Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.91

О L_w^2–РЕШЕНИЯХ ОБЩИХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Собхи Эль-Сайед, Н. Фариед, Г. М. Аттиа

Аннотация: Рассматриваются $L_w^2(a,b)$-решения несимметричных дифференциальных уравнений второго порядка $M[y]=\lambda wy$ и их формально сопряженных $M^+[g]=\bar{\lambda}wg$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ при достаточных условиях на комплекснозначные коэффициенты в $M[\cdot]$. Библиогр. 11.

1. Введение. В [1] Амос доказал, что все решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $M[y]=\lambda wy$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ лежат в $L_w^2(a,\infty)$, когда M — симметричное обыкновенное дифференциальное выражение второго порядка вида $M[f]=-(pf')'+qf$ на $[a,\infty)$ $(' \equiv \frac{d}{dx})$ при достаточных условиях на коэффициенты p, q. Случай, когда не все решения расположены в $L_w^2(a,\infty)$, рассмотрен Аткинсоном и Эвансом в [2, теорема 1]. Здесь мы рассмотрим $L_w^2(a,\infty)$-решения общих несимметричных дифференциальных уравнений второго порядка $M[f]=\lambda wf$ и $M^+[g]=\bar{\lambda}wg$, где $M[\cdot]$ для подходящей комплекснозначной функции f определяется равенством

$$M[f]=-(p(f'-rf))'+up(f'-rf)+qf \quad \text{на } [a,b) \tag{1.1}$$

и его формально сопряженным является

$$M^+[g]=-(p(g'+uf))'+rp(g'+uf)+qg \quad \text{на } [a,b). \tag{1.2}$$

Коэффициенты p, r, u, q суть комплекснозначные функции, измеримые по Лебегу на промежутке $[a,b)$, $-\infty<a<b\le\infty$, числовой прямой и удовлетворяющие следующим условиям:

$$p(x)\neq 0 \text{ для п. в. } x\in[a,b), \quad \frac{1}{p}, r, u, q\in L_{\mathrm{loc}}(a,b), \tag{1.3}$$

где $L_{\mathrm{loc}}(a,b)$ — пространство всех комплекснозначных функций, интегрируемых на каждом компактном подынтервале в $[a,b)$.

В данной работе мы распространяем результаты из [1, 2] на случай общего несимметричного дифференциального выражения второго порядка M при достаточных условиях на комплекснозначные коэффициенты выражения M.

2. Предварительные сведения. Символы L_{loc} и AC_{loc} соответствуют интегрируемости по Лебегу и абсолютной непрерывности, знак loc показывает «локальность» и сужает свойства на компактные подынтервалы в $\mathbb{R}$, $\bar{z}$ обозначает комплексно сопряженное к $z\in\mathbb{C}$.

Пусть w — весовая функция такая, что

$$w : [a, b) \to \mathbb{R}, \quad w(x) > 0 \quad (\text{для п. в. } x \in [a, b)). \tag{2.1}$$

Уравнение

$$M[y] = \lambda w y \quad \text{на } [a, b) \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{2.2}$$

называется *регулярным* в левом конце a, если

$$a > -\infty, \quad r, u, q, w \in L_{\mathrm{loc}}[a, b), \tag{2.3}$$

иначе оно называется *сингулярным* в a. Аналогичные определения даются для точки b. Если $M[\cdot]$ регулярно в a и b, будем говорить, что $M[\cdot]$ регулярно *на промежутке* $[a, b]$, см. [3–6].

Мы будем рассматривать случай, когда точка a регулярна для уравнения (2.2), а точка b сингулярна. Точка a регулярна для (2.2) тогда и только тогда, когда она регулярна для уравнения

$$M^+[g] = \bar{\lambda} w g \quad \text{на } [a, b) \quad (\lambda \in \mathbb{C}). \tag{2.4}$$

Пусть $H = L^2_w[a, b)$ — гильбертово пространство классов эквивалентности измеримых по Лебегу функций с нормой $\|f\|_w := \int\limits_a^b w|f|^2 < \infty$ и скалярным произведением, определяемым формулой

$$(f, g)_w := \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)} w(x)\, dx. \tag{2.5}$$

Области определения и значений линейного оператора T, действующего в гильбертовом пространстве H, и его ядро будут обозначаться через $D(T)$, $R(T)$ и $N(T)$ соответственно. Размерность ядра оператора T будем обозначать через $\mathrm{nul}(T)$, его дефект, т. е. коразмерность $R(T)$, — через $\mathrm{def}(T)$. Таким образом, если T плотно определен и $R(T)$ замкнуто, то $\mathrm{def}(T) = \mathrm{nul}(T^*)$. Область Фредгольма оператора T является (в обозначениях из [3]) открытым подмножеством $\triangle_3(T)$ таким, что $\lambda \in \triangle_3(T)$, тогда и только тогда, когда $(T - \lambda I)$ имеет замкнутый образ и конечные размерность ядра и дефект. Индекс $(T - \lambda I)$ — это число $\mathrm{ind}(T - \lambda I) = \mathrm{nul}(T - \lambda I) - \mathrm{def}(T - \lambda I)$, определенное для $\lambda \in \triangle_3(T)$.

Область регулярности $\Pi(A)$ оператора A есть множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых существует положительная константа $K(\lambda)$ такая, что $\|(A - \lambda I)x\| \geq K(\lambda)\|x\|$ для каждого $x \in D(A)$. Согласно теореме о замкнутом графике это равносильно тому, что $\mathrm{nul}(T - \lambda I) = 0$ и $R(T - \lambda I)$ замкнуто.

Совместная область регулярности $\Pi(A, B)$ операторов A и B — это множество $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что $\lambda \in \Pi(A)$, $\bar{\lambda} \in \Pi(B)$ и одновременно $\mathrm{def}(A - \lambda I)$ и $\mathrm{def}(B - \bar{\lambda} I)$ конечны. Сопряженная пара A и B называется *совместной*, если $\Pi(A, B) \neq \varnothing$.

Для общего дифференциального выражения M, рассматриваемого здесь, минимальный оператор уже не является симметричным. Однако минимальные операторы $T_0(M)$ и $T_0(M^+)$, порожденные M и M^+ соответственно, принимают вид сопряженной пары в том смысле, что $T_0(M) \subset [T_0(M^+)]^*$ и $T_0(M^+) \subset [T_0(M)]^*$ или, что равносильно, $(T_0(M)f, g) = (f, T_0(M^+)g)$ для $f \in D_0(M)$ и $g \in D_0(M^+)$, где $(\cdot, \cdot)_{L^2_w(a,b)}$ — скалярное произведение в $L^2_w\{a, b)$, определенное в (2.5), и $D_0(M)$, $D_0(M^+)$ — области определения $T_0(M)$ и $T_0(M^+)$ соответственно, см. ниже (2.6). Положим

$$D(M) := \{f \in L^2_w(a,b), f^{[s-1]} \in AC_{\mathrm{loc}}[a,b),\ s=1,2,\ \text{и } w^{-1}M[f] \in L^2_w(a,b)\},$$

$$D(M^+) := \{g \in L^2_w(a,b), g^{[s-1]} \in AC_{\mathrm{loc}}[a,b),\ s=1,2,\ \text{и } w^{-1}M^+[g] \in L^2_w(a,b)\},$$

где $f^{[s-1]}$, $g^{[s-1]}$ — квазипроизводные, определенные равенствами $f^{[0]} := f$, $f^{[1]} := p(f'-rf)$; $g^{[0]} := g$, $g^{[1]}_+ := p(g'+ug)$, и $AC_{\mathrm{loc}}[a,b)$ — множество функций, абсолютно непрерывных на каждом компактном подынтервале в $[a,b)$.

Подпространства $D(M)$ и $D(M^+)$ в $L^2_w(a,b)$ суть области определения так называемых максимальных операторов $T(M)$ и $T(M^+)$ соответственно, определенных соотношениями $T(M)f := w^{-1}M[f]$ $(f \in D(M))$ и $T(M^+)g := w^{-1}M^+[g]$ $(g \in D(M^+))$.

Для регулярной задачи минимальные операторы $T_0(M)$ и $T_0(M^+)$ — сужения $w^{-1}M[f]$ и $w^{-1}M^+[g]$ на подпространства

$$\begin{aligned} D_0(M) &:= \{f : f \in D(M),\ f^{[s-1]}(a) = f^{[s-1]}(b) = 0 \quad \text{для } s=1,2\},\\ D_0(M^+) &:= \{g : g \in D(M^+),\ g^{[s-1]}_+(a) = g^{[s-1]}_+(b) = 0 \quad \text{для } s=1,2\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

соответственно. Подпространства $D_0(M)$ и $D_0(M^+)$ плотны в $L^2_w(a,b)$, и $T_0(M)$ и $T_0(M^+)$ — замкнутые операторы (см. [3, теорема 3.10.5; 4, теорема 10]).

В сингулярной задаче введем сначала операторы $T_0'(M)$ и $T_0'(M^+)$; оператор $T_0'(M)$ является сужением $w^{-1}M[\cdot]$ на подпространство $D_0'(M) := \{f : f \in D(M), \operatorname{supp} f \subset (a,b)\}$, и аналогично определяется $T_0'(M_p^+)$. Эти операторы плотно определены и замыкаемы в $L^2_w(a,b)$, и мы определим минимальные операторы $T_0(M)$, $T_0(M^+)$ как их соответствующие замыкания (ср. [7, разд. 5]). Обозначим области определения $T_0(M)$ и $T_0(M^+)$ через $D_0(M)$ и $D_0(M^+)$ соответственно. Можно показать, что

$$f \in D_0(M) \Rightarrow f^{[s-1]}(a) = 0 \ (s=1,2), \quad g \in D_0(M^+) \Rightarrow g^{[s-1]}_+(a) = 0 \ (s=1,2), \tag{2.7}$$

ибо мы предполагаем, что a — регулярная точка. Кроме того, как в регулярной, так и в сингулярной задачах имеем

$$T_0^*(M) = T(M^+), \quad T^*(M) = T_0(M^+) \tag{2.8}$$

(см. [7, разд. 5] в случае, когда $M = M^+$, и ср. с [3, разд. III.10.3] в общем случае).

3. Технические леммы. Согласно (2.3) $T_0(M) \subset T(M) = [T_0(M^+)]^*$ и тем самым $T_0(M)$, $T_0(M^+)$ образуют сопряженную пару замкнутых плотно определенных операторов в $L^2_w(a,b)$. Ввиду [3, следствие III.3.2] $\operatorname{def}[T_0(M) - \lambda I] + \operatorname{def}[T_0(M^+) - \bar{\lambda} I]$ постоянно на совместной области регулярности $\Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$. В формально симметрическом случае ($M = M^+$) отсюда следует известный результат о том, что для симметричного оператора $T_0(M)$ имеет постоянные индексы дефекта $m_\pm = \operatorname{def}[T_0(M) - \lambda I] (\lambda \in \mathbb{C}_\pm)$, см. [3, разд. III.4]. Эти индексы дефекта (m_+, m_-) удовлетворяют соотношениям

$$1 \le m_+, m_- \le 2, \tag{3.1}$$

см. [8, теорема 8.2].

Лемма 3.1 (ср. [3, теорема 3.10.7]). *Для* $\lambda \in \Pi[T_0(M),\, T_0(M^+)]$ *величина* $\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I]$ *постоянна и*

$$2 \le \operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I] \le 4. \tag{3.2}$$

В регулярной задаче $\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I]=4$ *для всех* $\lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$.

Лемма 3.2 (ср. [3, гл. 3; 4, теорема 10]). *Имеет место равенство*

$$\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I]=2$$

для всех $\lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$ *в том и только в том случае, если*

$$[\phi,\theta](b)=\lim_{x\longrightarrow b}[\phi,\theta](x)=0, \quad \phi\in D(M),\ \theta\in D(M^+), \tag{3.3}$$

где $[\phi,\theta](x)$ *— билинейная форма Лагранжа, определенная равенством*

$$[\phi,\theta](x)=p(x)\{\phi(x)\overline{\theta'}(x)-\phi'(x)\bar\theta(x)+(r(x)+u(x))\phi(x)\bar\theta(x)\}. \tag{3.4}$$

В этом случае

$$D_0(M)=D[T_0(M)]=\{\phi\in D(M), \phi(a)=\phi^{[1]}(a)=0\}. \tag{3.5}$$

Лемма 3.3. *Пусть* M *— регулярное дифференциальное выражение второго порядка. Тогда* $\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I]=4$ *для всех* $\lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$ *тогда и только тогда, когда каждое из уравнений* $M[f\}-\lambda wf=0$ *и* $M^+[g]-\bar\lambda wg=0$ *имеет два линейно независимых решения в* $L^2_w(a,b)$ *для любого* $\lambda\in\mathbb{C}$, *см.* [5, *теорема* 19.4.4; 9, *следствие* 3.36].

Для доказательства леммы 4.1 нам понадобится следующая

Лемма 3.4 (ср. [10, теорема 1.5.7]). *Пусть* $f(t)$ *и* $h(t)$ *— неотрицательные непрерывные функции на некотором интервале* $t_0\le t\le t_0+a$. *Пусть функция* $\zeta(t)$ *положительная, непрерывная и монотонно неубывающая на* $[t_0,t_0+a]$. *Предположим, что*

$$f(t)\le\zeta(t)+\int_{t_0}^{t}h(s)f(s)\,ds, \quad t\in[t_0,t_0+a]. \tag{3.6}$$

Тогда

$$f(t)\le\zeta(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t}h(s)f(s)\right]ds, \quad t\in[t_0,t_0+a]. \tag{3.7}$$

4. Случай $\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I]=2$**.** В этом пункте дадим условия на комплекснозначные коэффициенты дифференциального выражения M, достаточные для того, чтобы все решения уравнений $M[f]-\lambda wf=0$ и $M^+[g]-\bar\lambda wg=0$ лежали в $L^2_w(a,b)$.

Лемма 4.1. *Пусть* $-\infty<a<b\le+\infty$ *и дифференциальное уравнение* $M[f]-\lambda wf=0(M^+[g]-\bar\lambda wg=0)$ *регулярно в каждой точке промежутка* $[a,b]$. *Пусть* $f(t)$ *— комплекснозначная функция на* $[a,b)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\begin{gathered} f,f^{[1]}\in AC_{\mathrm{loc}}[a,b), \quad w^{-1}M[f]\in L^2_w(a,b) \\ \big(g,g^{[1]}\in AC_{\mathrm{loc}}[a,b), \quad w^{-1}M^+[g]\in L^2_w(a,b)\big). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда $f, f^{[1]} \in AC[a,b]$ *и* $g, g^{[1]} \in AC[a,b]$.

Доказательство. Пусть f — комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию (4.1). Тогда для любого $c \in (a,b)$

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f' = f(c) + \int_c^x p^{-1} f^{[1]} + \int_c^x rf$$

и тем самым

$$|f(x)| = |f(c)| + \sup_{t\in[c,x]} |f(t)| \int_c^b |p^{-1}| + \int_c^x |r||f|.$$

Применяя лемму 3.4, получаем

$$|f(x)| \le \left\{ |f(c)| + \sup_{t\in[c,x]} |f^{[1]}(t)| \int_c^b |p^{-1}| \right\} \exp\left[\int_c^b |r|\right], \quad x \in (c,b), \tag{4.2}$$

так что

$$\sup_{t\in[c,x]} |f(t)| \le \left\{ |f(c)| + \sup_{t\in[c,x]} |f^{[1]}(t)| \int_c^b |p^{-1}| \right\} \exp\left[\int_c^b |r|\right], \quad x \in (c,b). \tag{4.3}$$

Кроме того,

$$f^{[1]}(x) = f^{[1]}(c) + \int_c^x (f^{[1]})' = f^{[1]}(c) + \int_c^x (qf - M[f] + uf^{[1]}), \quad x \in (c,b),$$

поэтому

$$|f^{[1]}(x)| \le |f^{[1]}(c)| + \sup_{t\in[c,x]} |f(t)| \int_c^b |q| + \|w^{-1}M[f]\|_w \left(\int_c^b w\right)^{\frac{1}{2}} + \int_c^x |u||f^{[1]}|, \quad x \in (c,b).$$

Учитывая лемму 3.4, имеем

$$|f^{[1]}(x)| \le \left\{ |f^{[1]}(c)| + \sup_{t\in[c,x]} |f(t)| \int_c^b |q| + \|w^{-1}M[f]\|_w \left(\int_c^b w\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \exp\left[\int_c^x |u|\right], \quad x \in (c,b), \tag{4.4}$$

и из (4.3), (4.4) выводим, что

$$|f^{[1]}(x)| \le \left\{ |f^{[1]}(c)| + \|w^{-1}M[f]\|_w \left(\int_c^b w\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\left\{ |f(c)| + \sup_{t\in[c,x]} |f^{[1]}(t)| \int_c^b |p^{-1}| \right\} \exp\left[\int_c^b |r|\right] \right) \int_c^b |q| \right\} \exp\left[\int_c^x |u|\right], \quad x \in (c,b). \tag{4.5}$$

Так как c — произвольное число из интервала (a,b), оно может быть взято таким, что

$$\left[\int\limits_c^b |q| \int\limits_c^b |p^{-1}| \exp\left(\int\limits_c^b |r| + |u|\right)\right] < \frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

Это возможно, поскольку $p^{-1}, r, u, q \in L(a,b)$. Тогда $f^{[1]}$ ограничена на $[a,b]$ и ввиду (4.5) $|f(x)|$ ограничена на $[a,b]$. Так как $p^{-1}, r, u, q, w \in L(a,b)$, имеем $f' = p^{-1}f^{[1]} + rf \in L(a,b)$. Следовательно, $f \in AC[a,b]$ и $(f^{[1]})' = uf^{[1]} + (q - \lambda w)f \in L(a,b)$. Тем самым $f^{[1]} \in AC[a,b]$. Аналогично для $g, g^{[1]} \in AC[a,b]$, $w^{-1}M^+[g] \in L^2_w(a,b)$ имеем $g, g^{[1]} \in AC[a,b]$. Это завершает доказательство. Детали можно найти в [1].

Теорема 4.2. *Пусть* $M[\cdot]$ *регулярно в* a *и* $p^{-1}, r, u, q, w \in L(a,\infty)$. *Тогда*
(i) $\operatorname{def}[T_0(M) - \lambda I] = \operatorname{def}[T_0(M^+) - \bar{\lambda} I] = 2$ *для любого* $\lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$,
(ii) $\int\limits_a^\infty |p|^{-1}|f^{[1]}|^2 < \infty$, $\int\limits_a^\infty |q||f|^2 < \infty$ *для любого* $f \in D(M)$,
(iii) $\int\limits_a^\infty |p|^{-1}|g^{[1]}|^2 < \infty$, $\int\limits_a^\infty |q||g|^2 < \infty$ *для любого* $g \in D(M^+)$.

Доказательство. (i) Перейдем от переменной x к переменной s по формуле

$$s(x) := \int\limits_a^x |p|^{-1}\,dt, \quad x \in [a,\infty). \tag{4.7}$$

Функция s дифференцируема на $[a,\infty)$, и

$$S(x) = s'(x) = |p|^{-1} \quad \text{для п. в. } x \in [a,\infty). \tag{4.8}$$

Тогда S строго возрастает на $[a,b]$ и имеет обратную функцию x, определенную на $[0,\beta]$, где

$$\beta = \int\limits_a^\infty |p|^{-1}\,dt < \infty. \tag{4.9}$$

В терминах новой переменной уравнения (2.2) и (2.4) принимают вид

$$\tau[f] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{p}{|p|}\left(\frac{df}{ds} - r|p|f\right)\right] + up\left(\frac{df}{ds} - r|p|f\right) + Qf = \lambda W(s)f(s), \quad s \in [0,\beta], \tag{4.10}$$

$$\tau^+[g] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{p}{|p|}\left(\frac{dg}{ds} + r|p|g\right)\right] + rp\left(\frac{dg}{ds} + u|p|g\right) + Qg = \bar{\lambda} W(s)g(s), \quad s \in [0,\beta], \tag{4.11}$$

где $Q(s) = q(x(s))|p(x(s))|$ и $W(s) = w(x(s))|p(x(s))|$, $s \in [0,\beta]$. Из условий на p, r, u, q, w вытекает, что $(\frac{p}{|p|})^{-1}, r|p|, u|p|, Q, W \in L(0,\beta)$. Отсюда следует, что дифференциальные выражения (4.10), (4.11) регулярны во всех точках промежутка $[0,\beta]$, так что все решения уравнений $W^{-1}\tau[f] = \lambda f$ и $W^{-1}\tau^+[g] = \bar{\lambda} g$ принадлежат $L^2_w(0,\beta)$. По лемме 3.3

$$\operatorname{def}[T_0(M) - \lambda I] = \operatorname{def}[T_0(M^+) - \bar{\lambda} I] = 2 \quad \text{на } [0,\beta]. \tag{4.12}$$

Покажем теперь, что все решения уравнений $(M - \lambda w)f = 0$ и $(M^+ - \bar{\lambda} w) = 0$ лежат в $L^2_w(a,\infty)$. Заметим, что если y — решение уравнения (1.1) и

$$Y(s) = y(x(s)), \quad s \in [0,\beta], \tag{4.13}$$

то Y — решение уравнения (4.10) на $[0,\beta]$. В свою очередь, если Y — решение (4.10) и y определено формулой $y(x) = Y(s(x))$, $x \in [a,\infty)$, то y — решение уравнения (1.1) на $[a,\infty)$. Так как все решения (4.10) принадлежат $L^2_w(0,\beta)$, для любого решения y уравнения (1.1) имеем

$$\int\limits_a^\infty w(x)|y(x)|^2\,dx = \int\limits_a^\beta W(s)|Y(s)|^2\,ds < \infty,$$

где Y определено формулой (4.13) и тем самым $y \in L^2_w(a,\infty)$. Таким образом, любое решение уравнения (1.1) принадлежит $L^2_w(a,\infty)$. Аналогично все решения (1.2) принадлежат $L^2_w(a,\infty)$. В этом случае по лемме 3.3 получаем

$$\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I] = \operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I] = 2$$

для любого $\lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$.

(ii) Для $f \in D(M)$ определим функцию $F : [0,\beta] \to \mathbb{C}$ равенством

$$F(s) = f(x(s)), \quad s \in [0,\beta]. \tag{4.14}$$

Тогда $F, \frac{\bar p}{|p|}(\frac{dF}{ds} - r|p|F) \in AC[0,\beta]$, ибо $f, f^{[1]} \in AC[a,\infty)$; $F \in L^2_w(0,\beta)$, ибо

$$\int\limits_0^\beta W(s)|F(s)|^2\,ds = \int\limits_a^\infty w(x)|f(x)|^2\,dx < \infty,$$

и $W^{-1}\tau[F] \in L^2_w(0,\beta)$, ибо

$$\int\limits_0^\beta W(s)|W^{-1}\tau[F]|^2\,ds = \int\limits_a^\infty w(x)|w^{-1}M[f]|^2\,dx < \infty.$$

Так как дифференциальное уравнение (4.10) регулярно во всех точках промежутка $[0,\beta]$, по лемме 4.1 F и $\frac{\bar p}{|p|}(\frac{dF}{ds} - r|p|F)$ лежат в $AC[0,\beta]$. Отсюда и из того, что $Q \in L(0,\beta)$, вытекает, что $Q|F|^2 \in L(0,\beta)$ и $|\frac{dF}{ds} - r|p|F|^2 \in L(0,\beta)$. Таким образом, если f — функция из $D(M)$ и F определена согласно (4.14), то

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{|p|}|f^{[1]}|^2\,dx = \int\limits_0^\beta \left|\frac{dF}{ds} - r\right|p|F|^2\,ds < \infty,$$

$$\int\limits_a^\infty |q||f|^2\,dx = \int\limits_0^\beta |Q||F|^2\,ds < \infty.$$

Аналогично

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{|p|}|g^{[1]}|^2\,dx < \infty, \quad \int\limits_a^\infty |q||g|^2\,dx < \infty \quad \forall g \in D(M^+).$$

5. Случай $\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I] = \operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I] = 1$. В этом пункте установим условия на комплекснозначные коэффициенты r, u, q, и вещественнозначный коэффициент p, достаточные для того, чтобы $\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I] = \operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I] = 1$ для любого $\lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$.

Наше доказательство является доказательством типа Левинсона, которое имеет много версий в случае формально симметричного выражения с вещественными коэффициентами (см., например, [2; 11, теорема III.2.5]).

Теорема 5.1. *Пусть $M[\cdot]$ определено, как в (1.1), и предположим, что существует неотрицательная финитная абсолютно непрерывная функция V_n на $[0,\infty)$ такая, что*

$$\int_0^\infty V_n\sqrt{w/p} \to \infty \quad \text{при } n\to\infty. \tag{5.1}$$

Предположим, кроме того, что $\operatorname{Re}(q) = q_1 + q_2$ и

$$p\left[V_n' + \operatorname{Re}\left(\frac{u+r}{2}\right)V_n\right]^2 \le \left[q_{1-}\left(\frac{1}{p}\right)\left|\left(\frac{p}{2}\right)(\bar u - r) - Q\right|^2 - \operatorname{Re}(pur)\right]V_n^2 + Kw \tag{5.2}$$

для некоторой Q такой, что $Q' = q_2$, и некоторой константы K. Тогда

$$\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I] = \operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I] = 1 \quad \forall \lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)].$$

Доказательство. Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}[f,g](x) = 0$ для любых $f\in D(M)$ и $g\in D(M^+)$. Допустим, что $\lim\limits_{x\to\infty}[f,g] = 1$. Будем вместо V_n писать V. Умножая обе части (3.4) на $V\sqrt{w/p}$, имеем

$$\begin{aligned} V\sqrt{w/p}[f,g] &= \{\sqrt{p}\bar g' V + \bar g V(p(u-\bar r) - 2Q)/2\sqrt{p} + \sqrt{p}\bar g V'\} f\sqrt{w} \\ &- \{\sqrt{p} f' V + fV(p(\bar u - r) - 2Q)/2\sqrt{p} + \sqrt{p} f V'\}\bar g\sqrt{w} + \{\sqrt{p}\operatorname{Re}(r+u)Vf\}\bar g\sqrt{w}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что каждый член в правой части (5.3) является произведением двух интегрируемых в квадрате функций, L^2-нормы которых не зависят от n. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(w^{-1}M[f], fV^2) &= \operatorname{Re}\left(\int_0^\infty p(f'-rf)\bar f' V^2\right) \\ &+ 2\operatorname{Re}\left(\int_0^\infty p(f'-rf)\bar f V V'\right) + \operatorname{Re}\left(\int_0^\infty pu(f'-rf)\bar f V^2\right) \\ &+ \int_0^\infty q_1|f|^2V^2 - \operatorname{Re}\left(\int_0^\infty Qf\bar f' V^2\right) - 2\int_0^\infty Q|f|^2VV' \\ &= \int_0^\infty \left|\sqrt{p} f' V + (1/\sqrt{p})\left(p\left(\frac{\bar u - r}{2}\right) - Q\right) fV + \sqrt{p} f V'\right|^2 - \int_0^\infty p|f'|^2 {V'}^2 \\ &- \int_0^\infty \left|p\left(\frac{\bar u - r}{2}\right) - Q\right|^2 (1/p)|f|^2V^2 + \int_0^\infty q_1|f|^2V \\ &- \operatorname{Re}\left(\int_0^\infty pur|f|^2V^2\right) - \operatorname{Re}\left(\int_0^\infty p(\bar u + r)\right)|f|^2VV'. \end{aligned}$$

Так как $\mathrm{Re}(\bar{u}+r)=\mathrm{Re}(u+r)$, имеем

$$\mathrm{Re}(w^{-1}M[f],fV^2)=\int_0^\infty\left|\sqrt{p}f'V+(1/p)\left(p\left(\frac{\bar{u}-r}{2}\right)-Q\right)+\sqrt{p}fV'\right|^2$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^\infty p[\mathrm{Re}(u+r))]^2|f|^2V^2-\int_0^\infty p[V'+(1/2)\,\mathrm{Re}(u+r)V]^2|f|^2$$
$$-\int_0^\infty\left[q_1-(1/p)\left|p\left(\frac{\bar{u}-r}{2}\right)-Q\right|^2-p\,\mathrm{Re}(ur)\right]|f|^2V^2. \quad (5.4)$$

Согласно (5.2) сумма третьего и четвертого членов в правой части (5.4) ограничена снизу величиной $\left(-k\int_0^\infty w|f|^2\right)$ для каждого $V=V_n$. Следовательно, первый и второй члены в правой части (5.4) ограничены сверху равномерно по n. Таким образом, второй и третий члены в (5.3) являются произведением интегрируемых в квадрате функций. Аналогичное можно показать для первого члена в (5.3) повторением рассуждений с $(w^{-1}M^+[g],gV^2)_w$.

Приведем два примера, в которых выполнены условия предыдущих теорем.

Примеры. (1) Пусть $p=w=V_n=1$ на $[0,\infty)$. Тогда условие (5.1) выполнено. Чтобы удовлетворить (5.2), положим $\mathrm{Re}(q)=q_1+q_2$ на $[0,\infty)$, где

$$q_1(x)=-x^2\cos(2x)\quad(x\in[0,\infty)),\quad q_2(x)=-x\sin(x)+\cos(x)\quad(x\in[0,\infty)),$$

т. е.

$$Q(x)=\int_0^x q_1(t)\,dt=x\cos(x)\quad(x\in[0,\infty)).$$

Пусть $r(x)=-u(x)=-xe^{ix}$. Тогда $\mathrm{Re}(u+r)=0$, $\mathrm{Re}(ur)=-x^2\cos(2x)$ и $|(1/2)(\bar{u}-r)-Q|^2=0$.

Если $K=0$, то

$$p[V_n'+(1/2)\,\mathrm{Re}(u+r)V_n]^2+[(1/p)|(p/2)(\bar{u}-r)-Q|^2+\mathrm{Re}(pur)]V_n^2-Kw=q_1(x).$$

Тогда условия предыдущей теоремы выполнены.

(2) Пусть $I_n=[n\pi-n^{-1/2},\,n\pi+n^{-1/2}]$, $n=1,2,\dots$. Определим V_n на I_n, полагая

$$V_n(x)=\begin{cases}x-n\pi+n^{-1/2}, & n\pi-n^{-1/2}\le x\le n\pi,\\ V_n(2n\pi-x), & n\pi\le x\le n\pi+n^{-1/2}.\end{cases}$$

Пусть $V_n(x)=0$ на дополнении к объединению $I_{n,s}$. На I_n будет $V_n\le n^{-1/2}$ и $|V_n(x)|\le 1$.

Пусть $p=w=1$ на $[0,\infty)$. Для каждого n

$$\int_{I_n}V_n(t)dt=\frac{1}{n},$$

так что (5.1) выполнено. Чтобы удовлетворить (5.2), положим

$$q_1(x)=-x^2\cos(2e^x),\quad q_2(x)=-xe^x\sin(e^x)+\cos(e^x)\quad(x\in[0,\infty)),$$

т. е.
$$Q(x)=\int\limits_0^x q_2(t)\,dt = x\cos(x) \quad (x\in[0,\infty)).$$
Пусть $r(x)=-u(x)=-xe^{ix}$ на $[0,\infty)$. Тогда
$$\operatorname{Re}(u+r)=0,\quad \operatorname{Re}(ur)=-x^2\cos(2e^x),\quad |(1/2)(\bar u-r)-Q|^2=0.$$
Пусть $K=1$. Тогда
$$p\left[V_n'+\operatorname{Re}\left(\frac{u+r}{2}\right)V_n\right]^2+[(1/p)|(p/2)(\bar u-r)-Q|^2+\operatorname{Re}(pur)]V_n^2-Kw=q_1(x).$$
Таким образом, условия предыдущей теоремы выполнены.

Замечание 5.2. (1) Для вещественнозначных $w=1$, q и $r=u=0$ это несколько улучшает результат [11, теорема II.2.5].

(2) Для $q_2=0$ и $r=u=0$ $(u=-\bar r)$ наш результат эквивалентен теореме Аткинсона и Эванса [2, теорема 1].

Благодарности. Мы признательны рецензенту за внимательное знакомство со статьей и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Amos R. J.* On a Dirichlet and limit-circle criterion for second-order differential expressions // Quaestiones Math. 1978. V. 3. P. 53–65.
2. *Atkinson F. V., Evans W. D.* On solutions of a differential equation which are not of integrable square // Math. Z. 1972. Bd 127. S. 323–332.
3. *Edmunds D. E., Evans W. D.* Spectral theory and differential operators. Oxford: Oxford Univ. Press, 1987.
4. *Evans W. D.* Regularly solvable extensions of non-self-adjoint ordinary differential operators // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1984. V. 97. P. 79–95.
5. *Naimark N. A.* Linear differential operators (English edition). New York: Frederick Ungar, 1968.
6. *Sobhy El-sayed Ibrahim.* Boundedness for solutions of general ordinary quasi-differential equations // J. Egypt Math. Soc. 1994. V. 2. P. 33–44.
7. *Zettl A.* Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mountain J. Math. 1975. V. 5. P. 453–464.
8. *Everitt W. N., Zettl A.* Generalized symmetric ordinary differential expressions. I: The general theory // Nieuw Arch. Wisk. 1979. V. 27. P. 363–397.
9. *Sobhy El-sayed Ibrahim.* Problems associated with differential operators: Thes. ... doct. phylosophy. Faculty of Science, Department of Mathematics, Benha Univ., Egypt, 1989.
10. *Rao M. R. M.* Linear differential equations (Theory and Applications). London: Edward Arnold, 1981.
11. *Kauffman R. M., Read T. T., Zetl A.* The deficiency index problems for power of ordinary differential expressions. Berlin: Springer Verl., 1977. (Lecture Notes in Math.; 621).

Статья поступила 10 марта 1999 г.

Benha Univ., Faculty of Science, Department of Mathematics, Benha B13518, Egypt.
Ain Shims Univ., Faculty of Science, Department of Mathematics,Cairo, Egypt.
Benha Univ., Faculty of Science, Department of Mathematics, Benha B13518, Egypt.