Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 512.541

О ЧИСТОТЕ И КВАЗИРАВЕНСТВЕ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

М. А. Турманов

Аннотация: Изучается чистота по Кону в абелевой группе, рассматриваемой как левый модуль над своим кольцом эндоморфизмов. Доказана теорема о том, что если абелева группа G без кручения конечного ранга квазиравна группе $H_1 \oplus \dots \oplus H_n$, в которой все слагаемые H_i являются чисто простыми модулями над своими кольцами эндоморфизмов, то модуль ${}_{E(G)}G$ чисто полупрост. Эта теорема позволяет строить чисто полупростые абелевы группы над своими кольцами эндоморфизмов произвольного конечного ранга и сводит задачу об эндочисто полупростоте абелевых групп к этой же задаче в классе сильно неразложимых абелевых групп. Библиогр. 5.

Абелевы группы без кручения G и H называются *квазиравными* ($G \approx H$), если $\lambda G \subset H \subset G$ для некоторого натурального λ. Известно [1], что квазиравенство абелевых групп без кручения можно представлять как равенство в подходящей фактор-категории. Поэтому при изучении тех или иных свойств абелевых групп без кручения обычно стараются доказать, что изучаемое свойство сохраняется при переходе к квазиравной группе. Особенно часто этот прием используется при изучении модульных свойств абелевых групп, рассматриваемых как левые модули над своими кольцами эндоморфизмов. С другой стороны, одной из актуальных проблем теории абелевых групп является проблема изучения чистот в категории абелевых групп [2]. В данной работе рассматривается чистота по П. Кону [3] для абелевых групп как модулей над своими кольцами эндоморфизмов. Особенность изучения свойств чистоты для абелевой группы G как модуля ${}_{E(G)}G$ объясняется тем, что эта ситуация более общая, нежели изучение свойств чистоты для унитарного модуля над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей. Действительно, если ${}_RM$ — произвольный унитарный левый модуль и M^+ — его абелева группа, то каждый элемент кольца R можно отождествить с подходящим эндоморфизмом из кольца $E(M^+)$ при каноническом гомоморфизме колец $R \to E(M^+)$. Поэтому если ${}_{E(M^+)}N$ — чистый подмодуль в ${}_{E(M^+)}M^+$, то ${}_RN$ — чистый подмодуль в ${}_RM$. В данной работе будут изучены связи между чистотой, сервантностью и кразиразложениями абелевых групп без кручения конечного ранга.

Приведем необходимые определения и обозначения, взятые из [1, 4].

Под квазиразложением группы G понимается семейство ненулевых сервантных подгрупп $\{G_i \mid i \in I\}$ группы G такое, что $G \approx \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$. При этом каждая подгруппа G_i называется *квазислагаемым* группы G. Группа называется *сильно неразложимой*, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями. Если в квазиразложении группы все квазислагаемые сильно неразложимы, то говорят о ее *полном квазиразложении*. Через $E(G)$ будем обозначать кольцо

© 2001 Турманов М. А.

эндоморфизмов группы G и использовать известный факт, что если $G \approx H$, то $\lambda E(G) \subset E(H)$ и $E(H)\lambda \subset E(G)$. Подмодуль $_EA$ модуля $_EG$ называется *чистым*, если всякая конечная система уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji} x_i = a_j \quad (j = 1, \ldots, m)$$

с коэффициентами $\varphi_{ji} \in E$ и правыми частями $a_j \in A$, имеющая решение в G, имеет решение и в A. Модуль называется *чисто простым*, если он не содержит в себе собственных чистых подмодулей, и *чисто полупростым*, если он изоморфен прямой сумме чисто простых модулей. Вполне характеристическую подгруппу A группы G такую, что $_{E(G)}A$ является чистым подмодулем левого модуля $_{E(G)}G$, будем называть *эндочистым подмодулем* группы G. В этом случае A также является сервантной подгруппой в G. В [5] показано, что чистая полупростота модуля $_{E(G)}G$ равносильна выделению в нем прямым слагаемым каждого его чистого подмодуля. Напомним, что абелева группа G называется *жесткой*, если кольцо $E(G)$ лежит в поле рациональных чисел Q. Легко проверить, что в жесткой группе всякая сервантная подгруппа представляет собой эндочистый подмодуль. Поэтому для жесткой группы G модуль $_{E(G)}G$ не является чисто простым, если ранг группы G больше 1.

Перейдем теперь к изучению связи между чисто полупростотой модуля $_{E(G)}G$ и полным квазиразложением группы G.

Лемма 1. *Пусть подгруппа A группы без кручения G является одновременно квазислагаемым и эндочистым подмодулем в G. Тогда $_{E(G)}A$ выделяется прямым слагаемым в модуле $_{E(G)}G$.*

Доказательство. Пусть $\lambda G \subset A \oplus B \subset G$, $E = E(G)$ и $_EA$ — чистый подмодуль модуля $_EG$. Через δ обозначим квазипроекцию G на A [4]. Тогда $\delta g = \pi(\lambda g)$ и $\delta a = \lambda a$ для любых $g \in G$, $a \in A$, где π — проекция $A \oplus B$ на A. Пусть g — произвольный элемент группы G и $\lambda g = a + b$ ($a \in A$, $b \in B$). Тогда $\delta g = a$. В силу чистоты $_EA$ в $_EG$ и ввиду $\delta \in E$ найдется элемент $\bar{a} \in A$ такой, что $\delta\bar{a} = \lambda\bar{a} = a$. Отсюда $b = \lambda(g - \bar{a})$. Из сервантности B в G следует, что $\bar{b} = g - \bar{a} \in B$. Значит, $g = \bar{a} + \bar{b}$ и $G = A \oplus B$. Снова в силу чистоты $_EA$ в $_EG$ получаем $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}(B, A) = 0$, т. е. $_EG = {_EA} \oplus {_EB}$.

Теорема 2. *Если группа G обладает квазиразложением $\lambda G \subset \bigoplus_{i\in I} H_i \subset G$, в котором каждое квазислагаемое H_i является чисто простым модулем $_{E(H_i)}H_i$ над своим кольцом эндоморфизмов, то модуль $_{E(G)}G$ чисто полупрост.*

Доказательство. Пусть $\lambda G \subset \bigoplus_{i\in I} H_i \subset G$, где H_i — чисто простые модули над своими кольцами эндоморфизмов и A — эндочистый подмодуль группы G. Для доказательства теоремы согласно [5] достаточно показать, что A выделяется прямым слагаемым в G. Но для этого согласно лемме 1 достаточно показать, что A является квазислагаемым группы G. Покажем это в три шага.

1. Имеем $\lambda A \subset \bigoplus_{i\in I} A \cap H_i \subset A$, где $A \cap H_i$ — сервантная подгруппа в A и в H_i для всех $i \in I$. Покажем, что $A \cap H_i$ — вполне характеристическая подгруппа в H_i для всех $i \in I$. Действительно, если $\alpha \in E(H_i)$ и $a \in A \cap H_i$, то можно считать, что $\alpha\lambda \in E(G)$, и поэтому, с одной стороны, $\alpha a \in H_i$, а с другой стороны, $\lambda(\alpha a) = (\alpha\lambda)a \in A$. В силу сервантности $A \cap H_i$ в H_i заключаем, что $\alpha a \in A \cap H_i$.

2. Зафиксируем $i = 1$ и покажем, что $A \cap H_1$ является эндочистым подмодулем в H_1. Если $\overline{H}_1 = \langle \bigoplus_{i \neq 1} H_i \rangle_*$ — сервантная оболочка суммы всех квазислагаемых, кроме H_1, то $\lambda G \subset H_1 \oplus \overline{H}_1 \subset G$ и $\lambda A \subset A \cap H_1 \oplus A \cap \overline{H}_1 \subset A$. Пусть дана система уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji} x_i = a_j \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

где $\varphi_{ji} \in E(H_1)$, $a_j \in A \cap H_1$, имеющая решение $x_i = h_i$ в H_1. Для наглядности идеи доказательства рассмотрим сначала случай $j = 1$, $n = 2$. Система (1) имеет в этом случае вид $\varphi_{11} x_1 + \varphi_{12} x_2 = a_1$. Составим матрицы

$$\psi_{ki1} = \begin{pmatrix} \varphi_{1i} & 0 \\ 0 & \delta_{ki} \end{pmatrix}, \quad \delta_{ki} \ \text{— символ Кронекера,}$$

где $k = 1, 2$, $i = 1, 2$. Тогда $\psi_{ki1} \in E(H_1 \oplus \overline{H}_1)$, $\psi_{ki1}\lambda \in E(G)$ и система уравнений

$$\begin{cases} (\psi_{111}\lambda) x_1 + (\psi_{121}\lambda) x_2 = \lambda a_1, \\ (\psi_{211}\lambda) x_1 + (\psi_{221}\lambda) x_2 = \lambda a_1 \end{cases}$$

имеет решение $x_i = h_i$ в G. В силу чистоты ${}_{E(G)}A$ в ${}_{E(G)}G$ найдутся элементы $b_1, b_2 \in A$ такие, что

$$(\psi_{k11}\lambda) b_1 + (\psi_{k21}\lambda) b_2 = \lambda a_1, \quad k = 1, 2. \tag{2}$$

Пусть $\lambda b_i = a_{1i} + a_{2i}$, где $a_{1i} \in A \cap H_1$, $a_{2i} \in A \cap \overline{H}_1$ для всех $i = 1, 2$. Тогда $(\psi_{ki1}\lambda) b_i = \varphi_{1i} a_{1i} + \delta_{ki} a_{2i}$. Подставляя полученные значения в (2), имеем

$$\begin{cases} \varphi_{11} a_{11} + a_{21} + \varphi_{12} a_{12} + 0 = \lambda a_1, \\ \varphi_{11} a_{11} + 0 + \varphi_{12} a_{12} + a_{22} = \lambda a_1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $a_{21} = a_{22} = 0$, значит, $\lambda b_i = a_{1i} \in A \cap H_1$ и $\varphi_{11} b_1 + \varphi_{12} b_2 = a_1$. Таким образом, элементы $b_1, b_2 \in A \cap H_1$ образуют решение исходного уравнения в $A \cap H_1$. Кратко, идея состоит в том, чтобы с помощью матриц ψ_{kij} разбросать элементы a_{2i} поодиночке среди nm новых уравнений и тем самым аннулировать их. В общем случае составим матрицы

$$\psi_{kij} = \begin{pmatrix} \varphi_{ji} & 0 \\ 0 & \delta_{ki} \end{pmatrix}, \quad \delta_{ki} \ \text{— символ Кронекера,}$$

для всех $k, i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j = 1, \ldots, m$. Тогда получим $\psi_{kij} \in E(H_1 \oplus \overline{H}_1)$, $\psi_{kij}\lambda \in E(G)$ и систему nm уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} (\psi_{kij}\lambda) x_i = \lambda a_j \quad (k = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m),$$

которая имеет решение $x_i = h_i$ в G. В силу чистоты ${}_{E(G)}A$ в ${}_{E(G)}G$ найдутся элементы $b_1, \ldots, b_n \in A$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{n} (\psi_{kij}\lambda) b_i = \lambda a_j \quad (k = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

Пусть $\lambda b_i = a_{1i} + a_{2i}$, где $a_{1i} \in A \cap H_1$, $a_{2i} \in A \cap \overline{H}_1$ для всех $1, \dots, n$, тогда $(\psi_{kij}\lambda)b_i = \varphi_{ji}a_{1i} + \delta_{ki}a_{2i}$, $\varphi_{ji}a_{1i} \in A \cap H_1$, $\delta_{ki}a_{2i} \subset A \cap \overline{H}_1$. Подставляя полученные значения в систему (3), приходим к тождествам

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji}a_{1i} = \lambda a_j; \quad \sum_{i=1}^{n} \delta_{ki}a_{2i} = 0 \quad (j = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n). \tag{4}$$

Из второй системы тождеств следует, что $a_{21} = a_{22} = \dots = a_{2n} = 0$. Тем самым $\lambda b_i = a_{1i} \in A \cap H_1$ и $b_i \in A$ для всех $i = 1, \dots, n$. В силу сервантности $A \cap H_1$ в A получаем, что $b_i \in A \cap H_1$, значит, элементы b_i попадают в область определения эндоморфизмов φ_{ji}. Подставляя в первую систему тождеств системы (4) вместо элементов a_{1i} элементы λb_i, получим $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{ji}b_i = a_j \quad (j = 1, \dots, m)$. Тем самым найдено решение $x_i = b_i$ системы уравнений (1) в $A \cap H_1$, что и требовалось доказать. Аналогично можно показать, что $A \cap H_i$ — эндочистый подмодуль в H_i для всех $i \in I$.

3. В силу чистой простоты модулей ${}_{E(H_i)}H_i$ для всех $i \in I$ получим, что либо $A \cap H_i = 0$, либо $A \cap H_i = H_i$. Отсюда $\lambda A \subset \bigoplus\limits_{i \in J} H_i \subset A$ для некоторого подмножества J. Но тогда можно показать, что $\lambda G \subset A \oplus B \subset G$, где $A = \langle \bigoplus\limits_{i \in J} H_i \rangle_*$ и $B = \langle \bigoplus\limits_{i \in I \setminus J} H_i \rangle_*$. Таким образом, A выделяется квазислагаемым в G и остается применить лемму 1.

Теорема 2 позволяет строить чисто полупростые абелевы группы над своими кольцами эндоморфизмов произвольного конечного ранга. Также теорема 2 сводит задачу о чисто полупростоте модуля ${}_{E(G)}G$ для произвольной абелевой группы G без кручения к задаче о чистой простоте модуля ${}_{E(H)}H$ для сильно неразложимой абелевой группы без кручения. Естественно задаться обратным вопросом: если абелева группа G без кручения обладает полным квазиразложением $G \approx \bigoplus\limits_{i \in I} H_i$ и модуль ${}_{E(G)}G$ чисто полупрост, то являются ли модули ${}_{E(H_i)}H_i$ чисто простыми для каждого $i \in I$? В частном случае, когда число квазислагаемых в полном квазиразложении группы G совпадает с числом чисто простых подмодулей в прямом разложении модуля ${}_{E(G)}G$, положительный ответ очевиден в силу теоремы Йонсона [1]. В общем же случае это не так. Покажем это на примере группы G без кручения ранга 3. Пусть $\lambda G \subset G_1 \oplus G_2 \subset G$ — полное квазиразложение группы G, где G_1, G_2 — жесткие группы рангов $r(G_i) = i$, $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \neq 0$ и $\lambda \neq 1$. Покажем, что модуль ${}_{E(G)}G$ чисто прост. При этом будем пользоваться тем, что если A — эндочистый подмодуль в G, то $A \neq G_1$ и $A \neq G_2$, так как в противном случае ${}_{E(G)}A$ выделяется прямым слагаемым в модуле ${}_{E(G)}G$, но это противоречит условию $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \neq 0$.

1. Допустим, что G содержит эндочистый подмодуль A ранга 2. Тогда $\lambda A \subset (A \cap G_1) \oplus (A \cap G_2) \subset A$. Так как $A \neq G_2$, то $A \approx G_1 \oplus B$, где B — сервантная подгруппа в G_2. Поскольку $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \neq 0$, то $\mathrm{Hom}(G_1, B) \neq 0$. Действительно, если $\varphi : G_1 \to G_2$, то $\varphi\lambda \in E(G)$ и для всех $x \in G_1$ имеем $(\varphi\lambda)x \in A \cap G_2 = B$, значит, $\varphi\lambda : G_1 \to B$. Следовательно, типы $t(G_1)$ и $t(B)$ сравнимы. Так как $t(B) \geq t(G_1)$, то $t(x) = t(G_1)$ для любого элемента $x \in A \setminus B$. Отсюда по лемме Бэра ([4, лемма 1.12] или [1, предложение 86.5]) получаем $A = D \oplus B$, где $D \cong G_1$. Без потери общности можно считать $D = G_1$, ибо $G_1 \subset D \oplus B$, т. е. $G_1 \oplus G_2 \subset D \oplus G_2$ и $\lambda G \subset D \oplus G_2 \subset G$. Итак, $A = G_1 \oplus B \subset G_1 \oplus G_2$. Возьмем элемент $g \in G \setminus G_1 \oplus G_2$. Тогда $\lambda g = h_1 + h_2$ ($h_i \in G_i$), причем

$h_1, h_2 \neq 0$. Пусть $\pi : G_1 \oplus G_2 \to G_1$ — проекция. Тогда $\pi\lambda \in E(G)$ и $\pi\lambda(z) = \lambda z$ для всех $z \in G_1$. Отсюда уравнение $\pi\lambda x = h_1$ ($h_1 \in G_1 \subset A$) имеет решение $x = g$ в G. В силу чистоты ${}_{E(G)}A$ в ${}_{E(G)}G$ найдется элемент $a \in A$ такой, что $a = a_1 + b$ ($a_1 \in G_1$, $b \in B$) и $\pi\lambda a = h_1$, откуда $\lambda a_1 = h_1$. Но тогда $h_2 = \lambda(g - a_1)$ и вследствие сервантности G_2 в G получаем, что $g - a_1 = a_2 \in G_2$. Таким образом, $g = a_1 + a_2 \in G_1 \oplus G_2$. Получено противоречие с условием $g \notin G_1 \oplus G_2$, которое означает, что группа G не может содержать эндочистых подмодулей ранга 2.

2. Допустим, что G содержит эндочистый подмодуль A ранга 1. Тогда $A \subset G_2$ и $\mathrm{Hom}(G_1, A) = 0$. Пусть $\{g_1, g_2, g_3\}$ — максимальная независимая система элементов группы G такая, что $G_1 = \langle g_1 \rangle_*$, $g_2 \in \sum\limits_{f : G_1 \to G_2} f(G_1)$ и $A = \langle g_3 \rangle_*$. Тогда кольцо квазиэндоморфизмов группы G имеет вид

$$R(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ t & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \mid r, s, t \in Q \right\}.$$

Возьмем элемент $g \in G \setminus G_1 \oplus G_2$. Тогда $\lambda g = h_1 + h_2$ ($h_i \in G_i$), причем $h_1, h_2 \neq 0$. Расписав λg по базису, получим $n\lambda g = k_1 g_1 + k_2 g_2 + k_3 g_3$, где $n, k_i \in Z$ и $k_1 g_1 + k_2 g_2 \in G_1 \oplus \langle g_2 \rangle_*$. Покажем, что $G_1 \oplus \langle g_2 \rangle_*$ является сервантной подгруппой в G. Пусть $H = \{g \in G \mid \lambda g \in G_1 \oplus \langle g_2 \rangle_*\}$, тем самым подгруппа H сервантна в G и $\lambda H \subset G_1 \oplus \langle g_2 \rangle_* \subset H$. Так как $t(G_1) \leq t(g_2)$, то $H = G_1 \oplus \langle g_2 \rangle_*$ (здесь те же рассуждения, что и в 1 относительно прямого разложения подгруппы A). Рассмотрим матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -k_2/k_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

из $R(G)$. Существует число $m \in Z$ такое, что $m\alpha \in E(G)$ и $m\alpha g = \frac{m}{n\lambda} k_3 g_3 \in A$. В силу чистоты ${}_{E(G)}A$ в ${}_{E(G)}G$ найдется элемент $a \in A$ такой, что $m\alpha g = m\alpha a$, т. е. $a = \frac{k_3}{n\lambda} g_3$. Следовательно, $g - a = \frac{1}{n\lambda}(k_1 g_1 + k_2 g_2) \in G$. Но тогда из сервантности $G_1 \oplus \langle g_2 \rangle_*$ в G вытекает, что $\frac{1}{n\lambda}(k_1 g_1 + k_2 g_2) \in G_1 \oplus \langle g_2 \rangle_*$. Итак, $g \in G_1 \oplus \langle g_2 \rangle_* \oplus A \subset G_1 \oplus G_2$. Получено противоречие с условием $g \notin G_1 \oplus G_2$, которое означает, что модуль ${}_{E(G)}G$ чисто прост.

Таким образом, если абелева группа G без кручения ранга 3 квазиравна прямой сумме жестких групп G_1, G_2 рангов 1, 2 соответственно и $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \neq 0$, то модуль ${}_{E(G)}G$ чисто прост, хотя модуль ${}_{E(G_2)}G_2$ не является чисто простым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Наука, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
2. *Мишина А. П., Скорняков Л. А.* Абелевы группы и модули. М.: Наука, 1969. Т. 1; 1977. Т. 2.
3. *Cohn P.* On the free product of associative rings. I // Math. Z. 1959. Bd 71. S. 380–398.
4. *Arnold D.* Finite rank torsion free abelian groups and rings // Lecture Notes in Math. 1982. V. 931.
5. *Турманов М. А.* Эндочистые подмодули абелевых групп: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1991.

Статья поступила 8 июля 1999 г.

Турманов Мадин Аскарович
Филиал Самарского института инженеров железнодорожного транспорта,
ул. Вокзальное шоссе, 6, Орск 462408 Оренбургской обл.