Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.956+517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ. II

Г. А. Рудых, Э. И. Семенов

Аннотация: Для многомерного уравнения нелинейной диффузии $u_t = \nabla\cdot(u^\lambda \nabla u)$, $u \triangleq u(\mathbf{x},t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, предложена оригинальная форма решений $u(\mathbf{x},t) = [\lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)]_+^p + \lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)]]_+^{1/\lambda}$, с помощью которой исследование исходного уравнения сведено к изучению конечномерной переопределенной (число уравнений превосходит число искомых функций, подлежащих определению) системе алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ). Здесь $A_k(t)$ — вещественные симметричные матрицы с элементами $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $\mathbf{B}_k(t)$ — вектор-столбцы с компонентами $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$ и $C_k(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$ — скалярные функции; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область; $\mathbb{R}^+ = (0,\infty); \lambda, p \in \mathbb{R}; \lambda, p \neq 0; k = 1,2$.

В силу специфики задачи исследование предъявленной системы АДУ распадается на два независимых случая: $p \neq 2$, $p = 2$. При определенных предположениях доказано, что задача Коши для изучаемой системы АДУ обладает решением, отличным от тривиального как при $p \neq 2$, так и при $p = 2$. На основе этого результата найдено многопараметрическое семейство новых точных неавтомодельных анизотропных по пространственным переменным, явных неотрицательных решений исследуемого уравнения. Основное внимание уделено изучению уравнений быстрой $(-1 < \lambda < 0)$ и предельной $(\lambda = -1, n = 2)$ диффузии. Библиогр. 3.

Настоящая работа является продолжением исследований, проведенных в [1]. Обозначения и сокращения взяты из [1] и используются без дополнительных пояснений.

6. Существование решений системы АДУ (3.4) ($p \neq 2$)**.** Предположим, что $\lambda = -\frac{2}{m}$, $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $p \neq 1$. Выше (см. замечание 5) мы отмечали, что если $\lambda = -\frac{2}{m}$, то либо $p = 1$, либо $m = 2$. Так как $p \neq 1$, то $m = 2$. Итак, в рассматриваемом случае $\lambda = -1$, $\tau = -\frac{1}{p}$, $\sigma = -p$, $\xi = 1$, $p \neq 0$, $p \neq 1$. Из системы ОДУ (5.6), (5.7) следует, что $\varphi(t) = \beta \exp\{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t\}$, $\psi(t) = \alpha$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq 0$; $\beta \neq 0$. Тогда в силу (5.4), (5.5) имеем

$$A_1(t) = \beta \exp\left\{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t\right\} S E_2 S', \quad A_2(t) = \alpha S E_2 S.'$$

Заметим прежде всего (проверяется вычислением), что из уравнения (3.4.2) вытекает представление

$$\mathbf{B}_2(t) = S[E_2 + e^{-2\alpha t}(I - E_2)]S'\mathbf{B}_2(0).$$

Кроме того, уравнение (3.4.5) запишется в виде

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 2\alpha S\left(E_2 - \frac{1}{p}I\right)S'\mathbf{B}_1(t) + 2\beta e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t} S(E_2 - pI)S'\mathbf{B}_2(t).$$

В исследуемом случае алгебраическое соотношение (5.2) принимает вид $(I - E_2)S'\mathbf{B}_1(t) = 0$, т. е. $S'\mathbf{B}_1(t) = E_2 S'\mathbf{B}_1(t)$. Следовательно,

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \frac{2\alpha}{p}(p-1)\mathbf{B}_1(t) + 2\beta e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t} S(E_2 - pI)S'\mathbf{B}_2(t).$$

Отметим, во-первых, что из (5.2) вытекает равенство $(I - E_2)S'\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 0$. В итоге из полученного соотношения с учетом того, что $E_2^2 = E_2$, $p \neq 0$, имеем $(I - E_2)S'\mathbf{B}_2(t) = 0$. Ясно также, что $(I - E_2)S'\mathbf{B}_2(0) = 0$. Так как $E_2 S'\mathbf{B}_2(0) = S'\mathbf{B}_2(0)$, то $\mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0)$. С другой стороны, нетрудно видеть, что вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \frac{2\alpha}{p}(p-1)\mathbf{B}_1(t) - 2\beta(p-1)e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}\mathbf{B}_2(0).$$

Отсюда

$$\mathbf{B}_1(t) = \left[\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right]e^{\frac{2\alpha}{p}(p-1)t} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}. \tag{6.1}$$

Ввиду того, что $\mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0)$, $\lambda = -1$, уравнение (3.4.3) запишется в виде $\dot{C}_2(t) = -2\alpha C_2(t) + |\mathbf{B}_2(0)|^2$ и, как легко проверить, обладает решением

$$C_2(t) = \left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right]e^{-2\alpha t} + \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2. \tag{6.2}$$

Помимо этого, можно показать, что уравнение (3.4.6) принимает вид

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{2\alpha}{p}C_1(t) - 2\beta p e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}C_2(t) + 2(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_1(t)),$$

где функции $\mathbf{B}_1(t), C_2(t)$ определены выше. При этом мы учли, что $\mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0)$. Нетрудно показать, что полученное уравнение имеет решение

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \mathbb{C}_1(0)e^{-\frac{2\alpha}{p}t} + \frac{\beta p}{\alpha(p-1)}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right]e^{-\frac{2\alpha}{p}(p^2-p+1)t} \\ &+ \frac{1}{\alpha}\left[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right]e^{\frac{2\alpha}{p}(p-1)t} + \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2 e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_1(0) = C_1(0) &- \frac{\beta p}{\alpha(p-1)}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right] \\ &- \frac{1}{\alpha}\left[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right] - \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Поскольку вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ и скалярная функция $C_1(t)$ связаны алгебраическим соотношением (5.3), из него после несложных преобразований вытекает зависимость

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right]^2 e^{\frac{4\alpha}{p}(p-1)t} &= 2\beta\mathbb{C}_1(0)e^{-\frac{2\alpha}{p}(p^2-2p+2)t} \\ &+ \frac{2\beta^2 p}{\alpha(p-1)}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right]e^{-\frac{2\alpha}{p}(2p^2-3p+2)t}. \end{aligned} \tag{5.3$'$}$$

Так как $\alpha, \beta, p \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $p \neq 0$, $p \neq 1$, условие $(5.3')$, как легко видеть, будет выполняться в следующих двух случаях.

$\mathbb{I}$. Пусть $p \neq \frac{1}{2}$. Тогда если имеют место соотношения

$$\mathbf{B}_1(0) = \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0), \quad C_2(0) = \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2, \quad \mathbb{C}_1(0) = 0,$$

то (5.3′) выполняется тождественно.

$\mathbb{II}$. Пусть $p = \frac{1}{2}$ и

$$\left|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right] = 0, \quad \mathbb{C}_1(0) = 0. \tag{6.5}$$

Тогда (5.3′) выполняется тождественно.

Итак, в случае $\mathbb{I}$ получим

Утверждение 8. *Пусть* $\lambda = -\frac{2}{m}$, $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $p \neq 0$, $p \neq \frac{1}{2}$, $p \neq 1$. *Тогда* $m = 2$, $\lambda = -1$, $\tau = -\frac{1}{p}$, $\sigma = -p$, $\xi = 1$ *и система* АДУ (3.4) *имеет следующее решение:*

$$A_1(t) = \beta e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t} S E_2 S', \quad A_2(t) = \alpha S E_2 S',$$

$$\mathbf{B}_1(t) = \mathbf{B}_1(0) e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}, \quad \mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0),$$

$$C_1(t) = \frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2 e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}, \quad C_2(t) = \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

причем

$$(I - E_2)S'\mathbf{B}_1(0) = (I - E_2)S'\mathbf{B}_2(0) = 0, \quad \mathbf{B}_1(0) = \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0),$$

где $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in \mathbb{R}^n$ *— постоянные векторы.*

Докажем, что в случае $\mathbb{II}$ имеет место следующий результат.

Теорема 5. *Если* $\lambda = -\frac{2}{m}$, $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $p = \frac{1}{2}$, *то* $m = 2$, $\lambda = -1$, $\tau = -2$, $\sigma = -\frac{1}{2}$, $\xi = 1$ *и система* АДУ (3.4) *обладает решением*

$$A_1(t) = \beta e^{-\alpha t} S E_2 S', \quad A_2(t) = \alpha S E_2 S',$$

$$\mathbf{B}_1(t) = \left[\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right] e^{-2\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0) e^{-\alpha t}, \quad \mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0),$$

$$\begin{aligned} C_1(t) = \frac{1}{2\beta}\left|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2 e^{-3\alpha t} \\ + \frac{1}{\alpha}\left[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right] e^{-2\alpha t} + \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2 e^{-\alpha t}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$C_2(t) = -\frac{\alpha}{2\beta^2}\left|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2 e^{-2\alpha t} + \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

при этом постоянные векторы $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in \mathbb{R}^n$ *связаны цепочкой равенств*

$$(I - E_2)S'\mathbf{B}_1(0) = (I - E_2)S'\mathbf{B}_2(0) = 0, \tag{6.7}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что при сделанных предположениях вид матриц $A_1(t)$, $A_2(t)$ и вектор-столбца $\mathbf{B}_2(t)$ следует из утверждения 8. С другой стороны, используя формулу (6.1), получим выражение для вектор-столбца $\mathbf{B}_1(t)$. Отметим, что, как и при доказательстве утверждения 8, можно показать справедливость цепочки равенств (6.7). Обратимся теперь к алгебраическим соотношениям (6.5). При этом напомним, что $\mathbb{C}_1(0)$ определяется согласно (6.4). С учетом сказанного легко проверить, что из соотношений (6.5) вытекает справедливость формул

$$C_1(0) = \frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2, \quad C_2(0) = \frac{1}{\beta}(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\alpha}{2\beta^2}|\mathbf{B}_1(0)|^2.$$

Если учесть вид $C_2(0)$, то из (6.2) немедленно следует выражение для скалярной функции $C_2(t)$. Наконец, принимая во внимание тот факт, что $\mathbb{C}_1(0) = 0$ (см. (6.4)) и учитывая выражение для $C_2(0)$, нетрудно убедиться, что из соотношения (6.3) определяется скалярная функция $C_1(t)$. Теорема доказана.

Из утверждения 1 и теоремы 5 вытекает следующий нетривиальный результат.

Теорема 6. *Уравнение нелинейной диффузии*

$$u_t = \Delta \ln u, \quad u \overset{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{6.8}$$

обладает точным неавтомодельным анизотропным по пространственным переменным явным неотрицательным решением

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[-\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t) \right]_+^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t) \right]_+^{-1}. \tag{6.9}$$

При этом матрицы $A_k(t)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_k(t)$ и скалярные функции $C_k(t)$ определяются посредством формул (6.6), (6.7), *где* $k = 1, 2$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda \neq -\frac{2}{m}$. В п. 5 мы отмечали, что параметры $\lambda, p \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $p \neq 0$, исследуемой системы АДУ (3.4) связаны соотношением $2p(\lambda + 1) = \lambda(2 - m)$. Отсюда следует, что $\lambda = \frac{2p}{2-m-2p}$, где $2 - m - 2p \neq 0$. Так как $\tau = \frac{\lambda}{p}$, $\sigma = -\frac{2p}{m}$, то $\tau m + \sigma m + 4 = \frac{2(p-1)(2p+m-4)}{2-m-2p}$, причем если $p = 1$, то $\lambda = -\frac{2}{m}$. Однако мы рассматриваем случай, когда $\lambda \neq -\frac{2}{m}$. В связи с этим $\tau m + \sigma m + 4 = 0$, если $p = 2 - \frac{m}{2}$, где $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Очевидно, что $\lambda = \frac{m}{2} - 2$. Следовательно, $\tau = -1$, $\sigma = \frac{m-4}{m}$, $\lambda m + 2 = \frac{(m-2)^2}{2}$, причем $m \neq 2$, $m \neq 4$. Таким образом, в рассматриваемом случае система ОДУ (5.6), (5.7) имеет решение $\varphi(t) = \beta$, $\psi(t) = \alpha[\Theta(t)]^{-1}$, где $\Theta(t) = 1 - \frac{1}{2}\alpha(m-2)^2 t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Используя формулы (5.4), (5.5), получим $A_1(t) = \beta S E_m S'$, $A_2(t) = \alpha[\Theta(t)]^{-1} S E_m S'$. В результате из (3.4.2) имеем

$$\dot{\mathbf{B}}_2(t) = \psi(t) S[2E_m + \lambda m I] S' \mathbf{B}_2(0),$$

где $\lambda = \frac{m}{2} - 2$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{B}_2(t) = S\left[\exp\left\{\lambda m \left(\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau\right) I + 2\left(\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau\right) E_m\right\}\right] S' \mathbf{B}_2(0).$$

Поскольку

$$\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau = -\frac{2}{(m-2)^2} \ln|\Theta(t)|$$

и справедлива цепочка равенств

$$e^{v(t)E_m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k(t)}{k!} E_m^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^k(t)}{k!} E_m^k = (I - E_m) + E_m + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^k(t)}{k!} \right) E_m$$

$$= (I - E_m) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k(t)}{k!} \right) E_m = (I - E_m) + e^{v(t)} E_m,$$

т. е. $e^{v(t)E_m} = (I - E_m) + e^{v(t)} E_m$, приходим к соотношению

$$\mathbf{B}_2(t) = S\big[[\Theta(t)]_+^{-\frac{2\lambda m}{(m-2)^2}} (I - E_m + [\Theta(t)]_+^{-\frac{4}{(m-2)^2}} E_m)\big] S' \mathbf{B}_2(0).$$

Учитывая, что $\lambda = \frac{m}{2} - 2$, получим

$$\mathbf{B}_2(t) = S\big[[\Theta(t)]_+^{-\frac{m(m-4)}{(m-2)^2}} (I - E_m) + [\Theta(t)]^{-1} E_m\big] S' \mathbf{B}_2(0). \tag{6.10}$$

Рассмотрим уравнение (3.4.5). Так как

$$E_m S' \mathbf{B}_1(t) = S' \mathbf{B}_1(t), \quad (I - E_m) S' \mathbf{B}_1(0) = 0$$

(см. (5.2)), уравнение (3.4.5) после несложных преобразований примет вид

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = (2 - m)\psi(t) \mathbf{B}_1(t) + \beta(m-4) \mathbf{B}_2(t) + 2\beta S E_m S' \mathbf{B}_2(t). \tag{6.11}$$

С другой стороны, из (5.2) следует, что $(I - E_m) S' \dot{\mathbf{B}}_1(t) = 0$. Поэтому из (6.11) получим, что $\beta(m-4)(I - E_m) S' \mathbf{B}_2(t) = 0$. Заметим, что поскольку $\beta \neq 0$, $m \neq 4$, то $(I - E_m) S' \mathbf{B}_2(t) = 0$. Очевидно, что $(I - E_m) S' \mathbf{B}_2(0) = 0$. Иначе говоря, формула (6.10) упрощается:

$$\mathbf{B}_2(t) = [\Theta(t)]^{-1} S E_m S' \mathbf{B}_2(0) = [\Theta(t)]^{-1} \mathbf{B}_2(0). \tag{6.12}$$

Кроме того, уравнение (6.11) принимает вид

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \alpha(2 - m)[\Theta(t)]^{-1} \mathbf{B}_1(t) + \beta(m-2)[\Theta(t)]^{-1} \mathbf{B}_2(0)$$

и, как легко проверить, обладает решением

$$\mathbf{B}_1(t) = \left[\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{B}_2(0) \right] [\Theta(t)]_+^{\frac{2}{m-2}} + \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{B}_2(0). \tag{6.13}$$

Помимо этого, уравнение (3.4.3) запишется так:

$$\dot{C}_2(t) = \frac{1}{2} \alpha m(m-4)[\Theta(t)]^{-1} C_2(t) + [\Theta(t)]^{-2} |\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

и имеет следующее решение:

$$C_2(t) = \left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha} |\mathbf{B}_2(0)|^2 \right] [\Theta(t)]_+^{-\frac{m(m-4)}{(m-2)^2}} + \frac{1}{2\alpha} |\mathbf{B}_2(0)|^2 [\Theta(t)]^{-1}. \tag{6.14}$$

Обратимся теперь к уравнению (3.4.6). Имеем

$$\dot{C}_1(t) = -\alpha m [\Theta(t)]^{-1} C_1(t) + \beta(m-4) C_2(t) + 2(\mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t)),$$

где функции $\mathbf{B}_2(t), \mathbf{B}_1(t), C_2(t)$ определяются согласно (6.12)–(6.14). Отсюда после несложных вычислений получим представление

$$C_1(t) = \mathbb{C}_1(0)[\Theta(t)]_+^{\frac{2m}{(m-2)^2}} + \frac{\beta(m-4)}{\alpha(m-2)} \left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha} |\mathbf{B}_2(0)|^2 \right] [\Theta(t)]_+^{\frac{4}{(m-2)^2}}$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \left[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha} |\mathbf{B}_2(0)|^2 \right] [\Theta(t)]_+^{\frac{2}{m-2}} + \frac{\beta}{2\alpha^2} |\mathbf{B}_2(0)|^2, \tag{6.15}$$

где

$$\mathbb{C}_1(0) = C_1(0) - \frac{\beta(m-4)}{\alpha(m-2)}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right] - \frac{1}{\alpha}\left[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right] - \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2. \quad (6.16)$$

Напомним, что вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ и скалярная функция $C_1(t)$ связаны соотношением (5.3). Определим условия, обеспечивающие выполнимость алгебраического соотношения (5.3). Учитывая формулы (6.13), (6.15), (6.16), получим

$$\left|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2 [\Theta(t)]_+^{\frac{4}{m-2}} = 2\beta\mathbb{C}_1(0)[\Theta(t)]_+^{\frac{2m}{(m-2)^2}} + \frac{2\beta^2(m-4)}{\alpha(m-2)}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right][\Theta(t)]_+^{\frac{4}{(m-2)^2}}. \quad (6.17)$$

Очевидно, что равенство (6.17) будет выполняться в следующих двух случаях.

$\mathbb{I}$. Пусть $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $m \neq 3$. Тогда для того чтобы имела место зависимость (6.17), достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathbf{B}_1(0) = \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0), \quad \mathbb{C}_1(0) = 0, \quad C_2(0) = \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

где $\mathbb{C}_1(0)$ определяется согласно (6.16).

$\mathbb{II}$. Если $m = 3$, то для выполнимости (6.17) достаточно, чтобы

$$\left|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right] = 0, \mathbb{C}_1(0) = 0. \quad (6.18)$$

Тем самым в случае $\mathbb{I}$ справедливо

Утверждение 9. *Пусть* $p = 2 - \frac{m}{2}$, $\lambda = \frac{m}{2} - 2$, $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $m \neq 2$, $m \neq 3$, $m \neq 4$. *Тогда* $\tau = -1$, $\sigma = \frac{m-4}{m}$ *и система* АДУ (3.4) *имеет решение*

$$A_1(t) = \beta S E_m S', \quad A_2(t) = \alpha[\Theta(t)]^{-1} S E_m S',$$

$$\mathbf{B}_1(t) = \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0), \quad \mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0)[\Theta(t)]^{-1},$$

$$C_1(t) = \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2, \quad C_2(t) = \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2[\Theta(t)]^{-1},$$

причем $(I - E_m)S'\mathbf{B}_2(0) = 0$.

Кроме того, покажем, что в случае $\mathbb{II}$ имеет место следующий результат.

Теорема 7. *Если* $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $m = 3$, *то* $\tau = -1$, $\sigma = -\frac{1}{3}$ *и система* АДУ (3.4) *обладает решением*

$$A_1(t) = \beta S E_3 S', \quad A_2(t) = \alpha\left(1 - \frac{1}{2}\alpha t\right)^{-1} S E_3 S',$$

$$\mathbf{B}_1(t) = \left[\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right]\left(1 - \frac{1}{2}\alpha t\right)^2 + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0), \quad \mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0)\left(1 - \frac{1}{2}\alpha t\right)^{-1},$$

$$C_1(t) = \frac{1}{2\beta}\left|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2\left(1 - \frac{1}{2}\alpha t\right)^4 + \frac{1}{\alpha}\left[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right]\left(1 - \frac{1}{2}\alpha t\right)^2 + \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2, \quad (6.19)$$

$$C_2(t) = -\frac{\alpha}{2\beta^2}\left|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2\left(1 - \frac{1}{2}\alpha t\right)^3 + \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\left(1 - \frac{1}{2}\alpha t\right)^{-1},$$

причем

$$(I - E_3)S'\mathbf{B}_1(0) = (I - E_3)S'\mathbf{B}_2(0) = 0, \tag{6.20}$$

где $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in \mathbb{R}^n$ *— постоянные векторы,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

Доказательство. Отметим, во-первых, что вид матриц $A_1(t)$, $A_2(t)$ и вектор-столбца $\mathbf{B}_2(t)$ следует из утверждения 9. Как и при доказательстве утверждения 9, можно показать справедливость цепочки равенств (6.20). Обратимся теперь к соотношениям (6.18). Используя (6.16), нетрудно показать, что из (6.18) можно получить равенства

$$C_1(0) = \frac{1}{2\beta}\left|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2 + \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2 + \frac{1}{\alpha}\left[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right], \tag{6.21}$$

$$C_2(0) = \frac{1}{\beta}(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\alpha}{2\beta^2}|\mathbf{B}_1(0)|^2.$$

После того, как получены соотношения (6.21), легко убедиться, что из формул (6.13)–(6.15) следует соответственно вид функций $\mathbf{B}_1(t)$, $C_2(t)$, $C_1(t)$. В итоге приходим к справедливости соотношений (6.19). Теорема доказана.

Теперь сформулируем интересный, как нам представляется, результат, вытекающий из утверждения 1 и теоремы 7.

Теорема 8. *Функция*

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)\right]_+^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)\right]\right]^{-2}$$

является точным неавтомодельным анизотропным по пространственным переменным явным неотрицательным решением многомерного уравнения быстрой диффузии

$$u_t = \nabla \cdot (u^{-1/2}\nabla u), \quad u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

При этом матрицы $A_k(t)$, *вектор-столбцы* $\mathbf{B}_k(t)$ *и скалярные функции* $C_k(t)$ *определяются согласно* (6.19), (6.20), *где* $k = 1, 2$.

Далее рассмотрим случай, когда $\lambda \neq -\frac{2}{m}$, $\lambda \neq \frac{m}{2} - 2$. Пусть $\tau m + \sigma m + 4 = r$, где $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, $\tau = \frac{\lambda}{p}$, $\sigma = -\frac{2p}{m}$, $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, причем, как отмечалось в п. 5, имеет место соотношение $2p(\lambda + 1) = \lambda(2 - m)$. Тем самым из системы ОДУ (5.6), (5.7) получим, что $\varphi(t) = \beta[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m + 2}}$, $\psi(t) = \alpha[\Theta(t)]^{-1}$, где $\Theta(t) = 1 - \alpha(\lambda m + 2)t$, $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$. Следовательно, из формул (5.4), (5.5) имеем $A_1(t) = \beta[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m + 2}} SE_mS'$, $A_2(t) = \alpha[\Theta(t)]^{-1}SE_mS'$. Перепишем уравнение (3.4.2) в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{B}}_2(t) = \psi(t)S[\lambda mI + 2E_m]S'\mathbf{B}_2(t).$$

Решение этого уравнения легко определяется. В самом деле, в силу очевидных соотношений

$$\int_0^t \psi(\xi)d\xi = -\frac{1}{\lambda m+2}\ln|\Theta(t)|, \quad e^{v(t)E_m} = (I-E_m) + e^{v(t)}E_m$$

несложно показать справедливость цепочки равенств

$$\mathbf{B}_2(t) = S\left[\exp\left\{\lambda m\left(\int_0^t \psi(\xi)\,d\xi\right)I + 2\left(\int_0^t \psi(\xi)\,d\xi\right)E_m\right\}\right]S'\mathbf{B}_2(0)$$

$$= S\big[[\Theta(t)]_+^{-\frac{\lambda m}{\lambda m+2}}(I-E_m) + [\Theta(t)]^{-1}E_m\big]S'\mathbf{B}_2(0). \quad (6.22)$$

Используя алгебраическое соотношение (5.2), преобразуем уравнение (3.4.5). Имеем

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \alpha(\tau m+2)[\Theta(t)]^{-1}\mathbf{B}_1(t) + \beta[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}S[\sigma mI + 2E_m]S'\mathbf{B}_2(t). \quad (6.23)$$

С другой стороны, из (5.2) следует, что $(I-E_m)S'\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 0$, где E_m — матрица, обладающая свойством $E_m = E_m^2$. Учитывая сказанное, нетрудно убедиться в том, что вектор-столбец $\mathbf{B}_2(t)$ удовлетворяет соотношению $(I-E_m)S'\mathbf{B}_2(t) = 0$. Ясно, что $(I-E_m)S'\mathbf{B}_2(0) = 0$. После того как получен этот результат, легко видеть, что выражение (6.22) упрощается и в итоге принимает вид

$$\mathbf{B}_2(t) = [\Theta(t)]^{-1}SE_mS'\mathbf{B}_2(0) = [\Theta(t)]^{-1}\mathbf{B}_2(0). \quad (6.24)$$

Уравнение (6.23) в силу (6.24) запишется так:

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \alpha(\tau m+2)[\Theta(t)]^{-1}\mathbf{B}_1(t) + \beta(\sigma m+2)[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}-1}\mathbf{B}_2(0).$$

Отсюда сразу следует, что

$$\mathbf{B}_1(t) = \left[\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right][\Theta(t)]_+^{-\frac{\tau m+2}{\lambda m+2}} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}. \quad (6.25)$$

Так как функции $A_2(t), \mathbf{B}_2(t)$ нами определены, легко устанавливается, что уравнение (3.4.3) обладает решением

$$C_2(t) = \left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right][\Theta(t)]_+^{-\frac{\lambda m}{\lambda m+2}} + \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2[\Theta(t)]^{-1}. \quad (6.26)$$

Наконец, рассмотрим уравнение (3.4.6):

$$\dot{C}_1(t) = \alpha\tau m[\Theta(t)]^{-1}C_1(t) + \beta\sigma m[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}C_2(t) + 2(\mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t)),$$

где функции $\mathbf{B}_2(t)$, $\mathbf{B}_1(t)$, $C_2(t)$ определяются согласно (6.24)–(6.26). Простыми вычислениями проверяется, что

$$C_1(t) = \mathbb{C}_1(0)[\Theta(t)]_+^{-\frac{\tau m}{\lambda m+2}} + \frac{\beta\sigma m}{\alpha(\sigma m+2)}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right][\Theta(t)]_+^{-\frac{r-2}{\lambda m+2}}$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right][\Theta(t)]_+^{-\frac{\tau m+2}{\lambda m+2}} + \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}, \quad (6.27)$$

где введено обозначение

$$\mathbb{C}_1(0) = C_1(0) - \frac{\beta\sigma m}{\alpha(\sigma m+2)}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right]$$

$$-\frac{1}{\alpha}\left[(\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0))-\frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right]-\frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2. \quad (6.28)$$

Вернемся к формуле (5.3), связывающей вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ и скалярную функцию $C_1(t)$. Выясним, при каких условиях выполняется алгебраическое уравнение (5.3). В итоге (5.3) запишется так:

$$\left|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2[\Theta(t)]_+^{-\frac{2(\tau m+2)}{\lambda m+2}}=2\beta\mathbb{C}_1(0)[\Theta(t)]_+^{-\frac{r+\tau m}{\lambda m+2}}$$
$$+\frac{2\beta^2\sigma m)}{\alpha(\sigma m+2}\left[C_2(0)-\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right][\Theta(t)]_+^{-\frac{2(r-1)}{\lambda m+2}}. \quad (6.29)$$

Очевидно, что равенство (6.29) будет иметь место в двух случаях.

$\mathbb{I}$. Пусть $p\neq\frac{1}{2}$. Тогда равенство (6.29) выполняется, если

$$\mathbf{B}_1(0)=\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0),\quad \mathbb{C}_1(0)=0,\quad C_2(0)=\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

где $\mathbb{C}_1(0)$ определяется посредством (6.28).

$\mathbb{II}$. Если $p=\frac{1}{2}$, то для выполнимости (6.29) достаточно, чтобы

$$\left|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2=\frac{2\beta^2\sigma m}{\alpha(\sigma m+2)}\left[C_2(0)-\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right]=0,\mathbb{C}_1(0)=0. \quad (6.30)$$

Тем самым в случае $\mathbb{I}$ справедливо

Утверждение 10. *Пусть* $p\in\mathbb{R}$, $p\neq 0$, $p\neq\frac{1}{2}$, $p\neq 1$, $p\neq 2$, $\lambda=\frac{2p}{2-m-2p}$. *Тогда*

$$\tau=\frac{2}{2-m-2p},\quad \sigma=-\frac{2p}{m},\quad r=\frac{2(p-1)(2p+m-4)}{2-m-2p}$$

и система АДУ (3.4) *имеет следующее решение:*

$$A_1(t)=\beta[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}SE_mS',\quad A_2(t)=\alpha[\Theta(t)]^{-1}SE_mS',$$

$$\mathbf{B}_1(t)=\frac{\beta}{\alpha}[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}\mathbf{B}_2(0),\quad \mathbf{B}_2(t)=[\Theta(t)]^{-1}\mathbf{B}_2(0),$$

$$C_1(t)=\frac{\beta}{2\alpha^2}[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}|\mathbf{B}_2(0)|^2,\quad C_2(t)=\frac{1}{2\alpha}[\Theta(t)]^{-1}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

причем $(I-E_m)S'\mathbf{B}_2(0)=0$.

Более того, в случае $\mathbb{II}$ имеет место

Теорема 9. *Если* $p=\frac{1}{2}$, $\lambda=-\frac{1}{m-1}$, $m\in\{1,2,\dots,n\}$, $m\neq 1$, *то* $\tau=-\frac{2}{m-1}$, $\sigma=-\frac{1}{m}$ *и система* АДУ (3.4) *обладает решением*

$$A_1(t)=\beta[h(t)]_+^{-\frac{m-3}{m-2}}SE_mS',\quad A_2(t)=\alpha[h(t)]^{-1}SE_mS',$$

$$\mathbf{B}_1(t)=\left[\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right][h(t)]_+^{\frac{2}{m-2}}+\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)[h(t)]_+^{-\frac{m-3}{m-2}},\quad \mathbf{B}_2(t)=[h(t)]^{-1}\mathbf{B}_2(0),$$

$$C_1(t)=\frac{1}{2\beta}\left|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2[h(t)]_+^{\frac{m+1}{m-2}}$$
$$+\frac{1}{\alpha}\left[(\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0))-\frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right][h(t)]_+^{\frac{2}{m-2}}+\frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2[h(t)]_+^{-\frac{m-3}{m-2}}, \quad (6.31)$$

$$C_2(t) = -\frac{\alpha}{2\beta^2}\left|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)\right|^2 [h(t)]_+^{\frac{m}{m-2}} + \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2[h(t)]^{-1},$$

причем

$$(I - E_m)S'\mathbf{B}_1(0) = (I - E_m)S'\mathbf{B}_2(0) = 0, \tag{6.32}$$

где $h(t) = 1 - \alpha\frac{m-2}{m-1}t$, $\mathbf{B}_1(0)$, $\mathbf{B}_2(0) \in \mathbb{R}^n$ *— постоянные векторы;* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

Доказательство этой теоремы опирается на результаты, полученные в настоящем пункте. В самом деле, при сделанных предположениях вид функций $A_1(t)$, $A_2(t)$, $\mathbf{B}_2(t)$ непосредственно следует из утверждения 10. Кроме того, точно так же, как и при доказательстве утверждения 10, можно показать справедливость цепочки равенств (6.32). Помимо этого, нетрудно убедиться, что из соотношений (6.30) следуют формулы (6.21). Наконец, из (6.25)–(6.27) получим вид функций $\mathbf{B}_1(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$. Таким образом, матрицы $A_k(t)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_k(t)$ и скалярные функции $C_k(t)$ определяются согласно (6.31), (6.32), где $k = 1, 2$. Теорема доказана.

Отметим, что фактическим следствием утверждения 1 и теоремы 9 является следующий нетривиальный результат.

Теорема 10. *Уравнение нелинейной диффузии*

$$u_t = \nabla \cdot (u^{-1/(m-1)}\nabla u), \quad u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

обладает точным неавтомодельным анизотропным по пространственным переменным явным неотрицательным решением

$$u(\mathbf{x}, t) = \Bigg[-\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)\right]_+^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)\right]\Bigg]_+^{1-m}.$$

При этом функции $A_k(t)$, $\mathbf{B}_k(t)$, $C_k(t)$ *определяются формулами* (6.31), (6.32), *где* $k = 1, 2; m \in \{2, \ldots, n\}$.

Из теоремы 9 (при $m = 2$) с использованием второго замечательного предела вытекает, как нам представляется, важное

Следствие 2. *Если* $p = 1/2$, $\lambda = -1$, $m = 2$, *то* $\tau = -2$, $\sigma = -1/2$, $\xi = 1$ *и система* АДУ (3.4) *имеет следующее решение:*

$$A_1(t) = \beta e^{-\alpha t}SE_2S', \quad A_2(t) = \alpha SE_2S',$$

$$\mathbf{B}_1(t) = e^{-2\alpha t}\left[\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)\mathbf{B}_2(0) + \mathbf{B}_1(0)\right], \quad \mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0),$$

$$C_1(t) = \frac{1}{2\beta}e^{-3\alpha t}\left|\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)\mathbf{B}_2(0) + \mathbf{B}_1(0)\right|^2,$$

$$C_2(t) = -\frac{\alpha}{2\beta^2}e^{-2\alpha t}\left|\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0) - \mathbf{B}_1(0)\right|^2 + \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

причем

$$(I - E_2)S'\mathbf{B}_1(0) = (I - E_2)S'\mathbf{B}_2(0) = 0,$$

где $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

Легко видеть, что полученные соотношения совпадают с формулами (6.6), (6.7).

Итак, полностью завершено исследование случая $p \neq 2$. Теперь перейдем к изучению системы АДУ (3.4), когда $p = 2$.

7. Существование решений системы АДУ (3.4) ($p = 2$). Итак, пусть $p = 2$. Тогда прежде всего отметим, что параметры ξ, τ, σ, λ, входящие в систему АДУ (3.4), запишутся так:

$$\xi = \frac{2m}{m+2}, \quad \tau = -\frac{2}{m+2}, \quad \sigma = -\frac{4}{m}, \quad \lambda = -\frac{4}{m+2}. \tag{7.1}$$

При этом заметим, что из (7.1) следует зависимость $\sigma m + 4 = 0$, где $m = \operatorname{rank} A_1(t)$; $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. С другой стороны, так как

$$\xi = p(\lambda + 1) - \lambda, \quad \tau = \frac{\lambda}{p}, \quad \sigma = \frac{\lambda p}{\xi}, \quad \lambda = -\frac{4}{m+2},$$

из соотношения $\sigma m + 4 = 0$ получим, что $p = 2$. Итак, из утверждения 6 следует, что вещественная симметричная матрица $A_1(t)$, определяемая согласно (5.4), удовлетворяет алгебраическому уравнению (3.4.7), если $\operatorname{rank} A_1(t) = m = -2\xi/\lambda \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $\lambda \neq 0$, $\xi \neq 0$. Более того, мы показали, что функции (3.24)–(3.26) составляют решение задачи Коши (3.11)–(3.13). Тем самым, подставляя функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, определяемые посредством формул (5.4), (3.24), в матричное уравнение (3.4.4) и учитывая (7.1), после несложных преобразований приходим к зависимости

$$\left[\dot\varphi(t) + \frac{2}{m+2}\varphi(t)\operatorname{tr} D(t)\right] E_m = -4\varphi(t)(I - E_m)D(t),$$

причем

$$\operatorname{tr} A_2(t) = \operatorname{tr} D(t) = \sum_{k=1}^{n} d_k(t) = v(t)$$

(см. (3.23), (3.24)), где $D(t)$ — матрица вида (3.22); $E_m = \operatorname{diag}[1, \dots, 1, 0, \dots, 0] \in M_n(\mathbb{R})$ — матрица, в которой число единиц на диагонали равно $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. В связи с этим последнее соотношение распадается на два:

$$\dot\varphi(t) = -\frac{2}{m+2}\varphi(t)\sum_{k=1}^{m} d_k(t), \quad 0 = -4\varphi(t)d_k(t), \ k = m+1, \dots, n.$$

Итак, $d_k(t) \equiv 0$ для $k = m+1, \dots, n$ и $D(t) = \operatorname{diag}[d_1(t), \dots, d_m(t), 0, \dots, 0]$. Так как $\lambda = -\frac{4}{m+2}$, представление (3.19) приводит к зависимости

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} d_k(t) = -\frac{(m+2)}{4}\cdot\frac{\ddot z(t)}{\dot z(t)}.$$

Тем самым справедливо равенство

$$2\dot\varphi(t)\dot z(t) = \varphi(t)\ddot z(t),$$

т. е. $\varphi(t) = \varphi(0)[\dot z(t)]^{1/2}$, причем $\dot z(0) = 1$. В итоге получим, что

$$A_1(t) = \varphi(0)[\dot z(t)]_+^{1/2} S E_m S', \quad A_1(0) = \varphi(0) S E_m S'.$$

Поэтому имеет место цепочка равенств

$$A_1(t) = \beta[\dot z(t)]_+^{1/2} S E_m S' = [\dot z(t)]_+^{1/2} A_1(0), \tag{7.2}$$

где $\beta = \varphi(0) \neq 0$. Кроме того, в рассматриваемом случае задача Коши (3.10) запишется так:

$$\dot{z}(t) = \prod_{k=1}^{m} [1 - 2d_k(0)z(t)]^{\frac{2}{m+2}}, \quad z(0) = 0, \tag{7.3}$$

где $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. При этом собственные значения $d_k(t)$ симметричной матрицы $A_2(t)$ принимают вид

$$d_k(t) = \frac{d_k(0)}{1 - 2d_k(0)z(t)}\dot{z}(t),\ k = 1, 2 \ldots, m; \quad d_k(t) \equiv 0,\ k = m+1, \ldots, n. \tag{7.4}$$

Итак, из (7.4) сразу следует, что $D(0)E_m = D(0)$, где

$$D(0) = \operatorname{diag}[d_1(0), \ldots, d_m(0), 0, \ldots, 0] \in M_n(\mathbb{R}).$$

При этом, разумеется (см. формулы (3.14), (7.3)), в исследуемом случае справедлива цепочка равенств

$$A_2(t) = \prod_{k=1}^{m} [1 - 2d_k(0)z(t)]^{\frac{2}{m+2}} SQ(t)D(0)S' = \dot{z}(t)SQ(t)D(0)S', \tag{3.14$'$}$$

где

$$Q(t) = \operatorname{diag}[[1 - 2d_1(0)z(t)]^{-1}, \ldots, [1 - 2d_m(0)z(t)]^{-1}, 1, \ldots, 1]. \tag{3.17$'$}$$

Здесь, исходя из (3.17), мы учли (7.4). Тем самым в силу соотношения (5.2) и формул (7.1), (7.2), (3.14′) задача Коши (4.13) конкретизируется:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 2\dot{z}(t)SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(t) - \frac{2}{m+2}v(t)\mathbf{B}_1(t)\\ + 2\beta[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}SE_mS'\mathbf{B}_2(t) - 4\beta[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_2(t), \quad \mathbf{B}_1(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_1(0),\end{aligned} \tag{7.5}$$

где $Q(t)$ определяется согласно (3.17′). Принимая во внимание равенство (5.2) и вытекающее из него представление $(I - E_m)S'\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 0$, нетрудно убедиться, что уравнение (7.5) приводит к зависимостям

$$(I - E_m)S'\mathbf{B}_2(t) = 0, \quad (I - E_m)S'\mathbf{B}_2(0) = 0. \tag{7.6}$$

В самом деле, из (7.5) следует, что $\beta[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}(I - E_m)S'\mathbf{B}_2(t) = 0$. Так как $\beta \neq 0$ и функция $z(t) = \mathrm{const} \neq 0$ не является решением задачи Коши (7.3), приходим к справедливости формул (7.6). Теперь, воспользовавшись (7.6), несложно проверить, что задачу Коши (7.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 2\dot{z}(t)SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(t) - \frac{2}{m+2}v(t)\mathbf{B}_1(t)\\ - 2\beta[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_2(t), \mathbf{B}_1(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_1(0),\end{aligned} \tag{7.7}$$

где $\mathbf{B}_2(t)$ определяется посредством (3.15). Покажем, что вид матрицы $A_1(t)$, определяемой согласно (7.2), следует из формулы (4.30). В первую очередь, важно отметить, что выполняется очевидное соотношение $\Lambda(0) = \beta E_m$, которое вытекает из представлений $A_1(0) = \beta SE_mS'$, $A_1(0) = S\Lambda(0)S'$. При этом мы воспользовались тем фактом, что $\dot{z}(0) = 1$. Итак, с одной стороны, из (7.2) выводим, что $u(t) = \operatorname{tr} A_1(t) = \beta m[\dot{z}(t)]_+^{1/2}$. С другой стороны, так как $p = 2$, формула (4.23) приводит к зависимости $u_0(t) = [\dot{z}(t)]_+^{-1/2}u(t)$. В итоге получим, что $u_0(t) = \beta m$. Далее, поскольку $Q^{-1}(\eta) = [I - 2z(\eta)D(0)]$ (см. (3.21)), непосредственными вычислениями нетрудно показать, что справедливо соотношение

$$\int\limits_0^t \dot z(\eta)Q^{-1}(\eta)\,d\eta = z(t)[I - z(t)D(0)] \tag{7.8}$$

и тем самым имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} A_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac12} S \left[-4\beta \int\limits_0^t \dot z(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)\,d\eta + \Lambda(0)\right] Q^2(t)S' \\ = \beta[\dot z(t)]_+^{\frac12} S[E_m - 4z(t)[I - z(t)D(0)]D(0)]Q^2(t)S' \\ = \beta[\dot z(t)]_+^{\frac12} SE_m[I - 2z(t)D(0)]^2 Q^2(t)S' = \beta[\dot z(t)]_+^{\frac12} SE_m S', \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Теперь для исследуемого случая вычислим вид вектор-столбца $\mathbf{B}_1(t)$, определяемого согласно (4.31). В результате тривиальных преобразований с использованием формулы (7.8) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac12} SQ(t)[2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0) - 4\beta z(t)[I - z(t)D(0)]Q(t)S'\mathbf{B}_2(0) \\ + S'\mathbf{B}_1(0)] = [\dot z(t)]_+^{\frac12} SQ(t)[-2\beta z(t)[I - 2z(t)D(0)]Q(t)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0)] \\ = [\dot z(t)]_+^{\frac12} SQ(t)\left[-2\beta z(t)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0)\right] \\ = [\dot z(t)]_+^{\frac12} \left[SQ(t)S'\mathbf{B}_1(0) - 2\beta z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)\right]. \end{aligned}$$

При этом мы учли тождество (3.21). Итак, имеем

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac12} \left[SQ(t)S'\mathbf{B}_1(0) - 2\beta z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)\right]. \tag{7.9}$$

Тем самым, с одной стороны, воспользовавшись соотношениями (3.19), (3.20), несложно проверить, что функции (3.15), (7.9) удовлетворяют задаче Коши (7.7). С другой стороны, нетрудно убедиться, что найденные выше функции (3.14′), (3.15), (7.2), (7.9) обращают в тождество и исходное уравнение (3.4.5). Покажем это. Во-первых, дифференцируя (7.9) по времени и учитывая (3.19), (3.20), (7.9), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}_1(t) = -\frac{2}{m+2}v(t)\mathbf{B}_1(t) + 2[\dot z(t)]_+^{\frac32}[SQ^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0) \\ - \beta SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) - 2\beta z(t)SQ^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0)], \end{aligned} \tag{7.10}$$

где $v(t) = \operatorname{tr} A_2(t)$. Во-вторых, расписывая правую часть уравнения (3.4.5) и принимая во внимание формулы (3.14′), (3.15), (7.1), (7.2), (7.9), (7.10), приходим к справедливости цепочки равенств

$$\begin{aligned} 2A_1(t)\mathbf{B}_2(t) + 2A_2(t)\mathbf{B}_1(t) + \tau v(t)\mathbf{B}_1(t) + \sigma u(t)\mathbf{B}_2(t) \\ = 2\beta[\dot z(t)]_+^{\frac32} SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) + 2[\dot z(t)]_+^{\frac32} SQ(t)D(0)S' \\ \times [SQ(t)S'\mathbf{B}_1(0) - 2\beta z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)] - \frac{2}{m+2}v(t)\mathbf{B}_1(t) \\ - 4\beta[\dot z(t)]_+^{\frac32} SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) = -\frac{2}{m+2}v(t)\mathbf{B}_1(t) + 2[\dot z(t)]_+^{\frac32} \\ \times [SQ^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0) - \beta SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) - 2\beta z(t)SQ^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0)] = \dot{\mathbf{B}}_1(t). \end{aligned}$$

Здесь мы учли введенное выше обозначение $u(t) = \operatorname{tr} A_1(t)$.

Теперь займемся вычислением скалярной функции $C_1(t)$. Используя представление $\Lambda(0) = \beta E_m$ и очевидные соотношения

$$\int\limits_0^t \dot z(\eta) u_0(\eta)\,d\eta = \beta m z(t), \quad \int\limits_0^t z(\eta)\dot z(\eta) u_0(\eta)\,d\eta = \frac{1}{2}\beta m z^2(t),$$

легко устанавливается (проверяется вычислением), что формула (4.32) приводит к зависимости

$$C_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}[C_1(0) - 4\beta z(t) C_2(0) + 2z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)) \\ - 4\beta z^2(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))]. \quad (7.11)$$

Далее, в силу формул (3.14′), (3.15), (3.16), (7.1), (7.2), (7.9) и с учетом введенных выше обозначений $v(t) = \operatorname{tr} A_2(t)$, $u(t) = \operatorname{tr} A_1(t) = \beta m[\dot z(t)]_+^{1/2}$ уравнение (3.4.6) запишется так:

$$\dot C_1(t) = -\frac{2}{m+2} v(t) C_1(t) + 2[\dot z(t)]_+^{\frac{3}{2}}[-2\beta C_2(0) + (Q^2(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)) \\ - 2\beta z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)) - 2\beta z(t)(Q^2(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))].$$

Решение этого линейного неоднородного уравнения определяется методом вариации постоянной и имеет вид

$$C_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}\Bigg[2\Bigg(\Bigg[\int\limits_0^t \dot z(\eta) Q^2(\eta)\,d\eta\Bigg] S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\Bigg) \\ - 4\beta\Bigg(\Bigg[\int\limits_0^t z(\eta)\dot z(\eta)[Q(\eta) + Q^2(\eta)]\,d\eta\Bigg] S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\Bigg) - 4\beta z(t) C_2(0) + C_1(0)\Bigg]. \quad (7.12)$$

Пользуясь равенством (3.17), с помощью несложных выкладок нетрудно убедиться, что имеют место представления

$$\int\limits_0^t \dot z(\eta) Q^2(\eta)\,d\eta = z(t) Q(t), \quad \int\limits_0^t z(\eta)\dot z(\eta)[Q(\eta) + Q^2(\eta)]\,d\eta = z^2(t) Q(t). \quad (7.13)$$

Итак, легко видеть, что, объединяя (7.12), (7.13), приходим к справедливости формулы (7.11).

Тем самым все подготовлено для того, чтобы определить достаточные условия, обеспечивающие выполнимость алгебраического уравнения (5.3). Осуществим намеченное. Учитывая, что имеют место представления (7.9), (7.11), а также равенство $\varphi(t) = \beta[\dot z(t)]_+^{1/2}$, на основании (5.3) заключаем, что

$$C_1(0) - 4\beta z(t) C_2(0) + 2z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)) \\ - 4\beta z^2(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)) = \frac{1}{2\beta}|Q(t)S'\mathbf{B}_1(0)|^2 \\ - 2z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)) + 2\beta z^2(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2. \quad (7.14)$$

Заметим прежде всего, что из (7.14) при $t=0$ следует зависимость

$$C_1(0)=\frac{1}{2\beta}|S'\mathbf{B}_1(0)|^2=\frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2. \tag{7.15}$$

При этом мы приняли во внимание, что $SS'=I$, $z(0)=0$, $Q(0)=I$. Подставляя (7.15) в (7.14) и очевидным образом группируя слагаемые, получим

$$\begin{aligned}&-4\beta z(t)C_2(0)+2z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0),[Q(t)+I]S'\mathbf{B}_2(0))\\&=\frac{1}{2\beta}([Q^2(t)-I]S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_1(0))+2\beta z^2(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0),[Q(t)+2I]S'\mathbf{B}_2(0)).\end{aligned}$$

Вернемся к соотношению (3.21), из которого $Q(t)-I=2z(t)Q(t)D(0)$. В результате с учетом того, что $z(t)\neq 0$, просто проверяется справедливость равенства

$$\begin{aligned}&-4\beta C_2(0)+2(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0),[Q(t)+I]S'\mathbf{B}_2(0))\\&\qquad=\frac{1}{\beta}(Q(t)[Q(t)+I]D(0)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_1(0))\\&\qquad\qquad+2\beta z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0),[Q(t)+2I]S'\mathbf{B}_2(0)).\end{aligned} \tag{7.16}$$

Теперь наша цель — определить $C_2(0)$. В связи с этим поскольку $Q(0)=I$, $z(0)=0$, из (7.16) при $t=0$ следует, что

$$\begin{aligned}C_2(0)&=\frac{1}{\beta}\left[(S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_2(0))-\frac{1}{2\beta}(D(0)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_1(0))\right]\\&=\frac{1}{\beta}\left[(\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0))-\frac{1}{2\beta}(D(0)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_1(0))\right].\end{aligned} \tag{7.17}$$

Объединяя (7.16), (7.17) и должным образом группируя слагаемые, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}&2(S'\mathbf{B}_1(0),Q(t)[Q(t)+I]S'\mathbf{B}_2(0))-4(S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_2(0))\\&\quad=\frac{1}{\beta}(Q(t)[Q(t)+I]D(0)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_1(0))-\frac{2}{\beta}(D(0)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_1(0))\\&\qquad+2\beta z(t)(S'\mathbf{B}_2(0),Q(t)[Q(t)+2I]S'\mathbf{B}_2(0)).\end{aligned}$$

Тем самым легко проверить справедливость следующего равенства:

$$\begin{aligned}&2(S'\mathbf{B}_1(0),[Q(t)(Q(t)+I)-2I]S'\mathbf{B}_2(0))\\&\qquad=\frac{1}{\beta}(S'\mathbf{B}_1(0),[Q(t)(Q(t)+I)-2I]D(0)S'\mathbf{B}_1(0))\\&\qquad\qquad+2\beta z(t)(S'\mathbf{B}_2(0),Q(t)[Q(t)+2I]S'\mathbf{B}_2(0)).\end{aligned}$$

Далее, очевидно, что в силу (3.21) имеет место цепочка равенств

$$Q(t)\,(Q(t)+I)-2I=(Q(t)-I)\,[Q(t)+2I]=2z(t)Q(t)[Q(t)+2I]D(0).$$

В соответствии с ней предыдущее соотношение запишется так:

$$\begin{aligned}&2(S'\mathbf{B}_1(0),H(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0))\\&\qquad=\frac{1}{\beta}(S'\mathbf{B}_1(0),H(t)D^2(0)S'\mathbf{B}_1(0))+\beta(S'\mathbf{B}_2(0),H(t)S'\mathbf{B}_2(0)),\end{aligned} \tag{7.18}$$

где введено обозначение $H(t)=Q(t)[Q(t)+2I]$. Умножая обе части (7.18) на $\beta\neq 0$ и принимая во внимание тот факт, что $H(t)\neq 0$, приходим к формуле

$$|\beta S'\mathbf{B}_2(0)-D(0)S'\mathbf{B}_1(0)|^2=0.$$

При этом мы учли, что $z(t) \neq 0$. Итак, в дальнейшем, не теряя общности, будем считать, что справедлива зависимость

$$\mathbf{B}_2(0) = \frac{1}{\beta} S D(0) S' \mathbf{B}_1(0). \tag{7.19}$$

После этого ближайшая наша задача — выяснить с учетом (7.19), к какой зависимости приводит вторая из формул (7.6). Однако прежде чем приступить к намеченному, поясним смысл алгебраических соотношений

$$(I - E_m) S' \mathbf{B}_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \tag{7.20}$$

встречающихся, как правило, в большинстве разделов этой работы. С этой целью перепишем (7.20) в виде $\mathbf{B}_k(0) = S E_m S' \mathbf{B}_k(0)$, где $S \in M_n(\mathbb{R})$ — вещественная ортогональная матрица; $\mathbf{B}_k(0) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ — вектор-столбцы; $E_m = \operatorname{diag}[1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0] \in M_n(\mathbb{R})$ — матрица, в которой число единиц на диагонали равно $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Далее, введем обозначение $P_m = S E_m S'$, где S, S' — невырожденные (неособые) матрицы. Тем самым $\mathbf{B}_k(0) = P_m \mathbf{B}_k(0)$, $P_m^2 = P_m$, т. е. $P_m \in M_n(\mathbb{R})$ — вещественная симметричная идемпотентная матрица, причем P_m всегда можно привести к диагональному виду и, кроме того, $\operatorname{tr} P_m = m$. Помимо этого, хорошо известно, что вещественная симметричная матрица P_m ранга m является идемпотентной тогда и только тогда, когда m ее собственных значений равны единице, а остальные $n - m$ равны нулю. Более того, согласно [2] евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ представимо в виде прямой суммы подпространств: области значений и ядра (нуль-пространства) любой вещественной симметричной матрицы. Символически это записывается следующим образом: $\mathbb{R}^n = L_0 \bigoplus L_1$, где $L_0 = \operatorname{range} P_m, L_1 = \ker P_m$ соответственно область значений и ядро матрицы P_m. Очевидно, что $\mathbf{B}_k(0) \in L_0$, где $k = 1, 2$.

С другой стороны, рассматривая вектор-столбцы $\widehat{\mathbf{B}}_k(0) = E_m S' \mathbf{B}_k(0)$, получим, что $\mathbf{B}_k(0) = S \widehat{\mathbf{B}}_k(0)$. Ясно, что $\widehat{\mathbf{B}}_k(0)$ принадлежит множеству $\mathscr{L}_m = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\}$.

Итак, для каждого фиксированного k алгебраическое соотношение (7.20) выполняется тогда и только тогда, когда существует вектор-столбец $\widehat{\mathbf{B}}_k(0) \in \mathscr{L}_m$ такой, что $\mathbf{B}_k(0) = S \widehat{\mathbf{B}}_k(0)$.

Далее, вернемся ко второму из соотношений (7.6). Легко видеть, что, исходя из зависимости $(I - E_m) S' \mathbf{B}_2(0) = 0$ и принимая во внимание формулу (7.19), имеем

$$(I - E_m) S' \mathbf{B}_2(0) = \frac{1}{\beta} D(0) (I - E_m) S' \mathbf{B}_1(0) = 0.$$

Так как $D(0) \neq 0$, то $(I - E_m) S' \mathbf{B}_1(0) = 0$. Этот факт согласуется с алгебраическим соотношением (5.2) при $t = 0$. Далее, используя (7.19), нетрудно проверить, что выражение (7.18) выполняется тождественно. Теперь с учетом зависимости (7.19) выясним, что дает равенство (7.17). Оказывается, что справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} C_2(0) &= \frac{1}{2\beta^2} (S' \mathbf{B}_1(0), D(0) S' \mathbf{B}_1(0)) \\ &= \frac{1}{2\beta^2} (\mathbf{B}_1(0), S D(0) S' \mathbf{B}_1(0)) = \frac{1}{2\beta} (\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)). \end{aligned} \tag{7.21}$$

Обратимся теперь к формуле (3.16) и найдем явный вид $C_2(t)$. Несложно убедиться, что при выполнении условий (3.14), (3.21), (7.19), (7.21) скалярная функция $C_2(t)$ принимает вид

$$C_2(t) = \frac{1}{2\beta^2}(\mathbf{B}_1(0), A_2(t)\mathbf{B}_1(0)). \tag{7.22}$$

В самом деле, легко проверить, что в этом случае имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned}C_2(t) = \dot z(t)\bigg[&\frac{1}{2\beta^2}(\mathbf{B}_1(0), SD(0)S'\mathbf{B}_1(0))\\ &+\frac{1}{\beta^2}z(t)(Q(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0), D(0)S'\mathbf{B}_1(0))\bigg]\\ =\frac{1}{2\beta^2}&\dot z(t)[(\mathbf{B}_1(0), SD(0)S'\mathbf{B}_1(0)) + 2z(t)Q(t)(\mathbf{B}_1(0), SD^2(0)S'\mathbf{B}_1(0))]\\ &= \frac{1}{2\beta^2}\dot z(t)(\mathbf{B}_1(0), S[I+2z(t)Q(t)D(0)]D(0)S'\mathbf{B}_1(0))\\ &= \frac{1}{2\beta^2}\dot z(t)(\mathbf{B}_1(0), SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0)) = \frac{1}{2\beta^2}(\mathbf{B}_1(0), A_2(t)\mathbf{B}_1(0)).\end{aligned}$$

Таким образом, справедливо выражение (7.22). Напомним, что матрицы $A_2(t)$, $A_1(t)$ определяются соответственно формулами (3.14), (7.2).

Выше (см. (7.9)) нами была найдена функция $\mathbf{B}_1(t)$. Начиная с (7.9) и используя (3.21), (7.19), нетрудно установить, что вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ запишется так:

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_1(0). \tag{7.23}$$

Действительно, непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1(t) &= [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}[SQ(t)S'\mathbf{B}_1(0) - 2z(t)SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0)]\\ &= [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}S[Q(t) - 2z(t)Q(t)D(0)]S'\mathbf{B}_1(0) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_1(0).\end{aligned}$$

Значит, в самом деле выполняется формула (7.23). Теперь, принимая во внимание (7.23), заключаем, что если имеет место зависимость $(I - E_m)S'\mathbf{B}_1(0) = 0$, то справедливо алгебраическое уравнение (5.2).

Наконец, вернемся к соотношению (7.11). Покажем, что прямые вычисления с применением формул (3.21), (7.15), (7.19), (7.21) приводят (7.11) к виду

$$C_1(t) = \frac{1}{2\beta}[\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}|\mathbf{B}_1(0)|^2. \tag{7.24}$$

В самом деле, оказывается, что в изучаемом случае выполняется цепочка равенств

$$\begin{aligned}C_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}\bigg[&\frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2 - \frac{2}{\beta}z(t)(S'\mathbf{B}_1(0), D(0)S'\mathbf{B}_1(0))\\ +\frac{2}{\beta}z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), &D(0)S'\mathbf{B}_1(0)) - \frac{4}{\beta}z^2(t)(D(0)S'\mathbf{B}_1(0), Q(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0))\bigg]\\ &= [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}\bigg[\frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2 - (S'\mathbf{B}_1(0), \frac{2}{\beta}z(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0))\\ +(S'\mathbf{B}_1(0), &\frac{2}{\beta}z(t)Q(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0)) - (S'\mathbf{B}_1(0), \frac{4}{\beta}z^2(t)Q(t)D^2(0)S'\mathbf{B}_1(0))\bigg]\\ &= [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}\bigg[\frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2 + \bigg(S'\mathbf{B}_1(0), \frac{2}{\beta}z(t)[Q(t)\end{aligned}$$

$$- 2z(t)Q(t)D(0) - I]D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\Big)\Big] = \frac{1}{2\beta}[\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}|\mathbf{B}_1(0)|^2.$$

При этом мы учли, что $Q(t) - 2z(t)Q(t)D(0) - I = 0$ (см. (3.21)). Итак, как и следовало ожидать, $C_1(t)$ определяется согласно (7.24). В заключение отметим, что из теоремы 3 и утверждения 3 следует соответственно симметричность предъявленных матриц $A_2(t)$, $A_1(t)$ для всех t из областей их определения. Таким образом, суммируя проведенные в этом пункте исследования, приходим к одному из основных результатов настоящей работы.

Теорема 11. *Пусть $p = 2$ и заданы вещественные симметричные матрицы $A_1(0), A_2(0) \in M_n(\mathbb{R})$ со свойством* (4.7), *вектор-столбцы $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, связанные соотношением* (7.19), *и скаляры $C_1(0), C_2(0) \in \mathbb{R}$, определяемые согласно* (7.15), (7.21). *Пусть, кроме того, функция $z(t)$ является вещественным решением задачи Коши* (7.3). *Тогда задача Коши* (3.11)–(3.13), (4.2), (4.13), (4.18), *нагруженная алгебраическими уравнениями* (3.4.7)–(3.4.9), *обладает вещественным решением*

$$A_2(t) = \dot z(t)SQ(t)D(0)S' = \dot z(t)SQ(t)S'A_2(0), \tag{7.25}$$

$$\mathbf{B}_2(t) = \dot z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) = \frac{1}{\beta}\dot z(t)SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0) = \frac{1}{\beta}A_2(t)\mathbf{B}_1(0), \tag{7.26}$$

$$\begin{aligned}C_2(t) &= \dot z(t)C_2(0) + z(t)\,(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)) = \dot z(t)[C_2(0) + z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))]\\ &= \frac{1}{2\beta^2}\dot z(t)(SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_1(0)) = \frac{1}{2\beta^2}(A_2(t)\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_1(0)),\end{aligned} \tag{7.27}$$

$$A_1(t) = \beta[\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}SE_mS' = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}A_1(0), \tag{7.28}$$

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}[SQ(t)S'\mathbf{B}_1(0) - 2\beta z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)] = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_1(0), \tag{7.29}$$

$$\begin{aligned}C_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}[C_1(0) - 4\beta z(t)C_2(0) + 2z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\ - 4\beta z^2(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))] = \frac{1}{2\beta}[\dot z(t)]_+^{\frac{1}{2}}|\mathbf{B}_1(0)|^2.\end{aligned} \tag{7.30}$$

Более того, $A_1(t)$, $A_2(t)$ — вещественные симметричные матрицы соответственно для всех $t \in \operatorname{domain} A_1(t)$, $t \in \operatorname{domain} A_2(t)$. Здесь

$$Q(t) = \operatorname{diag}[[1 - 2d_1(0)z(t)]^{-1}, \ldots, [1 - 2d_m(0)z(t)]^{-1}, 1, \ldots, 1], \tag{7.31}$$

$$D(0) = \operatorname{diag}[d_1(0), \ldots, d_m(0), 0, \ldots, 0], \tag{7.32}$$

$d_l(0) \in \mathbb{R}$ — собственные значения матрицы $A_2(0); d_l \neq 0; l = 1, 2, \ldots, m$.

Объединяя утверждение 1 и теорему 11, заключаем, что справедлива

Теорема 12. *Уравнение быстрой диффузии*

$$u_t = \nabla \cdot (u^{-4/(m+2)}\nabla u), u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{7.33}$$

имеет точное неавтомодельное анизотропное по пространственным переменным явное неотрицательное решение

$$\begin{aligned}u(\mathbf{x}, t) = \Bigg[-\frac{4}{m+2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)\right]^2\\ - \frac{4}{m+2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)\right]\Bigg]_+^{-\frac{m+2}{4}}.\end{aligned} \tag{7.34}$$

При этом функции $A_k(t)$, $\mathbf{B}_k(t)$, $C_k(t)$ *определяются формулами* (7.25)–(7.32), *где* $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k = 1, 2$.

Пример 2. Уравнение нелинейной диффузии

$$u_t = \Delta \ln u, \quad u = u(x, y, z, t), \tag{7.35}$$

обладает точным неавтомодельным анизотропным по пространственным переменным явным неотрицательным решением

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) = \Bigg[& \frac{2\operatorname{sn}(\sqrt{c_2-c_1}t,k)\operatorname{cn}(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}{\operatorname{dn}(\sqrt{c_2-c_1}t,k)} \Bigg[\sqrt{c_2-c_1}x^2 \\ & - \frac{2c_3}{k}x - \frac{\operatorname{sn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}{\operatorname{dn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_2-c_1}} y^2 + 2c_4ky \right) \\ & + \operatorname{sn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k) \left(\sqrt{c_2-c_1}z^2 - \frac{2c_5}{k}z \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{c_2-c_1}\operatorname{cn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)} \left(\frac{c_3^2}{k^2} - c_4^2 \frac{\operatorname{sn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}{\operatorname{dn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)} \right. \\ & \left. - \frac{c_5^2}{k^2}\operatorname{sn}^4(\sqrt{c_2-c_1}t,k) \right) - \frac{2c_6}{k} \frac{\operatorname{sn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}{\operatorname{cn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)} \Bigg]^{-1} \Bigg]_+ . \end{aligned} \tag{7.36}$$

Здесь $\operatorname{sn}(\sqrt{c_2-c_1}t,k)$, $\operatorname{cn}(\sqrt{c_2-c_1}t,k)$ — эллиптический синус и косинус Якоби с модулем $k = \sqrt{c_2/(c_2-c_1)}$, $c_i \in \mathbb{R}, c_2 > c_1, c_2 \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, 6$.

Рассмотрим случаи вырождения эллиптических функций в тригонометрические и гиперболические. Если $c_2 = 0$, то $k = 0$ и из формулы (7.36) получим точное решение в тригонометрических функциях

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) = \Bigg[& 2\sin(\sqrt{-c_1}t)\cos(\sqrt{-c_1}t) \Bigg[\sqrt{-c_1}x^2 - 2c_3x \\ & + \sin^2(\sqrt{-c_1}t) \left(\frac{-c_1}{\sqrt{-c_1}} y^2 - 2c_4y + \sqrt{-c_1}z^2 - 2c_5z \right) \\ & + \frac{c_3^2}{\sqrt{-c_1}\cos^2(\sqrt{-c_1}t)} - \frac{(c_4^2+c_5^2)}{\sqrt{-c_1}} \frac{\sin^4(\sqrt{-c_1}t)}{\cos^2(\sqrt{-c_1}t)} - 2c_6\operatorname{tg}^2(\sqrt{-c_1}t) \Bigg]^{-1} \Bigg]_+ . \end{aligned} \tag{7.37}$$

Отметим, что при $c_1 = -1$, $c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$ из (7.37) имеем решение

$$u(x,y,z,t) = \left[\frac{2\sin t\cos t}{x^2 + \sin^2 t(y^2+z^2)} \right]_+ ,$$

приведенное в [3]. Полагая $c_1 = 0$, получим $k = 1$, и из выражения (7.36) вытекает точное решение в гиперболических функциях

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) = \Bigg[& \operatorname{th}(\sqrt{c_2}t) \Bigg[\sqrt{c_2}x^2 - 2c_3x - 2c_4\operatorname{sh}^2(\sqrt{c_2}t)y \\ & + \operatorname{th}^2(\sqrt{c_2}t)(\sqrt{c_2}z^2 - 2c_5z) + \frac{c_3^2}{\sqrt{c_2}}\operatorname{ch}^2(\sqrt{c_2}t) \\ & - \frac{c_4^2}{\sqrt{c_2}}\operatorname{sh}^2(\sqrt{c_2}t)\operatorname{ch}^2(\sqrt{c_2}t) - \frac{c_5^2}{\sqrt{c_2}} \frac{\operatorname{sh}^4(\sqrt{c_2}t)}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{c_2}t)} - 2c_6\operatorname{sh}^2(\sqrt{c_2}t) \Bigg]^{-1} \Bigg]_+ , \end{aligned} \tag{7.38}$$

которое является довольно интересным, так как при $c_4 = 0$ оно вырождается в двумерное. Например, если $c_2 = 1$, $c_3 = c_4 = c_5 = 0$, $c_6 = -1/2$, то из (7.38) следует точное решение

$$u(x,y,t) = \left[\frac{2\operatorname{th} t}{x^2 + y^2 \operatorname{th}^2 t + \operatorname{sh}^2 t}\right]_+$$

уравнения (7.35) для двух пространственных переменных.

В заключение приведем краткую сводку основных результатов в терминах параметров λ, p и $m \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1. Уравнение нелинейной диффузии

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u), \quad u \overset{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{7.39}$$

обладает точным неотрицательным решением

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[\lambda\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)\right]\right]_+^{1/\lambda}$$

для любого параметра $\lambda \neq 0$, при этом функции $A_2(t)$, $\mathbf{B}_2(t)$, $C_2(t)$ определяются формулами (3.14)–(3.17).

2. Уравнение нелинейной диффузии (7.39) обладает точным неотрицательным решением

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)\right]_+^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)\right]\right]_+^{1-m}$$

для $\lambda = -\frac{1}{m-1}$, $m \in \{2, \dots, n\}$ и $p = 1/2$, где функции $A_k(t)$, $\mathbf{B}_k(t)$, $C_k(t)$, $k = 1, 2$, выражаются формулами (6.31), (6.32).

3. Уравнение нелинейной диффузии (7.39) обладает точным неотрицательным решением

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{4}{m+2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)\right]^2 - \frac{4}{m+2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)\right]\right]_+^{-\frac{m+2}{4}}$$

для $\lambda = -\frac{4}{m+2}$, $m \in \{1, \dots, n\}$ и $p = 2$, при этом функции $A_k(t)$, $\mathbf{B}_k(t)$, $C_k(t)$, $k = 1, 2$, определяются формулами (7.25)–(7.32).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Существование и построение анизотропных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии. I // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1144–1166.
2. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.
3. *Пухначев В. В.* Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии // Прикл. механика и техн. физика. 1995. Т. 36, № 2. С. 23–31.

Статья поступила 19 ноября 1998 г.

г. Иркутск
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
`rudykh@icc.ru; semenov@icc.ru`