphi}$, $r \geq 0$. Для переменных x, r получаем соответствующую фактор-систему, определенную на полуплоскости $r \geq 0$ плоскости (x, r):

$$\dot{x} = \sum_{i=0}^{2} b_i x^i r^2 + b_3 r^4, \quad \dot{r} = \sum_{i=1}^{4} c_i x^i r + dr^3. \tag{2.8}$$

Здесь использованы обозначения $c_i = \operatorname{Re} C_i$, $d = \operatorname{Re} D$. В переменных x, $\rho = r^2$ система (2.8) имеет вид

$$\dot{x} = \sum_{i=0}^{2} b_i x^i \rho + b_3\rho^2, \quad \dot{\rho} = 2\sum_{i=1}^{4} c_i x^i \rho + 2d\rho^2. \tag{2.9}$$

§ 3. Критерии устойчивости и модельные системы

Будем говорить, что нулевое решение системы (2.5) z-*устойчиво*, если оно одновременно устойчиво по Ляпунову [6], и асимптотически устойчиво по отношению к переменной z [9, 10]. Аналогично будем понимать r-устойчивость и ρ-устойчивости равновесий систем (2.8) и (2.9) соответственно. Для доказательства z-устойчивости достаточно указать определенно-положительную функцию $V(v)$, производная которой $\dot{V}(v)$ в силу системы (2.5) является определенно-отрицательной по отношению к переменной z [10], т. е. $\dot{V}$ знакоотрицательна, но может обращаться в нуль только на прямой $z = 0$ (далее всегда $\dot{V}(x, 0, 0) \equiv 0$). Действительно, такая функция V удовлетворяет обеим теоремам: об устойчивости по Ляпунову [6] и об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных [10].

Далее разбираются все случаи коразмерности $\varkappa = 0, 1$ и один случай коразмерности 2. Для каждого из них применяется стандартный прием [8]: сначала исследуется устойчивость равновесия модельной системы, получаемой отбрасыванием части слагаемых (для каждого вырождения своих) в системе (2.8) или (2.9), а затем найденные для нее критерии устойчивости переносятся на полные уравнения (2.5).

Теорема 3.1. *Справедливы следующие утверждения об устойчивости равновесия $v = 0$ системы (2.5), сформулированные вместе с указанием для каждого рассматриваемого случая условий вырождения, коразмерности вырождения $\varkappa$ и модельной системы.*

1. *Равновесие z-устойчиво, если $b_0c_1 < 0$, и неустойчиво, когда $b_0c_1 > 0$, $\varkappa = 0$; модельная система имеет вид*

$$\dot{x} = b_0r^2, \quad \dot{r} = c_1xr. \tag{3.1}$$

2. *Условия вырождения следующие: $c_1 = 0$, $b_0 \neq 0$. Равновесие z-устойчиво, если $c_2 < 0$, и неустойчиво, когда $c_2 > 0$, $\varkappa = 1$; модельная система имеет вид*

$$\dot{x} = b_0\rho, \quad \dot{\rho} = 2c_2x^2\rho. \tag{3.2}$$

3. *Условия вырождения следующие: $b_0 = 0$, $c_1 \neq 0$. Равновесие z-устойчиво при выполнении любой из двух групп условий:*

a) $k_1 < 0$, $k_2 < 0$,

b) $k_1 > 0$, $k_3 < 0$,

и неустойчиво, если $k_2 > 0$ или справедливы оба неравенства:

c) $k_1 > 0$, $k_3 \geq 0$ $\big($*здесь* $k_1 = 2d + b_1$, $k_2 = 2b_3c_1 - 2db_1$, $k_3 = k_1^2 + 4k_2\big)$; $\varkappa = 1$; *модельная система имеет вид*

$$\dot{x} = b_1x\rho + b_3\rho^2, \quad \dot{\rho} = 2c_1x\rho + 2d\rho^2. \tag{3.3}$$

4. *Условия вырождения следующие: $b_0 = c_1 = 0$. Равновесие z-устойчиво при одновременном выполнении неравенств $K_1 = \min\{b_1, c_2\} < 0$, $d < 0$ и неустойчиво, если хотя бы одно из них нарушается грубо: $\max\{K_1, d\} > 0$, $\varkappa = 2$; модельная система имеет вид*

$$\dot{x} = b_1xr^2, \quad \dot{r} = c_2x^2r + dr^3. \tag{3.4}$$

Отметим, что неустойчивость равновесия $v = 0$ системы (2.5) при условии $b_0c_1 > 0$ следует также из результатов работ [8, 18].

Уравнение (1.1), которому соответствует система (2.5) с вырождением $b_0 = 0$, всегда возникает при ответвлении цикла от семейства равновесий в косимметричных системах с параметром [11]. Условие $c_1 = 0$ отвечает бифуркации возникновения неустойчивой (устойчивой) дуги на устойчивом (неустойчивом) первоначально семействе равновесий [11–15]. Случай 4 теоремы 3.1 соответствует пересечению этих бифуркаций. Поэтому он и выделен особо среди всех вырождений коразмерности два.

§ 4. Устойчивость

Этот параграф посвящен обоснованию условий устойчивости теоремы 3.1.

Напомним, что разложение слагаемых Q_1, Q_2 системы (2.5) в ряд Тейлора в окрестности нуля начинается со слагаемых не ниже пятой степени. Имеют место следующие представления:

$$Q_1(v) = \mathrm{Re}[g_1(x)z] + G_1(v), \quad Q_2(v) = g_2(x)z + g_3(x)z^* + G_2(v), \tag{4.1}$$

где $g_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to C$, $\varepsilon > 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Ряды Тейлора отображений G_1 и G_2 не содержат слагаемых вида x^l, $x^m z$, $x^k z^*$.

Для дальнейших рассмотрений при построении функций Ляпунова необходимо выполнение в системе (2.5) условия $g_1 = 0$, которого добиваемся заменой переменных

$$x \to x - \mathrm{Re}[zM(x)], \quad z \to z. \tag{4.2}$$

Отображение $M : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to C$, $\varepsilon_1 > 0$, задается уравнением

$$M(x)(i\omega_0 + g_2(x)) + M^*(x)g_3^*(x) = g_1(x),$$

решая которое, получаем $\mathrm{Re}\, M = \Delta_1/\Delta$, $\mathrm{Im}\, M = \Delta_2/\Delta$, где

$$\Delta = (\omega_0 + g_{2i})^2 - g_{3i}^2 - g_{3r}^2 + g_{2r}^2,$$
$$\Delta_1 = g_{1r}(g_{2r} - g_{3r}) + g_{1i}(\omega_0 + g_{2i} + g_{3i}), \ \Delta_2 = g_{1i}(g_{2r} + g_{3r}) - g_{1r}(\omega_0 + g_{2i} - g_{3i}),$$
$$g_{ki} = \mathrm{Im}\, g_k, \quad g_{kr} = \mathrm{Re}\, g_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Таким образом, можно считать, что справедливы следующие асимптотики при $|v| \to 0$:

$$|Q_1(v)| = o(x^2|z|^2 + |z|^4), \quad |Q_2(v)| = o(x^3|z| + |z|^4). \tag{4.3}$$

Доказательство справедливости условий устойчивости будем проводить в той же последовательности, в какой они приведены в теореме 3.1.

Введем обозначение: $\dot\Theta_{j(l)}$ — производная функции Θ_j в силу системы (l).

1. Выполняется неравенство $b_0 c_1 < 0$. Функция $J_1(x, r)$ доказывает r-устойчивость нулевого решения системы (3.1):

$$J_1 = I_1 + \gamma(c_1 x^3 - b_0 x r^2), \quad \dot J_{1(3.1)} = \gamma[b_0 c_1 x^2 - b_0^2 r^2] r^2.$$

Здесь $I_1(x, r) = x^2 - (b_0/c_1) r^2$ — определенно-положительный интеграл модельной системы (3.1), а $\gamma > 0$.

Для системы (2.5) z-устойчивость равновесия $v = 0$ обосновывает определенно-положительная функция $V_1(v) = J_1(x, |z|)$, производная которой $\dot V_{1(2.5)}$ является определенно-отрицательной по отношению к переменной z при достаточно большой величине $\gamma > 0$, так как при $|v| \to 0$ справедлива асимптотика

$$\dot V_{1(2.5)} = (\gamma b_0 c_1 + 2b_1 - 2b_0 c_2/c_1) x^2 |z|^2 - (\gamma b_0^2 + 2d b_0/c_1)|z|^4 + o(x^2|z|^2 + |z|^4).$$

Заметим, что здесь благодаря замене переменных (4.2) учтено отсутствие слагаемых вида $x^m z$, $x^k z^*$ в ряде Тейлора функции Q_1 из системы (2.5). В противном случае слагаемые такого же вида были бы в ряде Тейлора производной $\dot{V}_{1(2.5)}$, что не позволило бы сделать заключение даже о ее знакоотрицательности, поскольку $x^m|z| \neq o(x^2|z|^2 + |z|^4)$ при $|v| \to 0$.

2. Пусть $c_1 = 0$, $b_0 \neq 0$, $c_2 < 0$. Рассмотрим функции $I_2(x,\rho)$, $W_1(x,\rho)$, $J_2(x,\rho)$ и их производные

$$I_2 = 2x^3 - 3(b_0/c_2)\rho, \quad W_1 = I_2^2 + \rho^2, \quad J_2 = W_1 - \gamma(b_0 x\rho^2 - x^4\rho),$$
$$\dot{I}_{2(3.2)} \equiv 0, \quad \dot{W}_{1(3.2)} = 4c_2x^2\rho^2,$$
$$\dot{J}_{2(3.2)} = \rho(2\gamma c_2 x^6 + 4c_2x^2\rho - \gamma b_0^2\rho^2 + 4b_0(1-c_2)\gamma x^3\rho).$$

Здесь $\gamma > 0$. Функция W_1 доказывает устойчивость по Ляпунову равновесия $(0,0)$ системы (3.2), а J_2 обосновывает его ρ-устойчивость. Функция J_2 является определенно-положительной, так как $x^4\rho = o(x^6 + \rho^2)$ при $(x,\rho) \to 0$ [8, с. 92].

Доказательство z-устойчивости нулевого решения системы (2.5) дает функция $V_2(v) = J_2(x,|z|^2)$, причем

$$\dot{V}_{2(2.5)} = 4c_2x^2|z|^4 + (2\gamma c_2 + M_1)x^6|z|^2 + (-\gamma b_0^2 + M_2)|z|^6 + o(x^6|z|^2 + x^2|z|^4 + |z|^6).$$

Здесь M_1, M_2 — величины, не зависящие от параметра γ, который выберем из условия $\gamma > \max\{-M_1/c_2, M_2/b_0^2, 0\}$. При выделении главных членов этой асимптотики использовано понятие «многоугольник Ньютона» (см. [8, с. 93]).

3. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = b_1 x + b_3 y, \quad \dot{y} = 2c_1 x + 2\,dy. \tag{4.4}$$

Переформулируем условия устойчивости теоремы 3.1 при вырождении $b_0 = 0$, $c_1 \neq 0$ следующим образом: равновесие $v = 0$ системы (2.5) z-устойчиво, если нулевое решение системы (4.4) асимптотически устойчиво или является неустойчивым фокусом. Понятно, что для модельной системы (3.3) эти условия верны, поскольку ее фазовый портрет вне прямой $\rho = 0$ совпадает с частью фазового портрета системы (4.4), расположенной в полуплоскости $y > 0$ плоскости (x,y) (исключение времени t в любой из систем (3.3) и (4.4) приводит к одному и тому же уравнению). Однако соответствующие функции Ляпунова необходимо построить для последующего доказательства устойчивости равновесия полной системы.

Пусть выполнены условия: $k_1 < 0$, $k_2 < 0$. Равновесие системы (4.4) асимптотически устойчиво. Значит [6], существует определенно-положительная квадратичная форма $J_3(x,y)$ с производной $\dot{J}_{3(4.4)} = -x^2 - y^2$. Функция $J_3(x,\rho)$ имеет производную $\dot{J}_{3(3.3)} = -\rho(x^2+\rho^2)$ и доказывает ρ-устойчивость нулевого решения системы (3.3), а функция $V_3(v) = J_3(x,|z|^2)$ обосновывает z-устойчивость равновесия $v = 0$ системы (2.5).

Рассмотрим теперь случай выполнения неравенств $k_1 > 0$, $k_3 < 0$. Система (3.3) имеет знакоопределенный интеграл $I_3(x,\rho)$:

$$I_3 = R_1 e^{R_2}, \quad R_1 = 2c_1x^2 + (2d - b_1)x\rho - b_3\rho^2,$$
$$R_2 = A\,\mathrm{arctg}[(4c_1x/\rho + 2d - b_1)/\sqrt{-k_3}], \quad A = 2k_1/\sqrt{-k_3}.$$

Можно рассматривать любую ветвь многозначной функции I_3. Выберем ту из них, которая задается неравенством $|R_2| \leq A\pi/2$. При этом считаем, что

$\mathrm{arctg}(\pm\infty) = \pm\pi/2$, $I_3(0,0) = 0$. Заметим, что $\dot{R}_{1(3.3)} = k_1\rho R_1$. Определенно-положительная функция $J_4 = c_1 I_3 - A_1 R_1$, $A_1 = 0.5c_1\exp(-A\pi/2)$ имеет определенно-отрицательную по отношению к переменной ρ производную $\dot{J}_{4(3.3)} = -k_1 A_1 \rho R_1$. Следовательно, нулевое решение системы (3.3) ρ-устойчиво. Функция $V_4(v) = J_4(x, |z|^2)$ обосновывает z-устойчивости нулевого решения системы (2.5).

Функция J_4 непрерывна на полуплоскости $\rho \geq 0$, но не на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, так как имеет разрыв на прямой $\rho = 0$. Это не случайно, поскольку справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены оба неравенства $k_1 > 0$, $k_3 < 0$. Для системы* (3.3) *не существует однородной функции Ляпунова $\Phi(x,\rho)$, непрерывной вместе со своими частными производными Φ'_x, Φ'_ρ на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных (x,ρ).*

Доказательство. Предположим, что такая функция $\Phi(x,\rho)$ степени однородности m существует. Покажем, что она удовлетворяет теореме об устойчивости по Ляпунову [6] для системы (4.4), определенной на плоскости $\mathbb{R}^2$. Это приведет к противоречию с тем, что равновесие системы (4.4) является неустойчивым фокусом.

Из определенной положительности функции $\Phi(x,\rho)$ на полуплоскости $\rho \geq 0$ следует, во-первых, равенство $(-1)^m = 1$, поскольку $\Phi(1,0) > 0$, $(-1)^m\Phi(1,0) = \Phi(-1,0) > 0$, и, во-вторых, ее определенная положительность на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, так как справедливо тождество $\Phi(x,-y) \equiv \Phi(-x,y)$ для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Заметим, что $\dot{\Phi}_{(3.3)}(x,\rho) = \rho\Phi_{(4.4)}(x,\rho)$. Знакоотрицательность производной $\dot{\Phi}_{(3.3)}(x,\rho)$ на полуплоскости $\rho \geq 0$ означает, что таковой является и функция $\dot{\Phi}_{(4.4)}(x,\rho)$ степени однородности m. Тождество $\dot{\Phi}_{(4.4)}(x,-y) \equiv \dot{\Phi}_{(4.4)}(-x,y)$ обосновывает знакоотрицательность производной $\dot{\Phi}_{(4.4)}$ на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Следовательно, функция Φ удовлетворяет теореме об устойчивости по Ляпунову [6] для системы (4.4). Получили противоречие. Лемма 4.1 доказана.

4. Пусть при вырождении $b_0 = c_1 = 0$ имеют место оба неравенства $d < 0$, $K_1 < 0$. Величину $\gamma > 0$ выберем из условия $A_2 < 0$, где $A_2 = b_1 + \gamma c_2$. Функция $J_5(x,r) = x^2 + \gamma r^2$ с производной $\dot{J}_{5(3.4)} = 2(A_2x^2 + \gamma d r^2)r^2$ обосновывает r-устойчивость равновесия $(0,0)$ системы (3.4), а функция $V_5(v) = J_5(x,|z|)$ доказывает z-устойчивость нулевого решения системы (2.5).

§ 5. Неустойчивость

Докажем утверждения теоремы 3.1 о неустойчивости. Следующая лемма представляет собой частный результат работ [16, 17].

Лемма 5.1. *Пусть система* (2.8) *имеет асимптотику вида*

$$\dot{x} = X^{(m)}(x,r) + o(|x|^m + |r|^m), \quad \dot{r} = Y^{(m)}(x,r) + o(|x|^m + |r|^m)$$

при $(x,r) \to 0$. Здесь $X^{(m)}$, $Y^{(m)}$ — формы m-го порядка. Нулевое решение системы (2.5) *неустойчиво, если существует хотя бы один вещественный луч, задаваемый уравнением $G(x,r) = 0$, на котором форма $P(x,r)$ может принимать положительные значения. Здесь P и G — формы; $P = xX^{(m)} + rY^{(m)}$, $G = xY^{(m)} - rX^{(m)}$. Лемма остается верной при замене системы* (2.8) *на* (2.9) [16].

Формы P и G из этой леммы для систем (3.1), (3.3) и (3.4) обозначим соответственно через P_j, G_j $(j = 1,2,3)$ и выпишем вместе с величинами q_k, γ_k

$(k = 1, 2)$, используемыми в дальнейшем:

$$P_1 = (b_0 + c_1)xr^2, \quad G_1 = r(c_1x^2 - b_0r^2), \quad P_2 = \rho(b_1x^2 + (b_3 + 2c_1)x\rho + 2d\rho^2),$$
$$G_2 = \rho R_1, \quad P_3 = r^2((b_1 + c_2)x^2 + dr^2), \quad G_3 = xr(c_2x^2 + (d - b_1)r^2),$$
$$q_1 = (b_1 - 2d + \sqrt{k_3})/(4c_1), \quad \gamma_1 = (q_1^2 + 1)(k_1 + \sqrt{k_3})/2,$$
$$q_2 = (b_1 - d)/c_2, \quad \gamma_2 = b_1(q_2 + 1).$$

Проверим, что лемма 5.1 обосновывает все условия неустойчивости теоремы 3.1 в случаях 1, 3, 4.

1. Верно неравенство $b_0c_1 > 0$. На вещественных лучах $x = \pm\sqrt{(b_0/c_1)}r$ форма G_1 нулевая, а функция P_1 принимает значения противоположных знаков.

3. Пусть выполнены условия неустойчивости теоремы 3.1 при вырождении $b_0 = 0$, $c_1 \neq 0$. Они равносильны наличию в спектре устойчивости равновесия системы (4.4) положительной вещественной точки, т. е. неравенству $k_1 + \sqrt{k_3} > 0$. На луче $x = q_1\rho$ формы G_2, P_2 принимают вид $G_2 \equiv 0$, $P_2 = \gamma_1\rho^3$, где $q_1 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 > 0$.

4. Заметим, что $G_3(0, r) \equiv 0$, $P_3(0, r) = dr^4$. Когда одновременно выполняются неравенства $d \leq 0$, $K_1 > 0$, имеем

$$G_3(\sqrt{q_2}r, r) \equiv 0,\ P_3(\sqrt{q_2}r, r) = \gamma_2r^4,\ q_2 > 0,\ \gamma_2 > 0.$$

Осталось рассмотреть случай 2 теоремы 3.1. Одновременно выполняются условия $c_1 = 0$, $b_0 \neq 0$, $c_2 > 0$. Неустойчивость равновесия $v = 0$ системы (2.5) обосновывает функция Четаева $W(v) = b_0x|z|^2$, производная которой

$$\dot{W}_{(2.5)} = b_0^2|z|^4 + 2b_0c_2x^3|z|^2 + o(|z|^4 + x^3|z|^2)$$

положительна в области $W > 0$ для достаточно малых $v \neq 0$.

Автор благодарит В. И. Юдовича за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148.
2. *Yudovich V. I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. V. 5, N 2. P. 402–411.
3. *Юдович В. И.* Теорема о неявной функции для косимметрических уравнений // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 2. С. 313–317.
4. *Yudovich V. I.* Cosymmetric version of implicit function theorem // Proc. of “Linear topological spaces and complex analysis". Ankara: Middle East Technical Univ., 1995. V. 2. P. 16.
5. *Yudovich V. I.* Cosymmetry and dynamical systems // Proc. ICIAM 1995. V. 4. Applied sciences, especially mechanics P. 585–588.
6. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
7. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.; Л.: Наука, 1984.
8. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Устойчивость критических положений равновесия. Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985.
9. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 272–331.
10. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1957. № 4. С. 9–16.
11. *Юдович В. И.* О бифуркации рождения цикла из семейства равновесий динамической системы и ее затягивании // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 1. С. 22–34.

12. *Kurakin L. G., Yudovich V. I.* Bifurcation of the branching of a cycle in n-parameter family of dynamic system with cosymmetry // Chaos. 1997. V. 7, N 3. P. 376–386.
13. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Бифуркация рождения цикла в системе с косимметрией // Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 3. С. 346–349.
14. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Ответвление предельного цикла от подмногообразия равновесий в системе с мультикосимметрией // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 2. С. 317–320.
15. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Применение метода Ляпунова — Шмидта в задаче ответвления цикла от семейства равновесий системы с мультикосимметрией // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 136–149.
16. *Каменков Г. В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. Избранные труды. М.: Наука, 1972. Т. 2.
17. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
18. *Хазин Л. Г.* Об устойчивости положений равновесия в некоторых критических случаях. М., 1979. (Препринт / Ин-т прикл. математики АН СССР; № 242 10).
19. *Куракин Л. Г.* Критические случаи устойчивости. Обращение теоремы о неявной функции для динамических систем с косимметрией // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 4. С. 572–578.
20. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 6, № 6. С. 1297–1324.
21. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
22. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Полуинвариантная форма критериев устойчивости равновесия в критических случаях // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, № 5. С. 707–711.

Статья поступила 24 мая 2000 г.

Куракин Леонид Геннадиевич
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
kurakin@math.rsu.ru