Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 519.46

ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЙ АСФЕРИЧНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В. В. Горбацевич

Аннотация: Рассматриваются группы изометрий римановых солвмногообразий, а также изучается более широкий класс римановых асферичных однородных пространств. Выяснено топологическое строение таких пространств (теорема 1). Показано, что на римановых пространствах с метрикой максимальной подвижности почти просто транзитивно действует группа Ли с треугольным радикалом (теорема 2). Указаны применения этого результата к изучению групп изометрий солвмногообразий и, в частности, разрешимых групп Ли с инвариантной римановой метрикой. Библиогр. 17.

В работе изучается группа $\mathrm{Iso}(M)$ изометрий римановых асферичных многообразий M. Многообразие M называется *асферичным*, если все его гомотопические группы $\pi_i(M)$ равны нулю при $i \geq 2$, что эквивалентно стягиваемости многообразия $\widetilde{M}$ — универсального накрывающего для M — в точку. В статье будут рассматриваться однородные римановы асферичные многообразия, т. е. асферичные многообразия, на которых заданы риманова метрика f и такое действие некоторой группы Ли G изометрий (подгруппы в группе всех изометрий $\mathrm{Iso}(M, f)$ этого многообразия, являющейся, как хорошо известно, группой Ли), которое является транзитивным.

Первоначально автора интересовали только римановы солвмногообразия, т. е. римановы однородные пространства разрешимых групп Ли G. Римановым солвмногообразиям посвящено немало работ, однако в них либо рассматриваются лишь некоторые отдельные примеры или же узкие классы таких многообразий, либо изучаются все возможные транзитивные на M группы изометрий (см. [1–4]). Описание всех связных подгрупп в $\mathrm{Iso}(M)$, транзитивных на заданном солвмногообразии M, полученное в [2], выглядит довольно сложно, а доказательства там весьма техничны. Фактически авторы работы [2] в рассматриваемом ими случае ввели понятие расщепления группы Ли, которое в других контекстах было уже в то время хорошо известно (подробнее см. обзор [5]). Автора же данной статьи интересовали именно сама группа $\mathrm{Iso}(M)$ и ее строение, описать которое (с помощью определенной редукции) оказалось для некоторых метрик намного проще, чем описывать строение всех ее транзитивных подгрупп. Как представляется автору, предшествующие работы по римановым солвмногообразиям так и не выявили суть строения группы $\mathrm{Iso}(M)$ для римановых солвмногообразий. В данной работе неоднократно используется понятие максимальной связной треугольной подгруппы. Удалось выяснить причину той особой роли, которую играют треугольные группы Ли в теории

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98–01–00329).

римановых солвмногообразий, а также в теории римановых алгебр Ли (т. е. алгебр Ли с зафиксированным на них скалярным произведением) и в теории геометрий Терстона (в которой разрешимые геометрии в определенном смысле оказываются треугольными). До сих пор роль треугольных групп Ли была чисто служебная, а теперь выяснилось, что ее можно рассматривать как фундаментальную. Отметим, что теория геометрий Терстона в настоящее время не является законченной даже в трехмерном случае, так как классифицированы только сами однородные пространства, а не метрики на них (среди которых имеются и различные, т. е. неизометричные). Наш подход позволяет выделить в случае геометрий Терстона некоторые «специальные» метрики и дает возможность описать соответствующие геометрии более подробно (но в данной статье эти вопросы не рассматриваются).

В ходе работы по изучению римановых солвмногообразий выяснилось, что некоторые результаты здесь справедливы (иногда после подходящей переформулировки) и в более широкой ситуации — для произвольных асферичных римановых однородных пространств. Любое солвмногообразие асферично (см. ниже), но класс асферичных однородных римановых солвмногообразий выделяется из класса всех римановых однородных пространств чисто топологическими условиями ($\pi_i(M) = 0$ при $i \geq 2$), тогда как выделение римановых солвмногообразий не является чисто топологическим (оно основано на требовании существования транзитивной разрешимой группы изометрий). Более того, оказывается, что класс римановых солвмногообразий задать топологически в принципе невозможно, так как из доказанной ниже теоремы 1 следует, что топологически классы римановых асферичных однородных пространств и римановых солвмногообразий неразличимы (хотя геометрически эти два класса, конечно, различны).

Доказательства основных результатов для асферичного случая оказались немного сложнее доказательств соответствующих результатов для солвмногообразий, поэтому ниже будет иногда указываться, как изменятся (т. е. упростятся) доказательства в частном случае римановых солвмногообразий. Отметим, что важным специальным (и, в определенном смысле, универсальным, см. ниже) случаем римановых солвмногообразий являются разрешимые группы Ли G с левоинвариантной метрикой (на них транзитивно и изометрично действует сама группа G левыми сдвигами). Представляют интерес и произвольные асферичные группы Ли с левоинвариантной метрикой — простейшие примеры асферичных римановых однородных пространств.

Пусть $M = G/H$ — некоторое однородное пространство (пока не обязательно риманово) группы Ли G, которую мы обычно будем предполагать связной. Пусть $G = S \cdot R$ — разложение Леви группы Ли G (R — радикал, а S — полупростая часть в G), через K обозначим некоторую максимальную компактную подгруппу в G (все такие K будут, как известно, сопряжены в G). Имеем разложение $K = K_s \cdot K_t$, где K_s — полупростая связная компактная группа Ли, а $K_t = (Z(K))_0$ — связная компонента единицы центра $Z(K)$ группы K, она является тором — связной компактной абелевой группой Ли. В [6] доказано, что асферичность однородного пространства G/H эквивалентна условию $H \supset K_s$ для некоторой K. Кроме того, в [6] доказано, что если однородное пространство $M = G/H$ асферично, то в группе Ли G (которая предполагается дополнительно локально эффективной на M) существует транзитивная на M подгруппа Ли, полупростая часть которой локально изоморфна группе Ли вида $\times_i \mathscr{A}_i$, где все прямые сомножители $\mathscr{A}_i$ изоморфны $\mathscr{A} = \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ — универсальной накрывающей группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Отметим, что $\mathscr{A}$ — трехмерная группа Ли, диффеоморфная $\mathbb{R}^3$, в частности, она асферична (а потому асферичной будет и указанная выше подгруппа в G). Обратно, если $G = S \cdot R$ — разложение Леви произвольной связной группы Ли G, полупростая часть S которой локально изоморфна $\times_i \mathscr{A}_i$, то группа Ли G асферична (как многообразие) и любое ее однородное пространство тоже асферично (подробнее см. [6]). В [6] также доказано, что для любого однородного асферичного пространства M универсальная накрывающая $\widetilde{M}$ не только стягиваема, но и диффеоморфна $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$).

Пусть $M = K/H$ — однородное пространство разрешимой группы Ли R. Мы всегда можем предполагать, что действие R на M эффективно или локально-эффективно, факторизуя в противном случае группу Ли R по ядру неэффективности или по его связной компоненте единицы. Такое M всегда асферично и, как доказал еще Дж. Мостов [7], $\widetilde{M}$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Топологически любое такое многообразие M диффеоморфно пространству векторного расслоения над некоторым компактным солвмногообразием [7]. Когда же $M = R/H$ — риманово солвмногообразие (т. е. разрешимая группа Ли R сохраняет некоторую риманову метрику на M), то, если действие R на M эффективно, стационарная подгруппа H компактна, а ее связная компонента единицы H_0 изоморфна некоторому тору T^k. При этом R/H будет диффеоморфно $T^k \times \mathbb{R}^l$ (при $l = \dim R/H - k$). Оказывается, что точно такое же топологическое строение и произвольного асферичного риманова однородного пространства (см. теорему 1 ниже). Выяснилось, что единственным существенным отличием римановых солвмногообразий от произвольных асферичных римановых однородных пространств является отсутствие в транзитивной группе полупростой части, составленной из прямых множителей $\mathscr{A}$. При этом простую группу $\mathscr{A}$ можно, как в шутку автор предлагал еще много лет назад, в определенном смысле считать «разрешимой», ибо многие ее свойства (особенно топологические) те же, что и у разрешимых групп Ли. Например, любая односвязная разрешимая группа диффеоморфна $\mathbb{R}^n$, а простая группа Ли S диффеоморфна $\mathbb{R}^n$ при некотором n тогда и только тогда, когда $S = \times \mathscr{A}_i$.

Теорема 1. *Пусть $M = G/H$ — риманово асферичное однородное пространство. Тогда M диффеоморфно $T^k \times \mathbb{R}^l$ при некоторых $k, l \in \mathbb{N}, k + l = \dim M$.*

Доказательство. В силу [6] в группе Ли G имеется замкнутая связная подгруппа $F \subset G$, транзитивная на M, в разложении Леви $F = S \cdot R$ которой полупростая часть S локально изоморфна $\times \mathscr{A}_i$. Поэтому $M = F/L$, где $L = H \cap F$ — компактная подгруппа в F. Максимальная компактная подгруппа в F обязательно будет тором (см. [6]), пусть K — некоторая максимальная компактная подгруппа в F, содержащая L. Подгруппа K тоже является тором. Рассмотрим расслоение (гладкое, локально тривиальное) $K/L \to F/L \to F/K$. Так как K — максимальная компактная подгруппа в F, то F/K диффеоморфно $\mathbb{R}^l$ при некотором $l \in \mathbb{N}$. Группы K и L являются торами, поэтому слой (факторгруппа K/L) этого расслоения тоже будет тором, пусть это будет T^k. Расслоение над базой $\mathbb{R}^l$ всегда тривиально, поэтому $M = F/L$ диффеоморфно $T^k \times \mathbb{R}^l$.

Отметим, что любое многообразие, диффеоморфное $T^k \times \mathbb{R}^l$ (при произвольных $k, l \in \mathbb{N}$), можно рассматривать как риманово однородное пространство, причем в качестве транзитивной на M группы Ли можно взять абелеву группу Ли $G = T^k \times \mathbb{R}^l$ и $H = \{e\}$. Тем самым M отождествляется с абелевой группой Ли (действующей на нем просто транзитивно), в качестве инвариантной метрики берется любая левоинвариантная метрика на G. Следовательно, любое асферичное однородное риманово многообразие диффеоморфно некоторому риманову солвмногообразию. Отметим, что если $M = G/H$ — односвязное риманово асферичное многообразие, то M будет диффеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$, а H — максимальная компактная подгруппа в G (действие G на M предполагается эффективным). Обратно, если K — максимальная компактная подгруппа в некоторой связной группе Ли G, то G/K диффеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$, которое можно рассматривать и как простейшее односвязное солвмногообразие.

Переходим теперь к изучению группы $\mathrm{Iso}(M)$. Вначале мы докажем один результат, который интересен и сам по себе, хотя в особо важном для нас частном случае ниже (для метрик максимальной подвижности) будет доказано намного более сильное утверждение — теорема 2.

Пусть $M = G/H$ — однородное пространство группы Ли G. Если G_1 — некоторая подгруппа Ли в G, то G_1 действует на M просто транзитивно (т. е. она транзитивна на M и стационарные подгруппы всех точек $m \in M$ тривиальны) тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия: $G_1 \cdot H = G$, $G_1 \cap H = \{e\}$. Аналогично действие подгруппы G_1 будет почти просто транзитивно (тут стационарные подгруппы всех точек $m \in M$ должны быть дискретны, а потому в римановом случае конечны) тогда и только тогда, когда выполняются такие условия: $G_1 \cdot H = G$, $G_1 \cap H$ дискретна (в римановом эффективном случае конечна). Подгруппу G_1 иногда называют дополнительной к H.

Предложение 1. *Пусть $M = G/H$ — асферичное риманово однородное пространство группы Ли G, действие которой на M предполагается локально эффективным. Тогда существует такая замкнутая подгруппа Ли $G_1 \subset G$, которая почти просто транзитивна на M, т. е. $G_1 \cdot H = G, G_1 \cap H$ конечна. Если $G_1 \cap H = \{e\}$, то G_1 просто транзитивна на M, то же будет и для случая, когда M односвязно.*

Доказательство. Если группа Ли G разрешима, то утверждение предложения 1 хорошо известно и доказывается довольно несложно (см. ниже и, например, работу [1]). Рассмотрим доказательство для случая группы Ли G общего вида.

Пусть N — нильрадикал группы Ли G. Рассмотрим подгруппу $N \cap H$. Она компактна (так как стационарная подгруппа H риманова однородного пространства всегда компактна, а нильрадикал всегда замкнут). Поскольку N связна и нильпотентна, любая ее компактная подгруппа содержится в центре $Z(N)$. В частности, все компактные подгруппы в N нормальны, а максимальная среди них будет единственна.

Ввиду того, что действие G на M предполагается локально эффективным, а $N \cap H$ лежит в ядре неэффективности, должно быть $(N \cap H)_0 = \{e\}$. Это мы используем ниже.

В силу уже использованного выше результата из [6] мы можем считать, что группа Ли G односвязна (переходя в случай необходимости к универсальному накрытию), асферична и имеет разложение Леви вида $G = S \cdot R$, где $S = \times \mathscr{A}_i$. Рассмотрим теперь естественный эпиморфизм $\pi : G \to G/N = S' \cdot A'$. Здесь $S' = S/S \cap R$ — полупростая группа Ли, локально изоморфная S, а

$A' = R/N$ — односвязная (ибо из односвязности G вытекает односвязность R, а с нею и односвязность R/N) абелева группа Ли. Рассмотрим подгруппу $\pi(H)$ в $\pi(G) = S' \cdot A'$, обозначим через C_i связные (одномерные) подгруппы в $\mathscr{A}_i$, которые соответствуют некоторым максимальным компактным подалгебрам в алгебрах Ли групп Ли $\mathscr{A}_i$ (все такие подгруппы при каждом заданном i сопряжены между собой). Так как H компактна, очевидно, что $\pi(H) \subset (\times_i C_i) \times A'$.

Пусть T_i — максимальные связные треугольные подгруппы в $\mathscr{A}_i$ (все такие подгруппы сопряжены между собой). Имеется разложение Ивасавы $\mathscr{A}_i = C_i \cdot T_i$. Отсюда следует, что для подгруппы $\pi(H)$ есть дополнительная подгруппа, которая представляется в виде прямого произведения некоторых из подгрупп вида $\mathscr{A}_j, T_j$ и некоторой подгруппы $A_1 \subset A'$. Точнее, существует подгруппа Ли вида $F_1 = (\times \mathscr{A}_{j_l}) \times (\times T_{i_k}) \times A_1$ такая, что $F_1 \cdot \pi(H) = \pi(G)$ и $F_1 \cap \pi(H) = \{e\}$. Выбор прямых сомножителей для F_1 производится следующим образом.

Если проекция подгруппы $\pi(H)$ в $\mathscr{A}_i$ тривиальна (или дискретна), то включаем соответствующий прямой множитель группы S в число входящих в семейство прямых множителей вида $\mathscr{A}_j$, составляющих F_1. Если указанная проекция равна C_i, то берем соответствующую подгруппу T_i. Далее рассматриваем проекцию $\pi(H)$ на прямой множитель A' и в качестве A_1 берем подгруппу, дополнительную к этой проекции.

Положим теперь $G_1 = \pi^{-1}(F_1)$ — это и будет, как нетрудно убедиться, искомая почти просто транзитивная на M подгруппа. Дискретность $G_1 \cap H$ следует из того, что, как показано выше, $(N \cap H)_0 = \{e\}$. Случай тривиального пересечения $G_1 \cap H$ рассматривается без труда. Если же M односвязно, то H связна и из дискретности пересечения $G_1 \cap H$ вытекает, что $G_1 \cap H = \{e\}$.

Если рассматривать случай римановых солвмногообразий, то доказательство значительно проще. Тут используется абелева группа Ли $A = R/N$, которая представляется в виде прямого произведения $A = A_1 \times \pi(H)$. Далее берем $F_1 = A_1$, $G_1 = \pi^{-1}(F_1)$.

Предложение 1 применимо, в частности, к любым однородным пространствам, которые диффеоморфны $\mathbb{R}^n$, т. е. к произвольным односвязным асферичным или, что в данном случае эквивалентно, стягиваемым однородным пространствам.

Аналог предложения 1 для неасферичных однородных пространств может быть неверен. Например, рассмотрим сферу $M = S^2 = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$. Ясно, что не существует в $\mathrm{SO}(3)$ подгрупп Ли, (почти) просто транзитивных на S^2. Утверждение предложения 1 связано с тем, что $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ и группы, ей локально изоморфные, — это единственные простые группы Ли, для которых любая связная компактная подгруппа имеет дополнительную (ибо этих подгрупп тут очень немного — они либо одномерны и все между собой сопряжены или же тривиальны).

Если M — односвязное асферичное риманово однородное пространство, то в силу предложения 1 оно изометрично некоторой асферичной группе Ли с инвариантной метрикой. Тем самым нахождение групп изометрий таких однородных пространств сводится в вычислению групп изометрий односвязных групп Ли вида $G = (\times \mathscr{A}_i) \cdot R$. Если рассматривать произвольные инвариантные метрики на M, то дальнейшее продвижение по пути исследования $\mathrm{Iso}(M)$ наталкивается на значительные препятствия, а если и удается получить содержательные результаты, то их формулировки оказываются весьма громоздкими и требуют значительной специальной подготовки у тех, кто собирается их применять. Однако в геометрии обычно среди множества метрик удается выделить (используя соображения, иногда выходящие за пределы математики, например, физические — в теории относительности и космологии — и др.) специальные метрики, которые, с одной стороны, представляют значительный интерес, а с другой стороны, намного лучше поддаются исследованию. Среди такого рода специальных метрик мы выделим метрики максимальной подвижности.

Пусть $M = G/H$ — однородное пространство группы Ли G. Будем предполагать, что действие G на M эффективно. Тогда G можно рассматривать как подгруппу в группе $\mathrm{Diff}(M)$ всех диффеоморфизмов многообразия M. Хорошо известно, что на таком M существует G-инвариантная риманова метрика тогда и только тогда, когда стационарная подгруппа H компактна. Мы предположим, что H действительно компактна, тогда множество G-инвариантных римановых метрик на M непусто. Инвариантные метрики определяются своим значением в некоторой одной точке многообразия M. Однако если мы будем рассматривать инвариантные метрики даже с точностью до изометричности (отождествляя метрики, порождающие изоморфные римановы пространства) или даже с точностью до конформной эквивалентности (отождествляя пропорциональные метрики), то и тогда в общем случае на M может существовать много (точнее, континуально много) разных инвариантных римановых метрик. Среди этих метрик можно ввести отношение частичного порядка, и тогда естественно в первую очередь рассмотреть те метрики, которые являются максимальными относительного этого порядка. Это и будут метрики максимальной подвижности. Переходим к точным определениям.

Пусть f, f' — две римановы метрики на многообразии M. Говорят, что f *подвижнее, чем* f', если любая изометрия метрики f' сохраняет и метрику f. По-другому отношение подвижности можно выразить включением $\mathrm{Iso}(M, f') \subset \mathrm{Iso}(M, f)$. Ясно, что отношение подвижности задает на множестве всех метрик частичный порядок. Максимальные элементы относительно этого порядка называются *метриками максимальной подвижности* (впервые в более общем виде они были рассмотрены в [8]). В [9] доказано, что метрики максимальной подвижности на однородных римановых пространствах всегда существуют. Более того, там доказано, что для любой линейно упорядоченной последовательности инвариантных римановых метрик всегда существует максимальная метрика. Другими словами, если имеется последовательность вложенных транзитивных групп изометрий метрик f_i вида $\mathrm{Iso}(M, f_1) \subset \mathrm{Iso}(M, f_2) \subset \dots \mathrm{Iso}(M, f_i) \subset \dots$, то замыкание их объединения есть группа (возможно, не полная) изометрий некоторой инвариантной метрики (на самом деле можно убедиться, что это утверждение справедливо для любого семейства вложенных транзитивных групп изометрий). Поэтому любая однородная инвариантная метрика в определенном смысле «содержится» в некоторой метрике максимальной подвижности. Полезно ввести и некоторый локальный аналог понятия метрики максимальной подвижности. А именно, однородную метрику назовем *локально максимально подвижной*, если максимальна (среди связных групп изометрий) связная компонента единицы $\mathrm{Iso}(M)_0$ группы ее изометрий. В отличие от метрик максимальной (глобальной) подвижности существование метрик локальной максимальной подвижности доказывается очень просто. Дело в том, что, как хорошо известно, размерность группы изометрий n-мерного многообразия не превосходит $n(n + 1)/2$. Поэтому очевидно, что любая (и не только счетная) линейно упорядоченная цепочка групп изометрий метрик на каком-то конечном шаге стабилизируется. А потому любая инвариантная (да и не только инвариантная) метрика «содержится» в некоторой метрике локально максимальной подвижности. Условие локально максимальной подвижности удобно еще и тем, что его несложно проверять (проверка сводится к локальной задаче на уровне алгебр Ли или, что в данном случае эквивалентно, на уровне полей Киллинга).

Рассмотрим примеры построения метрик максимальной подвижности. Для этого нам понадобится один результат о группе изометрий разрешимых групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой. А именно, если R — унимодулярная треугольная (из треугольности группы вытекает, как известно, ее разрешимость) односвязная группа Ли, то ее группа изометрий $\mathrm{Iso}(M)$ разлагается в полупрямое произведение нормального делителя, состоящего их левых сдвигов («параллельных переносов») и подгруппы изотропии $\mathrm{Iso}_e(M)$ («группы вращений»), состоящей из всех тех изометрий, которые сохраняют единичный элемент e группы Ли R, причем $\mathrm{Iso}_e(M)$ содержится в группе Ли $\mathrm{Aut}(R)$ автоморфизмов группы Ли R, которая в силу односвязности группы Ли R изоморфна группе Ли $\mathrm{Aut}(L(R))$ алгебры Ли $L(R)$ группы Ли R. Этот результат доказан в [1], однако в неявной форме он содержится в более ранней работе [10], где он легко выводится из результатов еще более ранней работы того же автора. В силу этого факта строение группы изометрий для указанных групп Ли чрезвычайно похоже на строение группы изометрий евклидова пространства $\mathrm{Iso}(E^n) = \mathrm{O}_n \cdot E^n$. Однако эта аналогия не беспредельна. Например, нетрудно убедиться, что знаменитая теорема Бибербаха о строении равномерных дискретных подгрупп в $\mathrm{Iso}(E^n)$, утверждающая, что пересечение таких подгрупп с группой трансляций всегда равномерно, на случай произвольных треугольных унимодулярных групп Ли уже не распространяется, хотя имеет место, если группа вращений полупроста — это легко вытекает из общих результатов о решетках в группах Ли, см., например, [11].

Пусть R — некоторая унимодулярная односвязная треугольная группа Ли (например, таковой будет произвольная односвязная нильпотентная группа Ли). Рассмотрим группу $\mathrm{Aut}(R)$ ее автоморфизмов, а в ней максимальную компактную подгруппу K. Группа $\mathrm{Aut}(R)$ алгебраична, поэтому, хотя она и не обязательно связна, максимальная компактная подгруппа в ней существует (хотя и не обязательно связная). Так как K компактна, на алгебре Ли $L(R)$ существует скалярное произведение, инвариантное относительно K. Это скалярное произведение порождает левоинвариантную риманову метрику f_K на R. Докажем, что f_K — метрика максимальной подвижности. Ясно, что $\mathrm{Iso}(M, f_K)$ содержит полупрямое произведение $K \cdot R$. Поскольку K — максимальная компактная подгруппа в R, в силу сформулированного выше результата из [1] получаем, что $\mathrm{Iso}(M, f_K) = K \cdot R$. Более того, если f' — более подвижная, чем f_K, метрика, то $\mathrm{Iso}(M, f')$ должна содержать $\mathrm{Iso}(M, f_K)$ в качестве собственной подгруппы, что, очевидно, невозможно. Тем самым мы указали способ построения метрик максимальной подвижности на любой односвязной треугольной унимодулярной группе Ли (в частности, на любой односвязной нильпотентной группе Ли). Более того, как следует из приведенного выше несложного рассуждения. на группе Ли такого рода существует только одна (с точностью до сопряженности групп изометрий) левоинвариантная метрика максимальной подвижности. Для неунимодулярных разрешимых групп Ли таких метрик может оказаться несколько.

Рассмотрим один конкретный случай. Пусть $R = ST_n(\mathbb{R})$ — специальная треугольная группа Ли, состоящая из верхнетреугольных невырожденных вещественных матриц. При $n = 2$ связную компоненту единицы группы $T_n(\mathbb{R})$ можно отождествить с плоскостью Лобачевского, причем выбором подходящей инвариантной метрики мы можем получить метрику произвольной отрицательной кривизны (это проверяется прямым вычислением). Ясно, что для всех этих инвариантных метрик группа изометрий будет одна и та же, на самом деле нетрудно доказать, что с точностью до изометрии все метрики на этой группе Ли будут подобны, т. е. конформно эквивалентны. Поэтому мы видим, что на однородном пространстве может быть много инвариантных метрик максимальной подвижности, но в данном случае все они между собой пропорциональны. Вообще, очевидно, что пропорциональные метрики всегда имеют одну и ту же группу изометрий.

Теорема 2. *Пусть $M = G/H$ — связное риманово однородное пространство с инвариантной метрикой f, причем $G = \mathrm{Iso}(M)$. Тогда если f — метрика максимальной или локально максимальной подвижности, то на M транзитивна некоторая подгруппа G_1 группы Ли G, радикал которой треуголен.*

Если M асферично, то указанную подгруппу G_1 можно выбрать так, что ее действие на M будет почти просто транзитивно. Если это M еще и односвязно, то G_1 будет просто транзитивна на M.

Доказательство. Для доказательства нами фактически будет использовано понятие расщепления Мальцева. Оно подробно описано в обзоре [5]. Здесь же нам понадобится не столько само это понятие, сколько одна из его конструкций (ранее похожие обобщения понятия расщепления, первоначально рассматривавшиеся только для алгебр Ли и односвязных групп Ли, были уже использованы автором в [12, 13]). Основная идея — использование алгебраического замыкания, хотя далеко не всякая группа изометрий риманова пространства будет алгебраична (см., например, [10]), поэтому требуется подходящая модификация этого понятия.

Группа Ли G в условии теоремы 2 не обязательно связна, однако при условии эффективности ее действия на M число ее связных компонент обязательно конечно. Мы будем предполагать, что она связна, этого достаточно для доказательства теоремы 2 в случае метрик локально максимальной подвижности. Для метрик максимальной подвижности необходимо учитывать и возможность того, что G несвязна, в этом случае используемые ниже конструкции могут быть должным образом обобщены (такого рода построение расщепления для групп Ли с конечным числом компонент было проведено в работе автора [12]).

Рассмотрим универсальное накрытие $\pi : \widetilde{G} \to G$. Положим $Z = \ker\pi$, тогда $G = \widetilde{G}/Z$. Далее, рассмотрим присоединенную группу, состоящую из внутренних автоморфизмов группы Ли G. Группа Ли $\mathrm{Int}(G)$ изоморфна присоединенной группе Ли $\mathrm{Ad}_G(G)$, которая естественным образом может рассматриваться как подгруппа в группе $\mathrm{GL}(L(G))$ линейных преобразований алгебры Ли $L(G)$ группы Ли G. Более того, тогда $\mathrm{Ad}_G(G)$ содержится в группе $\mathrm{Aut}(L(G))$ всех автоморфизмов алгебры Ли $L(G)$ (причем $\mathrm{Aut}(L(G))$ естественным образом изоморфна группе $\mathrm{Aut}(\widetilde{G})$ автоморфизмов универсальной накрывающей $\widetilde{G}$ группы Ли G).

Группа $\mathrm{Aut}(G)$ автоморфизмов группы Ли G может рассматриваться как подгруппа в $\mathrm{Aut}(\widetilde{G})$. Дело в том, что любой автоморфизм группы Ли, которую, как мы условились выше, мы можем считать связной, однозначно определяется своим дифференциалом, являющимся автоморфизмом алгебры Ли $L(G)$ или, что эквивалентно, однозначно связан с некоторым автоморфизмом группы Ли $\widetilde{G}$. Более точно, имеем соотношение $\mathrm{Aut}(G) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\widetilde{G}) \mid \alpha(Z) = Z\} \subset \mathrm{Aut}(\widetilde{G})$, где Z — введенная выше подгруппа в $\mathrm{Aut}(\widetilde{G})$.

Введем теперь группу $\mathrm{Aut}^*(G) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\widetilde{G}) \mid \alpha(z) = z$ для любого $z \in Z\}$. Покажем, что эта группа алгебраична. Для этого вначале заметим, что группа $\mathrm{Aut}\,\widetilde{G}$, очевидно, алгебраична, ибо она изоморфна алгебраической группе $\mathrm{Aut}(L(G))$ автоморфизмов алгебры Ли $L(G)$. При этом сама группа $\mathrm{Aut}(G)$ уже не обязательно будет алгебраичной. Например, группа автоморфизмов тора T^n при $n \geq 2$ будет бесконечна (она изоморфна по модулю центра группе всех целочисленных матриц порядка n, определитель которых обратим, т. е. равен 1 или -1). Алгебраическая же группа может, как известно, иметь только конечное число связных компонент (так как мы имеем здесь дело с вещественными группами Ли, то и алгебраические группы предполагаются определенными над $\mathbb{R}$, мы их отождествляем с их группами вещественных точек и связные компоненты рассматриваем в смысле обычной топологии).

Итак, группа $\mathrm{Aut}(\widetilde{G})$ алгебраична. Ее подгруппа $\mathrm{Aut}^*(G)$ выделяется алгебраическими условиями. Точнее, она является пересечением семейства централизаторов элементов из Z, каждый такой централизатор является, очевидно, алгебраической подгруппой, поэтому алгебраично и их пересечение. В частности, группа $\mathrm{Aut}^*(G)$ почти связна (т. е. имеет только конечное число связных компонент). Тем самым введенная нами подгруппа $\mathrm{Aut}^*(G)$ может рассматриваться как «алгебраическая компонента» группы Ли $\mathrm{Aut}\,G$. При этом группа внутренних автоморфизмов $\mathrm{Int}(G)$ связна и, значит, будучи подгруппой в $\mathrm{Aut}(G)$, на самом деле содержится и в $\mathrm{Aut}^*(G)$.

Основная идея нашей конструкции, как и идея расщеплений вообще, — это переход к алгебраическому замыканию. Дело в том, что строение алгебраических групп Ли существенно проще, чем строение произвольных групп Ли. Особенно это касается разрешимых групп Ли, которые в алгебраическом случае имеют довольно простое (по сравнению с общим случаем разрешимых групп Ли) строение. А именно, если R — некоторая алгебраическая группа Ли, то она имеет разложение $R = T \cdot U$, где U — унипотентный радикал группы R, а T — тор в R (т. е. абелева алгебраическая группа, состоящая из вполне приводимых элементов). В вещественном случае строение тора T допускает следующее уточнение (подробнее см. [14]). Тор T допускает разложение (единственное) $T = T_c \cdot T_s$, где T_c — максимальный компактный тор в T (его еще называют анизотропным подтором), а T_s — расщепимый (над $\mathbb{R}$) подтор в T. Ясно, что рассматриваемая группа R треугольна тогда и только тогда, когда $T_c = \{e\}$.

Переходим теперь к основному этапу нашей конструкции. Обозначим через $\overline{\mathrm{Int}\,G}$ алгебраическое замыкание подгруппы $\mathrm{Int}(G)$. Оно берется, вообще говоря, в $\mathrm{GL}(L(G))$, но так как $\mathrm{Aut}^*(G)$ — алгебраическая подгруппа в $\mathrm{GL}(L(G))$, содержащая $\mathrm{Int}(G)$, то это алгебраическое замыкание содержится и в $\mathrm{Aut}^*(G)$. Рассмотрим радикал R' группы $\overline{\mathrm{Int}\,G}$. Он является алгебраической разрешимой группой Ли, поэтому в нем, как указано выше, выделяется максимальный расщепимый над $\mathbb{R}$ тор T'_s. Пусть R — радикал группы Ли G, тогда его образ при присоединенном представлении обозначим через R^*. Ясно, что $R^* \subset R'$ и R' — алгебраическое замыкание своей подгруппы (даже нормального делителя) R^*. Рассмотрим пересечение $R^* \cap T_c$. Предположим, что T_c не содержится целиком в R^*, тогда существует нееденичный подтор T_1 в T_c, который имеет только тривиальное пересечение с R^*. Этот подтор — подгруппа в $\mathrm{Aut}^*(G)$ и в

$\mathrm{Aut}(G)$. Поэтому мы можем рассмотреть полупрямое произведение $G_1 = T_1 \cdot G$, которое соответствует естественному действию T_1 автоморфизмами на G.

Перейдем к рассмотрению стационарной подгруппы H рассматриваемого однородного пространства $M = G/H$. Подгруппа H компактна, так как мы предполагаем действие G на M эффективным. Из приведенной выше конструкции алгебраического замыкания легко вытекает, что H перестановочна с T_c, а потому и с T_1. Положим теперь $H_1 = T_1 \cdot H$, тогда H_1 — компактная подгруппа в G_1. Ясно, что $G_1/H_1 = M$. Более того, из конструкции подтора T_1 вытекает, что G_1 действует на M эффективно.

Предположим теперь, что на M имеется некоторая G-инвариантная метрика, которая является метрикой локально максимальной подвижности. Если в этом случае окажется (как мы предполагали выше), что тор T_c не лежит целиком в R^*, то нами выше построена группа Ли G_1, содержащая G в качестве собственной подгруппы и тоже эффективно транзитивная на M. Пусть f — указанная выше метрика, инвариантная относительно действия группы G. Мы можем усреднить ее относительно действия компактной группы T_1 и получить метрику, которая инвариантна и относительно группы G, и относительно группы G_1. Но тогда получаем, что G не является максимальной группой изометрий, что противоречит предположению. Поэтому T_c обязательно должна содержаться в R^*.

Вернемся к рассмотрению группы Ли $\overline{\mathrm{Int}(G)}$. Пусть $\overline{\mathrm{Int}(G)} = S' \cdot R'$ — ее разложение Леви (S' — ее полупростая часть, а R' — радикал, который мы уже выше рассматривали). Подгруппа $F = T_c \cdot U$, где U — унипотентный радикал в $\overline{\mathrm{Int}(G)}$, будет, очевидно, замкнутой и нормальной в $\overline{\mathrm{Int}(G)}$. Поэтому мы можем рассмотреть естественный эпиморфизм $\lambda : S' \cdot R' \to S' \cdot R'/F = T_s$. Группа Ли T_s абелева и односвязна. Рассмотрим в ней подгруппу $\lambda(\mathrm{Int}(G))$. Эта связная подгруппа обязательно замкнута (это верно для любой связной подгруппы в односвязной абелевой группе Ли) и потому имеет дополнение A, т. е. $A \times \lambda(\mathrm{Int}(G)) = T_s$. Положим $G' = \lambda^{-1}(A)$. Получим замкнутую подгруппу G' в G, которая, очевидно, транзитивна на M. Из самой конструкции группы Ли G' следует, что ее радикал треуголен. Следовательно, мы получили нужную нам подгруппу в G. Этим доказана первая (и основная) часть теоремы 2.

Если рассматриваемое однородное пространство асферично, то, комбинируя уже доказанное утверждение с предложением 1 (оно дает почти просто транзитивную подгруппу, радикал которой, как следует из ее конструкции в доказательстве предложения, останется треугольным), приходим к доказательству и второй части теоремы 2.

Следствие 1. *Если M — асферическое однородное риманово многообразие с метрикой (локально) максимальной подвижности, то на нем существует почти просто транзитивное изометричное действие асферичной группы Ли с треугольным радикалом. Если эта группа Ли односвязна, то указанное действие будет просто транзитивным. В этом случае M изометрично указанной группе Ли, снабженной некоторой инвариантной римановой метрикой.*

Следствие 2. *Если M — риманово солвмногообразие с метрикой (локально) максимальной подвижности, то на нем существует почти просто транзитивное изометричное действие треугольной группы Ли T (фактически максимальной треугольной подгруппы в группе изометрий подходящей метрики на M).*

Если M или эта группа Ли T односвязны, то указанное действие будет просто транзитивным. В этом случае M изометрично треугольной разрешимой группе Ли T, снабженной некоторой инвариантной римановой метрикой.

В частности, на каждой односвязной разрешимой группе Ли G существует такая инвариантная риманова метрика, с которой эта группа Ли изометрична некоторой треугольной группе Ли G^* с инвариантной метрикой, причем если G унимодулярна, то унимодулярной можно выбрать и G^*. У групп Ли G и G^* группы изометрий изоморфны.

В дополнение к следствию 2 можно еще доказать, что если исходная разрешимая группа Ли G содержит решетку Γ, т. е. дискретную подгруппу с компактным фактор-пространством, то группу Ли G^* из этого следствия тоже можно выбрать так, что и она будет содержать некоторую решетку (не обязательно изоморфную Γ, но соизмеримую с ней). Это вытекает из равномерности пересечения $\Gamma \cap N$ решетки с N-нильрадикалом группы Ли G (см. [5]), а также из конструкции группы Ли G^* в доказательстве теоремы 2.

Так как треугольных групп Ли небольшой размерности не так много, следствие 2 позволяет вычислить группы изометрий для всех разрешимых групп Ли малой размерности. Это оказывается полезным при изучении геометрий Терстона малых размерностей. В частности, легко можно получить ту часть известных классификаций геометрий Терстона размерностей 3 и 4, которые касаются асферичного случая (а также получить такого типа частичную классификацию и в размерности 5). Отметим, что в размерностях 3 и 4 геометрий Терстона асферичный случай занимает весьма важное место.

Полученные выше результаты указывают на особую роль, которую играют треугольные группы Ли при изучении римановых однородных пространств вообще и римановых солвмногообразий в особенности. Поэтому ниже приводятся некоторые полезные свойства треугольных групп Ли, которые вместе не так просто найти в литературе (исключая обзор [5], где приведены еще и другие свойства треугольных подгрупп).

1. Любая треугольная группа Ли разрешима.

2. Комплексная группа Ли треугольна тогда и только тогда, когда она абелева.

3. Экспоненциальное отображение $\exp : L(T) \to T$ для произвольной связной треугольной группы Ли является отображением на T, а если T односвязна, то оно будет диффеоморфизмом.

4. Для любого подмножества X в связной треугольной группе Ли T его централизатор в T связен. В частности, центр связной треугольной группы Ли связен.

5. Максимальная связная компактная подгруппа в связной треугольной группе Ли единственна (и потому центральна).

6. Две односвязные унимодулярные треугольные группы Ли с инвариантными римановыми метриками изометричны (как римановы многообразия) тогда и только тогда, когда они изоморфны и изоморфизм этот сохраняет метрику (см. [10]).

С теоремой 2 тесно связано понятие полярного разложения для групп Ли. Напомним, что полярным разложением связной группы Ли G называется ее представление в виде произведения $G = K \cdot T$ максимальной компактной подгруппы K и некоторой треугольной подгруппы T, для которых $K \cap T = \{e\}$. Группа Ли G называется *эффективной*, если в K нет нетривиальных нормальных делителей группы G. Например, полярное разложение для линейных полупростых групп Ли — это разложение Ивасавы. В [4] доказано, что если в эффективной группе Ли G имеются полярные разложения, то все они сопряжены с помощью внутренних автоморфизмов группы G. Там же приведен и один критерий существования полярных разложений. Полярные разложения существуют далеко не для всех групп Ли. Например, группа $\mathscr{A}$ — универсальная накрывающая для $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ — полярного разложения не имеет, так как для нее $K = \{e\}$, а сама группа не треугольна (она даже не разрешима). Отметим, что для некоторой подходящей инвариантной метрики группа Ли $\mathscr{A}$ все же изометрична разрешимой группе Ли $C \times T$, где C — одномерная абелева группа Ли (фактически она отождествляется с универсальной накрывающей для SO_2-максимальной компактной подгруппы в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, а T — двумерная односвязная разрешимая группа Ли (она единственная неабелева односвязная разрешимая двумерная группа Ли). Этот пример еще раз показывает, как похожи свойства группы Ли $\mathscr{A}$ на свойства разрешимых групп Ли. Он также показывает, что группы Ли, просто транзитивные на некотором асферичном римановом пространстве и имеющие треугольные радикалы, не всегда будут изоморфны между собой (в частности, на солвмногообразии может просто транзитивно действовать и полупростая группа Ли). Не имеют полярного разложения и многие разрешимые группы Ли, например, произвольная односвязная разрешимая группа Ли, не являющаяся треугольной.

Следствие 2, в частности, показывает, что полярные разложения существуют для групп изометрий некоторых инвариантных метрик на солвмногообразиях. При этом фигурирующая здесь треугольная подгруппа — в точности максимальная треугольная подгруппа (пересечение ее с максимальной компактной подгруппой должно быть тривиальным в силу эффективности действия, что сразу вытекает из приведенного выше свойства 4). Поэтому она единственна с точностью до сопряженности, обозначим ее через T_M, так как зависит только от риманова солвмногообразия M (при условии, что на нем рассматривается метрика максимальной подвижности). Можно предложить некоторое обобщение понятия полярного разложения — представление группы Ли G в виде произведения двух непересекающихся замкнутых подгрупп $G = K \cdot F$, где K — максимальная компактная подгруппа в G, а F — некоторая асферичная подгруппа. В [15] доказано, что такое разложение имеет произвольная односвязная группа Ли. Однако, как видно из конструкции таких разложений в [15], они в общем случае неединственны (с точностью до сопряжения). Дополнительно можно потребовать треугольности радикала группы F, но тогда такие обобщенные «полярные разложения» существуют не для всех групп Ли, эффективно транзитивных на асферичных однородных пространствах.

Группы изометрий треугольных групп Ли особенно просто устроены в случае, когда они унимодулярны (см. цитированный выше результат из [1]). Поэтому мы уделим теперь особое внимание унимодулярному случаю. Отметим некоторые важные случаи, когда имеет место унимодулярность группы Ли. Во-первых, унимодулярна любая нильпотентная группа Ли. Во-вторых, унимодулярна любая полупростая группа Ли. Группа Ли унимодулярна тогда и только тогда, когда унимодулярен ее радикал. Отсюда видно, что самый сложный объект с точки зрения унимодулярности — это разрешимые группы Ли, не являющиеся нильпотентными. И, наконец, унимодулярной будет любая группа Ли, которая имеет решетку (т. е. дискретную подгруппу, фактор-пространство по которой имеет конечную меру; в частности, речь часто идет о равномерных решетках, для которых фактор-пространство компактно). Таковы будут, например, те группы Ли, которые транзитивны на геометриях Терстона. С другой стороны, полезно отметить, что максимальные треугольные подгруппы в полупростых группах Ли всегда неунимодулярны (то же верно и для любых нетривиальных параболических подгрупп в некомпактных простых группах Ли). В целом геометрия неунимодулярных групп Ли устроена более сложно, чем унимодулярных, но и более интересно (например, только на неунимодулярных группах Ли реализуется геометрия Лобачевского, см. ниже).

Известны две конструкции, позволяющие от произвольных групп (и алгебр) Ли переходить к унимодулярным. Обе они основаны на понятии модулярной функции. Модулярная функция на группе Ли показывает, как изменяется левоинвариантная мера Хаара при правых сдвигах (при таком сдвиге мера Хаара переходит в пропорциональную ей, коэффициент пропорциональности и есть модулярная функция). Для связной группы Ли G модулярная функция Δ_G равна $\det(\mathrm{Ad}_G)$, а для алгебры Ли модулярная функция является инфинитезимальным аналогом модулярной функции для групп Ли и равна $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{L(G)})$. В терминах модулярной функции условие унимодулярности группы Ли (соответственно алгебры Ли) имеет вид $\Delta_G = 1$ (соответственно $\Delta_{L(G)} = 0$). Модулярная функция является характером (группы или алгебры Ли). Ядро модулярной функции называется модулярным ядром, оно является унимодулярной группой (алгеброй) Ли. Следовательно, если группа (алгебра) Ли не унимодулярна, то в ней имеется унимодулярная подгруппа (подалгебра) коразмерности 1. Другая конструкция в некотором смысле противоположна только что приведенной. В ней неунимодулярная группа (алгебра) Ли вкладывается в унимодулярную в качестве подгруппы (подалгебры) коразмерности 1. Для групп Ли это вложение строится следующим образом. Пусть G — некоторая неунимодулярная группа Ли, а Δ_G — ее модулярная функция, которую мы будем рассматривать как гомоморфизм группы Ли G в мультипликативную группу вещественных чисел. Рассмотрим полупрямое произведение $G_* = G \cdot_{\Delta_G^{-1}} \mathbb{R}$ (действие G на $\mathbb{R}$ производится делением на значения модулярной функции). Нетрудно проверить, что так построенная группа Ли G_* унимодулярна. Она содержит G в виде подгруппы коразмерности 1. Для алгебр Ли берется полупрямая сумма, отвечающая гомоморфизму $-\delta_{L(G)}$ — дифференциалу функции Δ_G^{-1}. В геометрии обе эти конструкции позволяют частично распространять сведения об изометриях унимодулярных групп Ли на неунимодулярный случай. Особо полезна здесь вторая конструкция.

Теорема 3. *Пусть G — односвязная разрешимая группа Ли. Тогда существует такая риманова инвариантная метрика на G, что G изометрична замкнутой подгруппе коразмерности 1 в некоторой односвязной треугольной унимодулярной группе Ли G_1.*

Доказательство. Рассмотрим на G некоторую инвариантную риманову метрику максимальной подвижности. Тогда в силу следствия 2 группа Ли G изометрична некоторой треугольной односвязной группе Ли G'. Группа Ли G' может быть вложена в качестве замкнутой подгруппы в унимодулярную группу Ли вида $G_1 = G' \cdot \mathbb{R}$ (см. выше). Легко понять, что группа Ли G_1 треугольна (в силу ее конструкции и треугольности группы Ли G'). На G_1 выберем такую инвариантную метрику, которая является распространением метрики, заданной на G'. В результате приходим к требуемому вложению.

Так как группа изометрий треугольной унимодулярной группы Ли устроена довольно несложно, теорема 3 может оказаться полезной при изучении некоторых геометрических характеристик произвольных разрешимых групп Ли.

В заключение мы рассмотрим несколько отдельных вопросов, касающихся группы изометрий треугольных групп Ли. Как следует из описаниях групп их изометрий (см. выше), для них основная проблема — это вычисление группы вращений. Группа вращений есть замкнутая подгруппа в максимальной компактной подгруппе K группы автоморфизмов исходной треугольной группы Ли G. Отметим, что далеко не всякая компактная подгруппа группы автоморфизмов может быть реализована в виде группы вращений некоторой инвариантной метрики на G. Например, для абелевой группы Ли $\mathbb{R}^n$ максимальная компактная подгруппа группы изометрий — это $K = \mathrm{O}_n$. С другой стороны, группа вращений любой инвариантной метрики на $\mathbb{R}^n$ изоморфна O_n, поэтому никакие другие компактные подгруппы в K группой вращений для инвариантной метрики здесь быть не могут. Аналогичное положение имеет место для групп Ли вида $T \times \mathbb{R}^n$, где T — некоторая треугольная унимодулярная группа Ли. Для них по аналогичной причине тоже далеко не все подгруппы в максимальной компактной подгруппе группы автоморфизмов могут быть реализованы в виде группы вращений некоторой инвариантной метрики. В [16] доказано, что любая связная компактная группа Ли с точностью до локального изоморфизма может быть реализована как группа вращений подходящей инвариантной римановой метрики на некоторой нильпотентной группе Ли.

При изучении групп изометрий разрешимых групп Ли (особенно треугольных) малой размерности может быть полезным следующее

Предложение 2. *Пусть G — некоторая односвязная разрешимая группа Ли, а K — максимальная связная компактная подгруппа в группе $\mathrm{Aut}(G)$ ее автоморфизмов. Тогда $\dim K \leq b(b-1)/2$, где $b = b_1(N) = \dim N/[N,N]$ — размерность абелианизации $N_a = N/[N,N]$ нильрадикала N группы G (или, что то же, первое число Бетти алгебры Ли $L(N)$).*

Более того, группа K вкладывается в качестве подгруппы в $\mathrm{GL}(L(N)_a)$ — группу линейных преобразований абелианизации нильрадикала $L(N)$ алгебры Ли $L(G)$.

Доказательство. Рассмотрим действие K на $L(N)$, порожденное сопряжениями. Это действие вполне приводимо (ибо K компактна). Оказывается, что на дополнении к $L(N)$ оно тривиально. Это вытекает из следующего довольно хорошо известного факта: любое дифференцирование разрешимой алгебры Ли $L(G)$ переводит ее в $L(N)$. Этот факт приведен, например, в [1] (со ссылкой на [3]), однако специалистам по теории групп и алгебр Ли он был известен и ранее. Доказательство может быть мгновенно получено рассмотрением полупрямой суммы $L(K)$ и $L(R)$ и применением к получившейся алгебре Ли известного факта о нильпотентности радикала коммутанта любой алгебры Ли.

Итак, действие K на дополнении к $L(N)$ тривиально, поэтому группа автоморфизмов K вкладывается в виде подгруппы в группу $\mathrm{Aut}(L(N))$ автоморфизмов алгебры Ли $L(N)$. Далее, как известно, дифференцирование нильпотентной алгебры Ли, тривиальное на ее абелианизации, само является тривиальным (см. например [17]). Отсюда ввиду полной приводимости действия K на $L(N)$ вытекает, что K можно рассматривать как подгруппу в $\mathrm{GL}(L(N)_a)$, а потому и как подгруппу в ортогональной группе $\mathrm{O}(L(N)_a)$. Так как $\dim(L(N)_a = b$, то ясно, что $\dim K \leq \dim \mathrm{O}_b = b(b-1)/2$.

Известно, что число образующих нильпотентной алгебры Ли равно размерности ее абелианизации (см. например, [17]). Отсюда и из предложения 2 получаем

Следствие 3. *Пусть R — односвязная треугольная группа Ли, снабженная инвариантной римановой метрикой, а K — связная компонента единицы группы ее вращений. Далее, пусть N — нильрадикал в R. Тогда*

(i) *Если $L(N)$ имеет не более чем две образующие, то K тривиальна или изоморфна* SO_2. *Группа* $\mathrm{Iso}(R)_0$ *(связная компонента единицы группы изометрий) при этом всегда разрешима.*

(ii) *Если $L(N)$ имеет три образующие, то K тривиальна или изоморфна* SO_2 *или* SO_3. *Группа* $\mathrm{Iso}(R)_0$ *при этом разрешима или имеет полупростую часть, изоморфную* SO_3 *или* SU_2.

Доказательство. Все сводится к простому замечанию: если $L(N)$ имеет не более двух образующих, то размерность группы K в силу предложения 2 не больше, чем 1, а при трех образующих — не больше, чем 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gordon C., Wilson E.* Isometry groups of Riemannian solvmanifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 307, N 1. P. 245–269.

2. *Gordon C., Wilson E.* The fine structure of transitive riemannian isometry groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 289, N 1. P. 367–380.

3. *Azencott R. Wilson E.* Homogeneous spaces with negative curvature. II // Mem. Amer. Math. Soc. 1976. N 178. P. 1–124.

4. *Алексеевский Д. В.* Классификация кватернионных пространств с транзитивной разрешимой группой изометрий // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39, № 2. С. 315–362.

5. *Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Строение групп и алгебр Ли // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 41. С. 5–258. (Итоги науки и техники).

6. *Горбацевич В. В.* Об асферичных однородных пространствах // Мат. сб. 1976. Т. 100, № 2. С. 248–265.

7. *Mostow G.* Factor spaces of solvable groups // Ann. Math. 1954. V. 60, N 1. P. 1–27.

8. *Janos L.* On maximal groups of isometries // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 28, N 2. P. 584–586.

9. *Bowers Ph.* Maximally symmetric homogeneous metrics on manifolds // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1990. V. 107, N 1. P. 115–126.

10. *Алексеевский Д. В.* Сопряженность полярных разложений групп Ли // Мат. сб. 1971. Т. 84, № 1. С. 14–26.

11. *Рагунатан М.* Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.

12. *Горбацевич В. В.* Расщепления групп Ли и его применения к изучению однородных пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43, № 6. С. 1227–1258.

13. *Горбацевич В. В.* Расслоение Зейферта для плезиокомпактного однородного пространства // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 301–313.

14. *Борель А.* Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.

15. *Горбацевич В. В.* Об одном классе разложений полупростых групп и алгебр Ли // Мат. сб. 1974. Т. 95, № 2. С. 294–304.

16. *Bajo I.* Homogeneous nilmanifolds with prescribed isotropy // Ann. Global Anal. Appl. 1995. V. 13, N 1. P. 149–154.

17. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1975.

Статья поступила 5 мая 2000 г.

Горбацевич Владимир Витальевич
Московский гос. технологический университет им. К. Э. Циолковского
ул. Оршанская, 3, Москва 121552