Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 517.929

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ф. Н. Гарифьянов

Аннотация: Исследуется линейное разностное уравнение

$$(V\Omega)(z) \equiv \Omega(z-1) + \Omega(z+1) + G(z)(\Omega(z-i) + \Omega(z+i)) = g(z), \quad z \in D,$$

где D — единичный квадрат, в классе решений $\Omega(z)$, голоморфных вне D и исчезающих на бесконечности. Коэффициенты $G(z)$ и $g(z)$ голоморфны в D. Библиогр. 7.

Рассмотрим линейное разностное уравнение (л.р.у.)

$$(V\Omega)(z) \equiv \Omega(z-1) + \Omega(z+1) + G(z)(\Omega(z-i) + \Omega(z+i)) = g(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

при следующих предположениях:

1) D — квадрат с пронумерованными в порядке обхода границы Γ вершинами $t_1 = -t_3 = -(1+i)/2$, $t_2 = -t_4 = (1-i)/2$ и сторонами l_j, $j = \overline{1,4}$, причем $\{t_1, t_2\} \subset \bar{l}_1$;

2) коэффициенты $G(z)$ и $g(z)$ голоморфны в D, а их граничные значения $G^+(t)$, $g^+(t)$ принадлежит $H(\Gamma)$ (удовлетворяют условию Гёльдера на Γ); $G(z) \neq 0$ для любого $z \in \overline{D}$; $G(t_j) = 1$, $j = \overline{1,4}$;

3) решения $\Omega(z)$ ищутся в классе функций, голоморфных вне $\overline{D}$ и исчезающих на бесконечности. Их граничные значения $\Omega^-(t)$ принадлежит $H(l_j)$, $j = \overline{1,4}$, а в вершинах допускаются только логарифмические особенности.

Простейший случай л.р.у. (1), когда $G(z) \equiv 1$, был исследован автором в работе [1]. Нетрудно убедиться, что стандартные методы сведения л.р.у. с постоянными коэффициентами в классе аналитических решений к линейному дифференциальному уравнению бесконечного порядка, основанные на разложении этих решений в ряды Тейлора, в данной ситуации не работают. В самом деле, введем сдвиги

$$\sigma_k(z) = z + i^k, \quad k = \overline{1,4}, \tag{2}$$

и рассмотрим множество

$$D_1 = C \setminus \bigcup_{k=1}^{4} \sigma_k(D). \tag{3}$$

Оно распадается на две связные компоненты, одна из которых (квадрат D) содержит точку $z = 0$, другая — бесконечно удаленную точку. Поэтому соотношение (1) нельзя считать выполненным в произвольной окрестности бесконечно удаленной точки даже при дополнительном предположении, что коэффициенты задачи аналитически продолжимы через Γ.

Например, если $G(z) \equiv 1$ и $g(z) = z$, то левая часть уравнения (1) исчезает на бесконечности, а правая имеет там полюс. Тем не менее уравнение имеет смысл, поскольку $\infty \notin D$. Но применить к нему классические методы исследования (см. [2] или [3]), базирующиеся на замечательных свойствах преобразования Бореля и теории целых функций экспоненциального типа, нельзя.

Приступим к непосредственному исследованию л.р.у. (1). Ясно, что при $z \in D$ имеем

$$G(z) = \exp(\widetilde{G}(z)); \quad \widetilde{G}(t_j) = 0,\ j = \overline{1,4}; \quad \widetilde{G}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \widetilde{G}^{+}(\tau)\zeta(\tau - z)\,d\tau.$$

Квазипериодическая дзета-функция Вейерштрасса построена по примитивным периодам 1 и i. Введем функции

$$G_k(z) = \exp\left[\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{l_k\cup l_{k+2}} \widetilde{G}^{+}(\tau)\zeta(\tau - z)\,d\tau\right], \quad k = 1, 2, \tag{4}$$

и предположим вначале, что

$$\int\limits_{l_1\cup l_3} \widetilde{G}^{+}(\tau)\,d\tau = 0. \tag{5}$$

Тогда функция $G_1(z)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} z| < 1/2$ и $G_1(z+1) = G_1(z)$, а функция $G_2(z)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Re} z| < 1/2$ и $G_2(z+i) = G_2(z)$, так как $\zeta(z + i^k) = \zeta(z) + \eta_k$, $k = \overline{1,4}$. Здесь $\eta_k = \zeta(i^k/2)$.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$G_1(z)(\Omega(z-1) + \Omega(z+1)) + G_2(z)(\Omega(z+i) + \Omega(z-i)) = g_1(z), \quad z \in D,$$

где $g_1(z) = g(z)G_1(z)$. Введем на Γ кусочно-линейную функцию $\alpha(t) = \{\sigma_k(t),\ t \in l_k;\ k = \overline{1,4}\}$, осуществляющую сдвиг $\alpha(t) : \Gamma \to \Gamma$ с изменением ориентации, причем $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$, $t \neq t_k$. Как показано в [1], любое решение уравнения (1) представимо в виде интеграла типа Коши

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \varphi(\tau)(\tau - z)^{-1}\,d\tau, \quad z \notin D, \tag{6}$$

с неизвестной плотностью, удовлетворяющей условиям

$$\varphi(t) \in H(\bar{l}_j),\ j = \overline{1,4}; \quad \varphi(t) + \varphi(\alpha(t)) = 0. \tag{7}$$

Используя интегральное представление (6), запишем уравнение (1) в виде

$$\Phi(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \varphi(\tau)E(z,\tau)\,d\tau = g_1(z), \quad z \in D, \tag{8}$$

где $E(z,\tau) = G_1(z)[(\tau - z - 1)^{-1} + (\tau - z + 1)^{-1}] + G_2(z)[(\tau - z - i)^{-1} + (\tau - z + i)^{-1}]$. Справедлив аналог формулы Ю. В. Сохоцкого

$$\Phi^{+}(t) = -\gamma_t\varphi(\alpha(t)) + \Phi(t), \quad t \in \Gamma, \tag{9}$$

где особый интеграл $\Phi(t)$ понимается в смысле главного значения по Коши и $\gamma_t = \{G_1(t),\ t \in l_2 \cup l_4;\ G_2(t),\ t \in l_1 \cup l_3\} \Longrightarrow \gamma_t = \gamma_{\alpha(t)}$. Рассмотрим разность

$$(T\varphi)(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{+}(\alpha(t)),$$

т. е. придем к интегральному уравнению

$$(T\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i\gamma_t}\int\limits_{\Gamma} K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\gamma_t}(g_1^{+}(t) - g_1^{+}(\alpha(t))) \tag{10}$$

с ядром

$$K(t,\tau) = E(t,\tau) - E(\alpha(t), \alpha(\tau)). \tag{11}$$

Лемма 1. *Интегральный оператор*

$$(A\varphi)(t) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \tag{12}$$

вполне непрерывен в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Доказательство. Выясним характер особенностей ядра (11). Считаем, не ограничивая общности, что $t \in l_1 \Longrightarrow \alpha(t) = t + i$. Договоримся впредь выписывать только те слагаемые из ядра, знаменатели которых могут обратиться в нуль при данном расположении точек t и τ на сторонах квадрата. Возможны следующие варианты.

(а) $\tau \in l_1 \Longrightarrow \alpha(\tau) - \alpha(t) = \tau - t$. Тогда $K(t,\tau) = ((\tau - t - 1)^{-1} + (\tau - t + 1)^{-1})(G^+(t) - G_1^+(t+i))$. Пусть для определенности $t \to t_1 + 0, \tau \to t_2 - 0$. Оценим слагаемое $(G^+(t) - G_1^+(t+i))/(\tau - t - 1)$. Точки $\tau - 1$ и t лежат на прямой $\operatorname{Im} z = -1/2$ по разные стороны от прямой $\operatorname{Re} z = -1/2$, т. е. $t - t_1 < t - \tau + 1$. Поскольку $G_1^+(t_4) = G_1^+(t_1)$ и $t - t_1 = t + i - t_4$, то $\left|G_1^+(t) - G_1^+(t+i)\right| = \left|G_1^+(t) - G_1^+(t_1) + G_1^+(t_4) - G_1^+(t+i)\right| \le 2A_1(t - t_1)^{\lambda_1}$. Здесь A_j и λ_j соответственно постоянная и показатель Гёльдера функции $G_j(z)$, $j = 1, 2$; $\{\lambda_j\} \subset (0, 1]$. Итак, при данном расположении точек τ и t получим неравенство $|K(t,\tau)| < M(t - t_1)^{\lambda_1 - 1}$.

(б) $\tau \in l_2 \Longrightarrow \alpha(\tau) = \tau - 1$. Пусть вначале $t \to t_1 + 0$, $\tau \to t_2 + 0$. Тогда $K(t,\tau) = (\tau - t - 1)^{-1}(G_1^+(t) - G_2^+(t)) + \dots$. Треугольник с вершинами $\tau - 1$, t_1, t прямоугольный, т. е. $|\tau - 1 - t| > t - t_1$. Остается вспомнить, что $G_1^+(t_1) = G_2^+(t_1)$, и воспользоваться гёльдеровостью функций (4).

Если же $t \to t_2 - 0$ и $\tau \to t_3 - 0$, то $K(t,\tau) = (\tau - t - i)^{-1}(G_2(t) - G_2(t+i)) + \dots$, но $G_2(t) \equiv G_2(t+i)$, что и завершает доказательство леммы.

Следствие 1. *Если функции* (4) *удовлетворяют условию Липшица, то ядро* (11) *ограничено.*

Следствие 2. *Оператор* T *является каноническим оператором Фредгольма в* $L_2(\Gamma)$. *При этом любое решение уравнения* (10) *обязательно удовлетворяет первому из условий* (7) *в силу полученных оценок ядра* (11) *и ограничений, наложенных на* $g(z)$.

Простейшие свойства интегрального уравнения Фредгольма второго рода (10), ядро которого имеет структуру типа (11), достаточно хорошо известны (см., например, [4]). Перечислим некоторые из них.

(A) Если уравнение (10) разрешимо, то существует его решение, удовлетворяющее условиям (7).

(B) Пусть фундаментальная система решений (ф.с.р.) однородного уравнения $(T\varphi)(t) = 0$ содержит n функций. Тогда m из них ($m \le n$) можно считать удовлетворяющими условиям (7), а остальные $n - m$ — условиям

$$\varphi(t) \in H(\bar{l}_j), \quad j = \overline{1,4}; \quad \varphi(t) = \varphi(\alpha(t)). \tag{13}$$

Аналогичный результат справедлив и для ф.с.р. союзного уравнения

$$(T'\psi)(t) = 0. \tag{14}$$

(C) (13) $\Longrightarrow \int_{\Gamma} \varphi(t)\,dt = 0$, поскольку сдвиг $\alpha(t)$ изменяет ориентацию Γ и $\alpha'(t) \equiv 1$ ($t \ne t_j$).

Нас будут интересовать решения союзного уравнения со свойством (13). Докажем, что ф.с.р. (14) содержит не менее одной такой функции. Для таких решении имеем $(T'\psi)(t) = \psi(t) + \widetilde{\Phi}(t) + \widetilde{\Phi}(\alpha(t))$, где особый интеграл

$$\widetilde{\Phi}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} E(\tau,t)\psi(\tau)\gamma_\tau^{-1}\,d\tau$$

понимается в смысле главного значения по Коши. При $\psi(t) = \gamma_t$ интеграл вычисляется с помощью вычетов: $\widetilde{\Phi}(t) = -\gamma_t/2$, т. е. функция γ_t удовлетворяет (14).

Замечание 1. Если ф.с.р. (14) содержит единственную функцию со свойством (13), то уравнение (10) разрешимо:

$$\int\limits_{\Gamma} \gamma_t\gamma_t^{-1}(g_1^+(t) - g_1^+(\alpha(t)))\,dt = 2\int\limits_{\Gamma} g_1^+(t)\,dt = 0,$$

но это не означает безусловной разрешимости л.р.у. (1). Поясним ситуацию на простейшем примере $G(t) \equiv 1$ [1]. Ф.с.р. уравнения (14) содержит только постоянную, а уравнение (10) разрешимо и записывается в виде $\Phi^+(t) - \Phi^+(\alpha(t)) = g^+(t) - g^+(\alpha(t))$. Отсюда $\Phi(z) = g(z) + C$, так как условие $F^+(t) = F^+(\alpha(t))$ определяет только эллиптические функции нулевого порядка, т. е. $F(z) = \mathrm{const}$. Итак, при обратном переходе от уравнения (10) к л.р.у. (1) мы можем вместо исходной задачи прийти к уравнению $(V\Omega)(z) = g(z) + C$, $z \in D$. Поэтому в [1] и возникло условие разрешимости

$$\int\limits_{\Gamma} g^+(t)\Omega_0^-(t)\,dt = 0,$$

где $\Omega_0(z)$ — единственное нетривиальное решение однородного л.р.у. $(V\Omega)(z) = 0$, $z \in D$.

Теорема 1. *Пусть ф.с.р. союзного уравнения* (14) *содержит ровно m функций со свойством* (13)*: γ_t, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ..., $\psi_{m-1}(t)$. Тогда л.р.у.* (1) *имеет ровно m условий разрешимости.*

Доказательство. Предположим, что при некотором j, $1 \le j \le m-1$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \psi_j(t)(g_1^+(t) - g_1^+(\alpha(t)))\gamma_t^{-1} -\, dt = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \int\limits_{\Gamma} \psi_j(t)g_1^+(t)\gamma_t^{-1}\,dt = 0,$$

причем интеграл равен нулю при всех $g(z)$. Положим $g(z) = z^m/G_1(z)$, т. е.

$$\int\limits_{\Gamma} \tau^m\psi_j(\tau)\gamma_t^{-1}\,dt = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots .$$

По теореме Рунге это означает, что функция $\psi_j(t)\gamma_t^{-1}$ голоморфно продолжима в D, т. е. $\psi_j(t)\gamma_t^{-1} = F^+(t)$. С учетом условия (13) имеем $F^+(t) = F^+(\alpha(t)) \Longrightarrow F(z) = C \Longrightarrow \psi_j(t) = C\gamma_t$ и получим противоречие, так как обе функции γ_t и $\psi_j(t)$ входят в ф.с.р.

Замечание 2. Полученные результаты о картине разрешимости уравнения (10) остаются справедливыми и при более слабом ограничении $\gamma_t \neq 0$ для любого $t \in L$, т. е. когда у функций (4) допускаются нули в D.

Замечание 3. При получении соотношения $\widetilde{G}(z) = \ln G_2(z) - \ln G_1(z)$ нельзя непосредственно воспользоваться известным результатом А. Ф. Леонтьева [4, гл. 5, § 3] о представлении функции, голоморфной в выпуклом многоугольнике, в виде суммы периодических функций. Дело в том, что там не фиксируется характер граничных значений полученных периодических слагаемых, в том числе и поведение в окрестности вершин.

Пусть теперь выполняется условие (5), т. е.

$$\int\limits_{l_1\cup l_3} \widetilde{G}^+(\tau)\,d\tau \neq 0 \Longleftrightarrow \int\limits_{l_2\cup l_4} \widetilde{G}^+(\tau)\,d\tau \neq 0.$$

Тогда функции (4) удовлетворяют условиям $G_1(z+1) = \exp(\theta\eta_1)G_1(z)$; $G_2(z+i) = \exp(-\theta\eta_2)G_2(z)$ при некотором $\theta \neq 0$. Остается построить квазиэллиптическую функцию $f(z)$, не имеющую на Γ нулей и полюсов, для которой $f(z+1) = \exp(-\theta\eta_1)f(z)$; $f(z+i) = \exp(\theta\eta_2)f(z)$, и вместо функций $G_1(z)$ и $G_2(z)$ рассмотреть периодические функции $G_1(z)f(z)$ и $G_2(z)f(z)$. Приращения η_1 и η_2 связаны соотношениями Лежандра $i\eta_1 - \eta_2 = 2\pi i$. Стоит отметить, что функции $G_1(z)f(z)$, $G_2(z)f(z)$ и $g(z)G_1(z)f(z)$, вообще говоря, мероморфны, что несколько усложняет исследование вопроса о равносильности интегрального уравнения Фредгольма (10) и л.р.у. (1).

В заключение остановимся на истоках задачи (1), а также на ее приложениях к смежным областям комплексного анализа. Пусть D — внутренность фундаментального многоугольника фуксовой группы, $\{\sigma_r(z)\}$ — преобразования группы, которые отображают D в многоугольники, имеющие с ним общую сторону или вершину, а обратный сдвиг $\alpha(t) : \partial D \to \partial D$ совпадает на каждой стороне с одним из порождающих преобразований группы или преобразованием, обратным к нему. В докладе на Международном математическом конгрессе в Цюрихе в 1932 г. Т. Карлеман впервые обратил внимание на важность исследования интегрального уравнения Фредгольма с ядром $K(t,\tau) = A(t,\tau) - \alpha'(\tau)A(\alpha(t),\alpha(\tau))$, где

$$A(t,\tau) = (\tau - t)^{-1} + \sum_r (\tau - \sigma_r(t))^{-1},$$

позволяющего регуляризовать частный случай двухэлементной краевой задачи со сдвигом, впоследствии названной его именем. Исследования уравнения Т. Карлеман не провел, и эта проблема в общем случае не решена до сих пор (более подробно историю вопроса и библиографию см., например, в [5] или [1].

В работе [1] автором было замечено, что для некоторых конечно-порожденных собственно-разрывных групп дробно-линейных преобразований регуляризацию соответствующей краевой задачи Карлемана (задача о «скачке») можно проводить с помощью ядер типа $A(t,\tau)$, но содержащих значительно меньше преобразований, чем это указал Т. Карлеман. Особенно интересными по своим свойствам являются функциональные уравнения, соответствующие ядрам, которые не содержат в качестве одного из слагаемых ядра Коши. Так, уравнение (1) при $G(z) \equiv 1$ оказалось полезным для конструирования биортогонально сопряженных систем аналитических функций [6] или для исследования классических интерполяционных задач для целых функций экспоненциального типа (см. по этому поводу [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарифьянов Ф. Н.* Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата // Изв. вузов. Математика. 1993. Т. 7. С. 7–16.

2. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
3. *Коробейник Ю. В.* О решениях некоторых функциональных уравнений в классе функций, аналитических в выпуклых областях // Мат. сб. 1968. Т. 75. С. 225–234.
4. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1978.
5. *Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.* К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана // Изв. вузов. Математика. 1983. Т. 4. С. 43–51.
6. *Гарифьянов Ф. Н.* Трансформации биортогональных систем и некоторые их приложения. I // Изв. вузов. Математика. 1996. Т. 6. С. 5–16.
7. *Гарифьянов Ф. Н.* Моменты Стилтьеса целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 5. С. 572–576.

Статья поступила 27 апреля 2000 г., окончательный вариант — 4 декабря 2000 г.

Гарифьянов Фархат Нургаязович
Казанская гос. сельскохозяйственная академия, кафедра физики и математики,
ул. К. Маркса, 65, Казань 420015