Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.51

ОБ ОПЕРАТОРАХ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

Д. В. Прохоров

Аннотация: Даны критерии $L^p - L^q$-ограниченности и компактности оператора Римана — Лиувилля вида $f(x) \mapsto v(x)\chi_{(a,b)}(x) \int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(y)(x-y)^{\alpha-1}\,dy$ при $\alpha, p, q \in (0,\infty)$ и $p > \max(\frac{1}{\alpha}, 1)$, где v — измеримая, а ϕ,ψ — абсолютно непрерывные неубывающие на $[a,b]$ функции, удовлетворяющие условию $0 \le \psi(x) < \phi(x) \le x$, $x \in (a,b)$. Библиогр. 8.

Введение

Пусть $\alpha > 0$, $0 \le a < b \le \infty$. Мы рассматриваем оператор вида

$$(T_{\substack{\psi,\phi\\a,b}} f)(x) = v(x)\chi_{(a,b)}(x) \int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x)} \frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}},$$

где весовая функция v измерима, а ϕ и ψ — абсолютно непрерывные неубывающие на $[a,b]$ функции, удовлетворяющие условию $0 \le \psi(x) \le \phi(x) \le x$, $x \in [a,b]$, при этом равенство $\phi(x) = \psi(x)$ возможно, лишь когда $\phi(x) = \psi(a)$ или $\phi(b) = \psi(x)$.

Для $p \in (0,\infty)$ положим

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

и обозначим через $L^p \equiv L^p(\mathbb{R}^+)$ пространство всех измеримых на $\mathbb{R}^+$ функций таких, что $\|f\|_p < \infty$.

В работе [1] об оценках сингулярных чисел оператора $R_\alpha : L^2 \to L^2$ вида

$$(R_\alpha f)(x) = \frac{v(x)}{x^\alpha} \int\limits_0^x \frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \tag{1}$$

в случае $\alpha > \frac{1}{2}$ дан следующий критерий ограниченности и компактности:

$$\|R_\alpha\|_{L^2 \to L^2} \approx A = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{|v(x)|^2}{x}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00239) и Министерства образования РФ (грант 10.98 ГР).

причем $R_\alpha : L^2 \to L^2$ компактен тогда и только тогда, когда $A < \infty$ и

$$\lim_{|k|\to\infty}\Bigg(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{|v(x)|^2}{x}\,dx\Bigg)^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{3}$$

Затем этот результат был обобщен на случай $R_\alpha : L^p \to L^q$ при $p > \max(\frac{1}{\alpha}, 1)$ для $1 < p = q < \infty$ в [2], для $1 < p,\ q < \infty$ в [3] и для $0 < p,\ q < \infty$ в [4]. Отметим, что эта задача для оператора R_α, когда $\alpha \in [1,\infty)$ и $1 < p,\ q < \infty$, решена в другой форме в более общей ситуации с двумя весовыми функциями (см., например, обзор [5]), а также ограниченность $T_{\substack{\psi,\phi\\ a,b}}$, когда $\alpha = 1$, $0 < q < \infty$, $p > 1$ или $\alpha > 1$, $1 < p,\ q < \infty$, может быть получена из работы [6].

В этой работе мы получаем критерии ограниченности и компактности оператора $T_{\substack{\psi,\phi\\ a,b}}$ из L^p в L^q при $0 < p,\ q < \infty$, $p > \max(\frac{1}{\alpha}, 1)$.

Без потери общности всюду в работе неопределенности вида $0\cdot\infty$, $0/0$, ∞/∞ полагаются равными нулю. Неравенство $A \ll B$ означает $A \le \gamma B$, где γ зависит только от p, q, α; соотношения $A \approx B$ интерпретируются как $A \ll B \ll A$, χ_E обозначает характеристическую функцию множества E, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ — стандартные обозначения множеств всех целых и натуральных чисел соответственно.

Обозначим $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$ и для произвольного оператора $T : L^p \to L^q$ положим $\|T\| = \|T\|_{L^p\to L^q}$. Под классом $AC^\uparrow[a,b]$ понимаем множество всех абсолютно непрерывных неубывающих на $[a,b]$ функций φ, удовлетворяющих условию $0 \le \varphi(x) \le x$, $x \in [a,b]$. Каждой функции φ из $AC^\uparrow[a,b]$ соответствуют две обратные функции: «левая» $\varphi_\Lambda^{-1}(x) = \inf\{s \mid \varphi(s) = x,\ s \in [a,b]\}$ и «правая» $\varphi_\Pi^{-1}(x) = \sup\{s \mid \varphi(s) = x,\ s \in [a,b]\}$, которые заданы на $[\varphi(a), \varphi(b)]$ и обладают свойствами

$$x \le \varphi_\Lambda^{-1}(x) \le \varphi_\Pi^{-1}(x),\ \varphi(\varphi_\Lambda^{-1}(x)) = \varphi(\varphi_\Pi^{-1}(x)) = x,\ \varphi_\Lambda^{-1}(\varphi(x)) \le x \le \varphi_\Pi^{-1}(\varphi(x)).$$

Очевидно, для строго возрастающей φ обе функции φ_Λ^{-1}, φ_Π^{-1} совпадают с обратной φ^{-1}. Кроме того, будем использовать сокращения $T_{\substack{-,\varphi\\ a,b}} \equiv T_{\substack{\varphi(a),\varphi\\ a,b}}$ и $T_{\substack{\varphi,-\\ a,b}} \equiv T_{\substack{\varphi,\varphi(b)\\ a,b}}$.

1. Ограниченность и компактность оператора с переменным верхним пределом

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$, $0 \le a < b \le \infty$, $\max(\frac{1}{\alpha}, 1) < p \le q < \infty$, v — измеримая функция, $\phi \in AC^\uparrow[a,b]$, $a' = \phi_\Pi^{-1}(\phi(a))$ и $(\Omega v)(x) = v(x)(x-\phi(a))^{\alpha-1}$. Тогда для ограниченности $T_{\substack{-,\phi\\ a,b}}$ из L^p в L^q необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\ a,b}} < \infty$, где*

$$\mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\ a,b}} = \sup_{a'<t<b} \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\ a,b}}(t) = \sup_{a'<t<b}\Bigg(\int\limits_t^b |(\Omega v)(x)|^q\,dx\Bigg)^{\frac{1}{q}}(\phi(t)-\phi(a))^{\frac{1}{p'}}.$$

Более того, $\|T_{\substack{-,\phi\\ a,b}}\|_{L^p\to L^q} \approx \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\ a,b}}$.

Доказательство. Предположим сначала, что $a' = a$. Для неотрицательной функции f запишем

$$\|T_{\substack{-,\phi\\ a,b}}\|\,\|f\|_p \ge \|T_{\substack{-,\phi\\ a,b}} f\|_q \ge \Bigg(\int\limits_a^b |v(x)|^q\Bigg(\int\limits_{\phi(a)}^{\frac{1}{2}(\phi(x)+\phi(a))} \frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\Bigg)^q dx\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$\gg \left(\int_a^b |(\Omega v)(x)|^q \left(\int_{\phi(a)}^{\frac{1}{2}(\phi(x)+\phi(a))} f(y)\,dy\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4)$$

Если для произвольного фиксированного $t \in (a,b)$ взять $f = \chi_{[\phi(a),\frac{1}{2}(\phi(t)+\phi(a))]}$, то $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2}[\phi(t)-\phi(a)]\right)^{\frac{1}{p}} \in (0,\infty)$ и

$$\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}}\|\left(\frac{1}{2}[\phi(t)-\phi(a)]\right)^{\frac{1}{p}} \gg \left(\int_t^b |(\Omega v)(x)|^q \left(\int_{\phi(a)}^{\frac{1}{2}(\phi(t)+\phi(a))} dy\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_t^b |(\Omega v)(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{2}(\phi(t)-\phi(a)).$$

Следовательно, $\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}}\| \gg \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\a,b}}$ и необходимость доказана.

Достаточность. Положим

$$h(x,y) = \left(\int_{\phi(a)}^{y} (x-t)^{(\alpha-1)p'}\,dt\right)^{\frac{1}{pp'}} \chi_{[\phi(a),x]}(y).$$

Применяя неравенство Гсльдера с параметрами p, p', имеем

$$\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}} f\|_q^q = \int_a^b |v(x)|^q \left|\int_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\right|^q dx$$

$$\leq \int_a^b |v(x)|^q \left(\int_{\phi(a)}^{\phi(x)} |f(y)|^p h^p(x,y)\,dy\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{h^{-p'}(x,y)}{(x-y)^{(1-\alpha)p'}}\,dy\right)^{\frac{q}{p'}} dx. \quad (5)$$

Используя известное неравенство

$$\min(\gamma,1)s^{\gamma-1}(s-t) \leq s^\gamma - t^\gamma \leq \max(\gamma,1)s^{\gamma-1}(s-t), \quad s > t > 0, \quad \gamma > 0,$$

получим $h^p(x,y) \approx [x-\phi(a)]^{\alpha-1}[y-\phi(a)]^{\frac{1}{p'}}\chi_{[\phi(a),x]}(y)$. Отсюда, принимая в расчет элементарное равенство

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{h^{-p'}(x,y)}{(x-y)^{(1-\alpha)p'}}\,dy = p'h^p(x,\phi(x))$$

и (5), приходим к оценке

$$\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}} f\|_q^q \ll \int_a^b |(\Omega v)(x)|^q \left(\int_{\phi(a)}^{\phi(x)} |f(y)|^p [y-\phi(a)]^{\frac{1}{p'}}\,dy\right)^{\frac{q}{p}} (\phi(x)-\phi(a))^{\frac{q}{p'^2}}\,dx$$

$$\ll \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\a,b}}^{\frac{q}{p'}} \int_a^b |(\Omega v)(x)|^q \left(\int_{\phi(a)}^{\phi(x)} |f(y)|^p [y-\phi(a)]^{\frac{1}{p'}}\,dy\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_x^b |(\Omega v)(t)|^q\,dt\right)^{-\frac{1}{p'}} dx$$

(применяя неравенство Минковского)

$$\leq \mathcal{A}^{\frac{q}{p'}}_{\substack{-,\phi\\a,b}} \left[\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} |f(y)|^p [y-\phi(a)]^{\frac{1}{p'}} \left[\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(y)}^{b} |(\Omega v)(x)|^q \left[\int\limits_x^b |(\Omega v)(t)|^q \, dt \right]^{-\frac{1}{p'}} dx \right]^{\frac{p}{q}} dy \right]^{\frac{q}{p}}$$

$$\ll \mathcal{A}^{\frac{q}{p'}}_{\substack{-,\phi\\a,b}} \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} |f(y)|^p [y-\phi(a)]^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(y)}^{b} |(\Omega v)(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy \right)^{\frac{q}{p}} \leq \mathcal{A}^{q}_{\substack{-,\phi\\a,b}} \|f\|_p^q.$$

Последняя оценка вытекает из $y = \phi(\phi_\Lambda^{-1}(y))$. Таким образом, $\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}}\| \ll \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\a,b}}$ показано.

Общий случай представляет собой следствие вышеизложенного. Действительно, пусть $a < a'$. Тогда по доказанному выше $\|T_{\substack{-,\phi\\a',b}}\| \approx \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\a',b}}$, но $\mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\a',b}} = \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\a,b}}$ и $\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}} f\|_q = \|T_{\substack{-,\phi\\a',b}} f\|_q$ для произвольной $f \in L^p$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 \leq a < b \leq \infty$, $0 < q < p < \infty$, $p > \max(\frac{1}{\alpha}, 1)$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, v *— измеримая функция,* $\phi \in AC^{\uparrow}[a,b]$, $a' = \phi_\Pi^{-1}(\phi(a))$ *и* $(\Omega v)(x) = v(x)(x-\phi(a))^{\alpha-1}$. *Тогда оператор* $T_{\substack{-,\phi\\a,b}} : L^p \to L^q$ *ограничен, если и только если* $\mathcal{D}_{\substack{-,\phi\\a,b}} < \infty$, *где*

$$\mathcal{D}_{\substack{-,\phi\\a,b}} = \left(\int\limits_{a'}^{b} (\phi(x)-\phi(a))^{\frac{r}{p'}} \left(\int\limits_x^b |(\Omega v)(t)|^q \, dt \right)^{\frac{r}{p}} |(\Omega v)(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Более того, $\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}}\|_{L^p \to L^q} \approx \mathcal{D}_{\substack{-,\phi\\a,b}}$.

Доказательство. Не теряя общности, ограничимся случаем $a = a'$.

Необходимость. Сначала заметим, что (4) справедливо для веса v_0 и строго возрастающей абсолютно непрерывной функции ϕ_0 таких, что $|v_0(x)| \leq |v(x)|$, $\phi(a) \leq \phi_0(x) \leq \phi(x) \leq \phi_0(b)$, $x \in [a,b]$. Кроме того, предположим, что Ωv_0 из L^q и $\operatorname{supp}\{v_0\}$ — ограниченное множество. Тогда

$$D_0 \equiv \left(\int\limits_a^b (\phi_0(x)-\phi(a))^{\frac{r}{p'}} \left(\int\limits_x^b |(\Omega v_0)(t)|^q \, dt \right)^{\frac{r}{p}} |(\Omega v_0)(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

и тем самым

$$\left(\int\limits_s^b |(\Omega v_0)(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} (\phi_0(s)-\phi(a))^{\frac{1}{p'}}$$

$$\ll \left(\int\limits_s^b (\phi_0(x)-\phi(a))^{\frac{r}{p'}} \left(\int\limits_x^b |(\Omega v_0)(t)|^q \, dt \right)^{\frac{r}{p}} |(\Omega v_0)(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \to 0, \quad s \to b. \quad (6)$$

Положим

$$f(s) = [s-\phi(a)]^{\frac{r}{pq'}} \left(\int\limits_{{\phi_0}^{-1}(s)}^{b} |(\Omega v_0)(t)|^q \, dt \right)^{\frac{r}{pq}} \chi_{(\phi(a),\phi(b))}(s).$$

Тогда

$$\|f\|_p = \Bigg(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} [s-\phi(a)]^{\frac{r}{q'}} \Bigg(\int\limits_{{\phi_0}^{-1}(s)}^{b} |(\Omega v_0)(t)|^q\,dt\Bigg)^{\frac{r}{q}} ds\Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Делая замену переменных $s=\phi_0(y)$, находим

$$\|f\|_p = \left(\frac{p'}{r}\right)^{\frac{1}{p}} \Bigg(\int\limits_a^b \Bigg(\int\limits_y^b |(\Omega v_0)(t)|^q\,dt\Bigg)^{\frac{r}{q}} d(\phi_0(y)-\phi(a))^{\frac{r}{p'}}\Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Интегрируя по частям и применяя (6), видим, что $\|f\|_p \le \big(\frac{p'}{q}\big)^{\frac{1}{p}} D_0^{\frac{r}{p}}$. Используя это и (4), получим

$$\begin{aligned}
\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}}\| D_0^{\frac{r}{p}} &\gg \|T_{\substack{-,\phi\\a,b}} f\|_q \\
&\ge \Bigg(\int\limits_a^b |v_0(x)|^q \Bigg(\int\limits_x^b |(\Omega v_0)(t)|^q\,dt\Bigg)^{\frac{r}{p}} \Bigg(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi_0(x)} \frac{[y-\phi(a)]^{\frac{r}{pq'}}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\Bigg)^q dx\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
\gg \Bigg[\int\limits_a^b |(\Omega v_0)(x)|^q \Bigg[\int\limits_x^b |(\Omega v_0)(t)|^q\,dt\Bigg]^{\frac{r}{p}} &\Bigg[\int\limits_{\phi(a)}^{\frac{1}{2}(\phi_0(x)+\phi(a))} [y-\phi(a)]^{\frac{r}{pq'}}\,dy\Bigg]^q dx\Bigg]^{\frac{1}{q}} \gg D_0^{\frac{r}{q}},
\end{aligned}$$

откуда и следует $\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}}\| \gg D_0$. Применение теоремы Фату о монотонной сходимости дает требуемую нижнюю оценку $\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}}\| \gg \mathcal{D}_{\substack{-,\phi\\a,b}}$.

Достаточность. Положим

$$g(x) = \chi_{(a,b)}(x) \int\limits_a^x \Bigg(\int\limits_s^b |(\Omega v)(t)|^q\,dt\Bigg)^{\frac{r}{p}} d(\phi(s)-\phi(a))^{\frac{r}{p'}}.$$

Тогда (используя неравенство Гсльдера с параметрами $\frac{r}{q}$ и $\frac{p}{q}$)

$$\begin{aligned}
\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}} f\|_q &= \Bigg(\int\limits_a^b |(\Omega v)(x)|^q g^{\frac{q}{r}}(x) g^{-\frac{q}{r}}(x) [x-\phi(a)]^{(1-\alpha)q} \Bigg|\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\Bigg|^q dx\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \Bigg(\int\limits_a^b |(\Omega v)(x)|^q g(x)\,dx\Bigg)^{\frac{1}{r}} \Bigg(\int\limits_a^b |u(x)|^p \Bigg|\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\Bigg|^p dx\Bigg)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

где $u(x) = |(\Omega v)(x)|^{\frac{q}{p}} g^{-\frac{1}{r}}(x)[x-\phi(a)]^{1-\alpha}\chi_{(a,b)}(x)$. Рассмотрим отдельно каждый сомножитель данного произведения. Меняя порядок интегрирования в первом сомножителе и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
&\Bigg(\int\limits_a^b |(\Omega v)(x)|^q g(x)\,dx\Bigg)^{\frac{1}{r}} \\
&\qquad = \Bigg(\int\limits_a^b |(\Omega v)(x)|^q \int\limits_a^x \Bigg(\int\limits_s^b |(\Omega v)(t)|^q\,dt\Bigg)^{\frac{r}{p}} d(\phi(s)-\phi(a))^{\frac{r}{p'}}\,dx\Bigg)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

$$= \left(\int_a^b \left(\int_s^b |(\Omega v)(x)|^q \, dx \right)^{\frac{r}{q}} d(\phi(s) - \phi(a))^{\frac{r}{p'}} \right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\frac{r}{q} \right)^{\frac{1}{r}} \mathcal{D}_{\substack{-,\phi \\ a,b}} .$$

Применяя теорему 1 ко второму сомножителю, находим, что он ограничен сверху некоторой константой, умноженной на $\|f\|_p$, так как для всех $\tau \in (a,b)$

$$\left(\int_\tau^b |(\Omega u)(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} (\phi(\tau) - \phi(a))^{\frac{1}{p'}}$$

$$\le \left[\int_\tau^b |(\Omega v)(x)|^q \left[\int_a^\tau \left[\int_\tau^b |(\Omega v)(t)|^q \, dt \right]^{\frac{r}{p}} d[\phi(s) - \phi(a)]^{\frac{r}{p'}} \right]^{-\frac{p}{r}} dx \right]^{\frac{1}{p}} [\phi(\tau) - \phi(a)]^{\frac{1}{p'}} = 1.$$

Значит, $\|T_{\substack{-,\phi \\ a,b}} f\|_q \ll \mathcal{D}_{\substack{-,\phi \\ a,b}} \|f\|_p$, и теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 \le a < b \le \infty$, $\max(\frac{1}{\alpha}, 1) < p \le q < \infty$, v — *измеримая функция,* $\phi \in AC^{\uparrow}[a,b]$ *и* $a' = \phi_{\Pi}^{-1}(\phi(a))$. *Тогда для компактности оператора* $T_{\substack{-,\phi \\ a,b}}$ *из* L^p *в* L^q *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{A}_{\substack{-,\phi \\ a,b}} < \infty$ *и* $\lim\limits_{t \to a'} \mathcal{A}_{\substack{-,\phi \\ a,b}}(t) = \lim\limits_{t \to b} \mathcal{A}_{\substack{-,\phi \\ a,b}}(t) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Так как оператор $T_{\substack{-,\phi \\ a,b}}$ компактный, то $T_{\substack{-,\phi \\ a,b}}$ ограничен, и из теоремы 1 имеем $\mathcal{A}_{\substack{-,\phi \\ a,b}} < \infty$. Далее используем известный факт, что компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Положим

$$f_{T_{\substack{-,\phi \\ a,b}},1,s}(x) \equiv f_s(x) = \chi_{[\phi(a),\phi(s)]}(x)(\phi(s) - \phi(a))^{-\frac{1}{p}}, \quad s \in (a', b).$$

Тогда $\|f_s\|_p = 1$ и для произвольного фиксированного $g \in L^{p'}$

$$\left| \int_0^\infty f_s(x) g(x) \, dx \right| \le \|f_s\|_p \left(\int_{\phi(a)}^{\phi(s)} |g(x)|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \longrightarrow 0, \quad s \to a'.$$

Таким образом, $f_s \to 0$ слабо при $s \to a'$, и из компактности $T_{\substack{-,\phi \\ a,b}}$ имеем $\lim\limits_{s \to a'} \|T_{\substack{-,\phi \\ a,b}} f_s\|_q = 0$. Но

$$\|T_{\substack{-,\phi \\ a,b}} f_s\|_q \ge \left(\int_s^b |v(x)|^q \left(\int_{\phi(a)}^{\frac{1}{2}(\phi(s)+\phi(a))} (x-y)^{\alpha-1} (\phi(s) - \phi(a))^{-\frac{1}{p}} \, dy \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\gg \left(\int_s^b |(\Omega v)(x)|^q \left(\int_{\phi(a)}^{\frac{1}{2}(\phi(s)+\phi(a))} (\phi(s) - \phi(a))^{-\frac{1}{p}} \, dy \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \gg \mathcal{A}_{\substack{-,\phi \\ a,b}}(s).$$

Следовательно, $\mathcal{A}_{\substack{-,\phi \\ a,b}}(s) \to 0$ при $s \to a'$. Проводя подобные рассуждения с последовательностью

$$f_{T_{\substack{-,\phi \\ a,b}},2,s}(x) = \chi_{[s,b)}(x) \left(\int_s^b |(\Omega v)(y)|^q \, dy \right)^{-\frac{1}{q'}} |(\Omega v)(x)|^{q-1} \operatorname{sign} v(x)$$

для двойственного оператора $T^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} : L^{q'} \to L^{p'}$, который также компактный, получим $\mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\a,b}}(s) \to 0$ при $s \to b$.

Достаточность. Для $a' < \xi < \eta < b$ положим

$$P_\xi = \chi_{(a,\xi)} T_{\substack{-,\phi\\a,b}}, \quad P_{\xi,\eta} = \chi_{[\xi,\eta]} T_{\substack{-,\phi\\a,b}}, \quad P_\eta = \chi_{(\eta,b)} T_{\substack{-,\phi\\a,b}}.$$

Тогда $T_{\substack{-,\phi\\a,b}} = P_\xi + P_{\xi,\eta} + P_\eta$. Применяя теорему 1 к операторам P_ξ и P_η, получим

$$\|P_\xi\| \ll \sup_{a'<t<b} \left(\int\limits_t^b |(\Omega(v\chi_{[a,\xi)}))(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} (\phi(t) - \phi(a))^{\frac{1}{p'}} \le \sup_{a'<t\le\xi} \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\a,b}}(t),$$

$$\|P_\eta\| \ll \sup_{a'<t<b} \left(\int\limits_t^b |(\Omega(v\chi_{(\eta,b)}))(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} (\phi(t) - \phi(a))^{\frac{1}{p'}} \le \sup_{\eta\le t<b} \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\a,b}}(t).$$

Таким образом, $\|P_\xi\| + \|P_\eta\| \to 0$ при $\xi \to a'$, $\eta \to b$ потому, что $\lim\limits_{t\to a'} \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\a,b}}(t) = \lim\limits_{t\to b} \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\a,b}}(t) = 0$. Так как

$$(P_{\xi,\eta} f)(x) = \int\limits_{\phi(a)}^{\eta} K(x,y) f(y) \, dy,$$

где

$$K(x,y) = v(x)\chi_{[\xi,\eta]}(x) \frac{\chi_{[\phi(a),\phi(x))}(y)}{(x-y)^{1-\alpha}},$$

компактность оператора $P_{\xi,\eta} : L^p \to L^q$ следует из известного критерия [7, гл. XI, разд. 3.2], ибо легко видеть, что

$$\int\limits_{\phi(a)}^{\eta} \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\eta} |K(x,y)|^{p'} \, dy \right)^{\frac{q}{p'}} dx < \infty.$$

Тем самым мы показали, что $\|T_{\substack{-,\phi\\a,b}} - P_{\xi,\eta}\| \le \|P_\xi\| + \|P_\eta\| \to 0$ при $\xi \to a'$, $\eta \to b$ и оператор $T_{\substack{-,\phi\\a,b}}$ компактен как предел компактных операторов. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $\alpha > 0$, $0 \le a < b \le \infty$, $p > \max(\frac{1}{\alpha}, 1)$, $0 < q < p < \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, v — измеримая функция и $\phi \in AC^{\uparrow}[a,b]$. Тогда для компактности оператора $T_{\substack{-,\phi\\a,b}} : L^p \to L^q$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{D}_{\substack{-,\phi\\a,b}} < \infty$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 2. С другой стороны, теорема Андо и ее обобщения [8, теоремы 5.5 и 5.8] говорят, что если интегральный оператор ограничен из L^p в L^q, когда $0 < q < p < \infty$ и $p > 1$, то он компактный. Это доказывает достаточность.

Если $\phi(x) = x$, то, используя метод Соломяка [2] блок-диагонального разбиения для оператора Римана — Лиувилля R_α, мы дополним вышеизложенные теоремы двоичными версиями, подобными (2) и (3).

Следствие 1. *Пусть $\alpha > 0$ и R_α задан формулой* (1). *Если* $\max(\frac{1}{\alpha}, 1) < p \le q < \infty$, *то*

$$\|R_\alpha\|_{L^p\to L^q} \approx \widetilde{A} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{A}_k = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \bigg(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{|v(x)|^q\,dx}{x^{\frac{q}{p}}} \bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Более того, $R_\alpha : L^p \to L^q$ *компактный, если и только если* $\widetilde{A} < \infty$ *и* $\lim\limits_{|k|\to\infty} \widetilde{A}_k = 0$. *Если* $0 < q < p < \infty$, $p > \max(\frac{1}{\alpha}, 1)$ *и* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *то*

$$\|R_\alpha\|_{L^p\to L^q} \approx \widetilde{D} = \Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (2^k)^{\frac{r}{p'}} \bigg(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{|v(x)|^q}{x^q}\,dx \bigg)^{\frac{r}{q}} \Bigg)^{\frac{1}{r}}$$

и R_α *компактный, если и только если* $\widetilde{D} < \infty$.

Первая часть следствия 1 доказана в [3], а обе части — в [4].

2. Двойственные и дискретные версии

Ниже мы представляем некоторые естественные аналоги теорем 1, 2, и первый из них — это их дискретная версия.

Теорема 5. *Пусть* $\alpha > 0$, $\{b_n\}$ — *неубывающая последовательность натуральных чисел и для всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $b_n \le n$, $w_n \ge 0$, $a_n \ge 0$. *Положим*

$$C = \sup_{\{a_n\}_1^\infty} \Bigg(\sum_{n=1}^\infty w_n^q \bigg(\sum_{m=1}^{b_n} \Big(n - m + \frac{1}{2} \Big)^{\alpha-1} a_m \bigg)^q \Bigg)^{\frac{1}{q}},$$

где супремум берется по всем последовательностям $\{a_n\}$ *таким, что* $\sum\limits_n a_n^p = 1$. *Если* $\max(1 over \alpha, 1) < p \le q < \infty$, *то* $C \approx A'$, *где*

$$A' = \sup_{n\in\mathbb{N}} \bigg(\sum_{k=n}^\infty (w_k k^{\alpha-1})^q \bigg)^{\frac{1}{q}} b_n^{\frac{1}{p'}}.$$

Если $0 < q < p < \infty$, $p > \max(\frac{1}{\alpha}, 1)$ *и* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *то* $C \ll D'$, *а в случае* $b_n = n$ *даже* $C \approx D'$, *где*

$$D' = \Bigg(\sum_{n=1}^\infty b_n^{\frac{r}{p'}} \bigg(\sum_{k=n}^\infty (w_k k^{\alpha-1})^q \bigg)^{\frac{r}{p}} (w_n n^{\alpha-1})^q \Bigg)^{\frac{1}{r}}.$$

Следующий результат связан с двойственным оператором вида

$$T^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} g(y) = \chi_{[\phi(a),\phi(b)]}(y) \int\limits_y^b \frac{v(x)g(x)}{(x-y)^{1-\alpha}} \chi_{[\phi(a),\phi(x)]}(y)\,dx.$$

Теорема 6. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 \le a < b \le \infty$, v — *измеримая функция,* $\phi \in AC^\uparrow[a,b]$, $a' = \phi_\Pi^{-1}(\phi(a))$ *и* $(\Omega v)(x) = v(x)(x-\phi(a))^{\alpha-1}$. *Если* $1 < p \le q < 1/(1-\min(\alpha,1))$, *то* $\|T^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}\|_{L^p\to L^q} \approx \mathcal{A}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$, *где*

$$\mathcal{A}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} = \sup_{a'<t<b} \bigg(\int\limits_t^b |(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx \bigg)^{\frac{1}{p'}} (\phi(t)-\phi(a))^{\frac{1}{q}}.$$

Если $0 < q < \min(p, 1/(1-\min(\alpha,1))) < \infty$, $p > 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *то* $\|T^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}\|_{L^p \to L^q} \approx \mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$, *где*

$$\mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} = \left(\int\limits_{a'}^{b} (\phi(x)-\phi(a))^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{x}^{b} |(\Omega v)(t)|^{p'}\,dt\right)^{\frac{r}{q'}} |(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Более того, $\mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} \approx \mathcal{E}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$, *где*

$$\mathcal{E}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} = \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} [t-\phi(a)]^{\frac{r}{p}} \left(\int\limits_{t}^{b} |(\Omega v)(x)|^{p'} \chi_{[\phi(a),\phi(x)]}(t)\,dx\right)^{\frac{r}{p'}} dt\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Доказательство. Не теряя общности, ограничимся случаем $a = a'$ и начнем с доказательства $\mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} \approx \mathcal{E}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$. Заметим, что $y \in [\phi(a), \phi(x)]$ тогда и только тогда, когда $x \in \left[\phi_\Lambda^{-1}(y), b\right]$. Поэтому для произвольной измеримой f

$$\chi_{[\phi(a),\phi(b)]}(y) \int\limits_{y}^{b} |f(x)| \chi_{[\phi(a),\phi(x)]}(y)\,dx = \chi_{[\phi(a),\phi(b)]}(y) \int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(y)}^{b} |f(x)|\,dx.$$

Также имеет место равенство

$$\int\limits_{s}^{b} \left(\int\limits_{t}^{b} |(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx\right)^{\frac{r}{q'}} |(\Omega v)(t)|^{p'}\,dt = \frac{p'}{r}\left(\int\limits_{s}^{b} |(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx\right)^{\frac{r}{p'}}. \tag{7}$$

Используя (7) и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}\frac{p'}{r} B^{*r} &\equiv \frac{p'}{r} \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{s}^{b} |(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx\right)^{\frac{r}{p'}} d(\phi(s)-\phi(a))^{\frac{r}{q}} \\ &= \left((\phi(s)-\phi(a))^{\frac{r}{q}} \int\limits_{s}^{b} \left(\int\limits_{t}^{b} |(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx\right)^{\frac{r}{q'}} |(\Omega v)(t)|^{p'}\,dt\right)\Bigg|_{a}^{b} + \mathcal{D}^{*r}_{\substack{-,\phi\\a,b}}.\end{aligned} \tag{8}$$

Пусть теперь $\mathcal{E}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} < \infty$. Тогда так как $s \ge \phi_\Lambda^{-1}(\phi(s))$, имеем

$$\begin{aligned}&\frac{q}{r}(\phi(s)-\phi(a))^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{s}^{b} |(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx\right)^{\frac{r}{p'}} \\ &\quad \le \int\limits_{\phi(a)}^{\phi(s)} [t-\phi(a)]^{\frac{r}{p}} \left(\int\limits_{t}^{b} |(\Omega v)(x)|^{p'} \chi_{[\phi(a),\phi(x)]}(t)\,dx\right)^{\frac{r}{p'}} dt \longrightarrow 0, \quad s \to a.\end{aligned} \tag{9}$$

Делая замену переменных $\phi(s) = t$ в $\mathcal{E}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$, видим, что $\mathcal{E}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} \gg B^*$, а эта оценка вместе с (8) и (9) влечет $\mathcal{E}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} \gg \mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$. Обратно, пусть $\mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} < \infty$. Тогда

$$(\phi(s)-\phi(a))^{\frac{r}{q}} \int\limits_{s}^{b} \left(\int\limits_{t}^{b} |(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx\right)^{\frac{r}{q'}} |(\Omega v)(t)|^{p'}\,dt$$

$$\leq \int\limits_s^b (\phi(x)-\phi(a))^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_x^b |(\Omega v)(t)|^{p'}\,dt \right)^{\frac{r}{q'}} |(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx \longrightarrow 0, \quad s \to b,$$

и, следовательно, $B^* \ll \mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$. Пусть ϕ_0 — абсолютно непрерывная строго возрастающая функция, удовлетворяющая условию $\phi(a) \leq \phi_0(x) \leq \phi(x) \leq \phi_0(b)$, $x \in [a,b]$. Определим E_0^*, B_0^* и D_0^* подобно $\mathcal{E}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$, B^* и $\mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$ с ϕ_0 вместо ϕ соответственно. Делая замену переменных $\phi_0(s)=t$ в E_0^*, находим $E_0^* = \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{r}} B_0^* \ll D_0^* \leq \mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$ и, применяя теорему Фату о монотонной сходимости, заключаем, что $\mathcal{E}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} \ll \mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$.

Далее, если $1 < p, q < \infty$, то утверждение теоремы является следствием двойственности и теорем 1, 2. Если $0 < q \leq 1 < p < \infty$, то поступаем следующим образом. Выберем $n = \sup\{k \mid 2^k < \phi(b)-\phi(a), k \in \mathbb{Z}\}$. Тогда для произвольного $g \in L^p$ имеем представление

$$\|T^*_{\substack{-,\phi\\a,b}} g\|_q = \left(\sum_{k=-\infty}^{n} \int\limits_{\phi(a)+2^k}^{\min[\phi(b),\phi(a)+2^{k+1}]} \left| \int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(y)}^{b} \frac{v(x)g(x)\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \ll J_1 + J_2,$$

в котором для упрощения записи обозначено $\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^{n+1}) = \phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^{n+2}) = b$ и

$$J_1 = \left(\sum_{k=-\infty}^{n} \int\limits_{\phi(a)+2^k}^{\min[\phi(b),\phi(a)+2^{k+1}]} \left(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(y)}^{\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^{k+2})} \frac{|v(x)g(x)|\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^q dy \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$J_2 = \left(\sum_{k=-\infty}^{n-2} \int\limits_{\phi(a)+2^k}^{\phi(a)+2^{k+1}} \left(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^{k+2})}^{b} \frac{|v(x)g(x)|\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^q dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя неравенство Гсльдера для интегралов с параметрами $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{1-q}$ и меняя порядок интегрирования, находим

$$J_1^q \leq \sum_{k\leq n} (2^k)^{1-q} \left(\int\limits_{\phi(a)+2^k}^{\min[\phi(b),\phi(a)+2^{k+1}]} \left(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(y)}^{\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^{k+2})} \frac{|v(x)g(x)|dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right) dy \right)^q$$

$$\leq \sum_{k\leq n} (2^k)^{1-q} \left(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^k)}^{\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^{k+2})} |v(x)g(x)|\,dx \int\limits_{\phi(a)}^{\phi(x)} \frac{dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^q$$

$$\ll \sum_{k\leq n} 2^k \left(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^k)}^{\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^{k+1})} |(\Omega v)(x)g(x)|\,dx \right)^q.$$

Применяя неравенство Гсльдера с параметрами p, p' для интегралов и затем с параметрами $\frac{r}{q}$, $\frac{p}{q}$ для сумм, получим

$$J_1^q \ll \left(\sum_{k\leq n} (2^k)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^k)}^{\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^{k+1})} |(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx \right)^{\frac{r}{p'}} \right)^{\frac{q}{r}} \|g\|_p^q$$

$$\ll \Bigg(\sum_{k\le n}\int\limits_{\phi(a)+2^{k-1}}^{\phi(a)+2^k}[t-\phi(a)]^{\frac{r}{p}}\Bigg(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^k)}^{\phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^{k+1})}|(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx\Bigg)^{\frac{r}{p'}}dt\Bigg)^{\frac{q}{r}}\|g\|_p^q$$

$$\ll \mathcal{E}^{*q}_{\substack{-,\phi\\a,b}}\|g\|_p^q.$$

Так как для каждого k в J_2 одновременно выполнено $x\ge \phi_\Lambda^{-1}(\phi(a)+2^{k+2})\ge \phi(a)+2^{k+2}$ и $\phi(a)+2^k\le y\le \phi(a)+2^{k+1}$, то $x-y\approx x-\phi(a)$. Поэтому J_2 оценивается сверху:

$$J_2\ll\Bigg(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)}\Bigg(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(y)}^{b}|(\Omega v)(x)g(x)|\,dx\Bigg)^q dy\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Положим

$$h(y)=\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(y)}^{b}(\phi(s)-\phi(a))^{\frac{r}{p}}\Bigg(\int\limits_s^b|(\Omega v)(t)|^{p'}\,dt\Bigg)^{\frac{r}{q'}}|(\Omega v)(s)|^{p'}\,ds.$$

Используя неравенство Гсльдера с параметрами $\frac{r}{q}$ и $\frac{p}{q}$, имеем

$$J_2\ll\Bigg(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)}h(y)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{r}}\Bigg(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)}h^{-\frac{p}{r}}(y)\Bigg(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(y)}^{b}|(\Omega v)(x)g(x)|\,dx\Bigg)^p dy\Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Поскольку $\|h\|_1=\mathcal{D}^{*r}_{\substack{-,\phi\\a,b}}$ и для всех $\tau>0$ выполнено

$$\Bigg(\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(\tau)}h^{-\frac{p}{r}}(y)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int\limits_{\tau}^{\infty}|(\Omega v)(x)|^{p'}\,dx\Bigg)^{\frac{1}{p'}}\le 1,$$

двойственная версия весового L^p-L^p неравенства Харди влечет верхнюю оценку $J_2\ll\mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}\|g\|_p$.

Для нижней границы возьмем вес v_1 такой, что $\operatorname{supp}\{v_1\}$ — ограниченное множество, Ωv_1 из $L^{p'}$ и $|v_1(x)|\le|v(x)|$, $x\in[a,b]$. Определим D_1^*, E_1^* подобно $\mathcal{D}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$, $\mathcal{E}^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}$ с v_1 вместо v соответственно. Положим также

$$g(x)=(\phi(x)-\phi(a))^{\frac{r}{pq}}\Bigg(\int\limits_x^b|(\Omega v_1)(t)|^{p'}\,dt\Bigg)^{\frac{r}{q'p}}|(\Omega v_1)(x)|^{p'-1}\operatorname{sign}v(x).$$

Тогда $\|g\|_p=D_1^{*\frac{r}{p}}\approx E_1^{*\frac{r}{p}}$ и, так как $x\ge 2y-\phi(a)$ влечет $x-y\ge x-\frac{1}{2}(x+\phi(a))$, имеем

$$\|T^*_{\substack{-,\phi\\a,b}}g\|_q\ge\Bigg(\int\limits_{\phi(a)}^{\frac12(\phi(a)+\phi(b))}\Bigg(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(2y-\phi(a))}^{b}\frac{|v(x)g(x)|\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}}\Bigg)^q dy\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$\approx\Bigg(\int\limits_{\phi(a)}^{\frac12(\phi(a)+\phi(b))}\Bigg(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(2y-\phi(a))}^{b}|(\Omega v)(x)g(x)|\,dx\Bigg)^q dy\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq \left(\int\limits_{\phi(a)}^{\frac{1}{2}(\phi(a)+\phi(b))} [2y-2\phi(a)]^{\frac{r}{p}} \left(\int\limits_{\phi_\Lambda^{-1}(2y-\phi(a))}^{b} |(\Omega v_1)(x)|^{p'}\,dx \right)^{\frac{r}{p'}} dy \right)^{\frac{1}{q}} \gg E_1^{*\,\frac{r}{q}}.$$

Поэтому $\|T^*_{\underset{a,b}{-,\phi}}\| \gg E_1^*$ и теорема Фату влечет требуемую оценку $\|T^*_{\underset{a,b}{-,\phi}}\| \gg \mathcal{E}^*_{\underset{a,b}{-,\phi}}$. Теорема доказана.

3. Случай двух переменных пределов

Лемма. *Пусть* $\alpha > 0$, $F_\alpha(t,s) = (s+t)^\alpha - t^\alpha$. *Тогда* (I) *если* $0 \leq t \leq s$, *то* $F_\alpha(t,s) \approx s^\alpha$; (II) *если* $0 \leq s \leq t$, *то* $F_\alpha(t,s) \approx st^{\alpha-1}$.

Доказательство. Пусть $0 \leq t \leq s$. Фиксируем $s > 0$ и рассмотрим функцию $g(t) = F_\alpha(t,s)$. В силу монотонности g на $[0,s]$ имеем $\min(g(0), g(s)) \leq g(t) \leq \max(g(0), g(s))$ для всех $t \in [0,s]$, но $g(s) = (2^\alpha - 1)s^\alpha$, $g(0) = s^\alpha$ и тем самым утверждение (I) показано.

По теореме Лагранжа существует $\theta \in (0,1)$ такое, что $F_\alpha(t,s) = \alpha s(\theta s + t)^{\alpha-1}$. Если теперь $0 \leq s \leq t$, то $F_\alpha(t,s) \approx st^{\alpha-1}$. Лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 < a < b \leq \infty$, v — *измеримая функция,* $\psi \in AC^{\uparrow}[a,b]$ *и* $\psi(b) \leq a$; *кроме того, определим* $\lambda, b' \in [a,b]$ *и функцию* l *соотношениями* $\lambda + \psi(\lambda) = 2a$, $b' = \psi_\Lambda^{-1}(\psi(b))$, $l(x) = 2a - x$. *Тогда* (I) *если* $1 < p \leq q < \infty$, *то* $\|T_{\underset{a,b}{\psi,-}}\| \approx \mathcal{A}_{\underset{a,b}{\psi,-}}$, *где*

$$\mathcal{A}_{\underset{a,b}{\psi,-}} = \begin{cases} A_0, & \text{если } 2a - \psi(b) \geq b', \\ A_1 + A_{21} + A_{22} + A_3 + A_4 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$A_0 = \sup_{a<t<b'} A_0(t) = \sup_{a<t<b'} \left(\int\limits_a^t |v(x)|^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\psi(t)}^{\psi(b)} (a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_1 = \sup_{a<t\leq 2a-\psi(b)} A_0(t)$$

$$A_{21} = \sup_{2a-\psi(b)<t<\lambda} \left(\int\limits_{2a-\psi(b)}^t |v(x)|^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\psi(t)}^{\psi(\lambda)} (a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_{22} = \sup_{2a-\psi(b)<t<\lambda} \left(\int\limits_{2a-\psi(b)}^t |v(x)|^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\psi(\lambda)}^{l(t)} (a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_3 = \sup_{2a-\psi(b)<t<\lambda} \left(\int\limits_t^\lambda |v(x)(x-a)^{\alpha-1}|^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}} (\psi(b) - l(t))^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_4 = \sup_{\lambda<t<b'} A_4(t) = \sup_{\lambda<t<b'} \left(\int\limits_\lambda^t |v(x)(x-a)^{\alpha-1}|^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}} (\psi(b) - \psi(t))^{\frac{1}{p'}};$$

(II) *если* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$ *и* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *то* $\|T_{\underset{a,b}{\psi,-}}\| \approx \mathcal{D}_{\underset{a,b}{\psi,-}}$, *где*

$$\mathcal{D}_{\underset{a,b}{\psi,-}} = \begin{cases} D_0, & \text{если } 2a - \psi(b) \geq b', \\ D_1 + D_{21} + D_{22} + D_3 + D_4 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$D_0 = \left(\int\limits_a^{b'}\left(\int\limits_{t_1}^{x}|v(y)|^q\,dy\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(b)}(a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy\right)^{\frac{r}{p'}}|v(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$D_1 = \left(\int\limits_a^{2a-\psi(b)}\left(\int\limits_{t_1}^{x}|v(y)|^q\,dy\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(b)}(a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy\right)^{\frac{r}{p'}}|v(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$D_{21} = \left(\int\limits_{2a-\psi(b)}^{\lambda}\left(\int\limits_{t_1}^{x}|v(y)|^q\,dy\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(\lambda)}(a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy\right)^{\frac{r}{p'}}|v(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$D_{22} = \left(\int\limits_{2a-\psi(b)}^{\lambda}\left(\int\limits_{2a-\psi(b)}^{x}|v(y)|^q\,dy\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int\limits_{\psi(\lambda)}^{l(x)}(a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy\right)^{\frac{r}{p'}}|v(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$D_3 = \left(\int\limits_{2a-\psi(b)}^{\lambda}\left(\int\limits_{x}^{\lambda}|v(y)(y-a)^{\alpha-1}|^q\,dy\right)^{\frac{r}{p}}(\psi(b)-l(x))^{\frac{r}{p'}}|v(x)(x-a)^{\alpha-1}|^q\,dx\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$D_4 = \left(\int\limits_{\lambda}^{b'}\left(\int\limits_{\lambda}^{x}|v(y)(y-a)^{\alpha-1}|^q\,dy\right)^{\frac{r}{p}}(\psi(b)-\psi(x))^{\frac{r}{p'}}|v(x)(x-a)^{\alpha-1}|^q\,dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что $f \geq 0$ и $b = b'$. Начнем со случая $2a - \psi(b) < b$. Используя эквивалентность

$$(x-a)(x-y)^{\alpha-1} \approx ((x-a)+(a-y))^{\alpha} - (a-y)^{\alpha}$$

для $0 \leq y \leq a \leq x$, по лемме получим

$$(x-y)^{\alpha-1} \approx \begin{cases} (x-a)^{\alpha-1}, & x+y \geq 2a, \\ (a-y)^{\alpha-1}, & x+y \leq 2a. \end{cases} \tag{10}$$

Оператор $T_{\substack{\psi,-\\ a,b}}$ раскладывается в сумму

$$T_{\substack{\psi,-\\ a,b}} = T_{\substack{\psi,\psi(b)\\ a,2a-\psi(b)}} + T_{\substack{\psi,\psi(\lambda)\\ 2a-\psi(b),\lambda}} + T_{\substack{\psi(\lambda),l\\ 2a-\psi(b),\lambda}} + T_{\substack{l,\psi(b)\\ 2a-\psi(b),\lambda}} + T_{\substack{\psi,\psi(b)\\ \lambda,b}}.$$

Рассмотрим каждый оператор суммы по отдельности.

1. Если $x \in [a, 2a-\psi(b)]$ и $y \in (\psi(x), \psi(b))$, то $x + y \leq 2a - \psi(b) + \psi(b) = 2a$ и (10) влечет $\|T_{\substack{\psi,\psi(b)\\ a,2a-\psi(b)}} f\|_q \approx \|H_1 f\|_q$, где, положив $w(x) = v(x)\chi_{(a,2a-\psi(b))}(x)$, имеем

$$(H_1 f)(x) = w(x)\chi_{(a,b)}(x)\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(b)} f(y)(a-y)^{\alpha-1}\,dy.$$

Но H_1 — оператор Харди, значит, его норма оценивается константами:

$$\sup_{a<t<b}\left[\int\limits_a^t |w|^q\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int\limits_{\psi(t)}^{\psi(b)}(a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy\right]^{\frac{1}{p'}} = \sup_{a<t\leq 2a-\psi(b)} A_0(t) = A_1 \quad \text{при } p \leq q,$$

$$\left(\int\limits_a^b\left(\int\limits_a^x |w|^q\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(b)}(a-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy\right)^{\frac{r}{p'}}|w(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{r}} = D_1 \quad \text{при } q < p.$$

2. Если $x \in [2a-\psi(b),\lambda]$ и $y \in (\psi(x), l(x))$, то $x+y \le x+2a-x = 2a$ и из (10) следует, что $\|T_{\substack{\psi,\psi(\lambda)\\ 2a-\psi(b),\lambda}} f\|_q \approx \|H_{21}f\|_q$, где

$$(H_{21}f)(x) = v(x)\chi_{(2a-\psi(b),\lambda)}(x)\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(\lambda)} f(y)(a-y)^{\alpha-1}\,dy.$$

Поэтому норма оператора $T_{\substack{\psi,\psi(\lambda)\\ 2a-\psi(b),\lambda}}$ оценивается константой A_{21} при $p \le q$ и константой D_{21} при $q<p$. Для оценки $\|T_{\substack{\psi(\lambda),l\\ 2a-\psi(b),\lambda}}\|$ запишем

$$\|T_{\substack{\psi(\lambda),l\\ 2a-\psi(b),\lambda}} f\|_q \approx \Bigg(\int\limits_{2a-\psi(b)}^{\lambda} |v(x)|^q \Bigg(\int\limits_{\psi(\lambda)}^{2a-x} f(y)(a-y)^{\alpha-1}\,dy\Bigg)^q dx\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Делая замену переменных $2a-x=t$, ввиду $2a-\lambda=\psi(\lambda)$ получим

$$\|T_{\substack{\psi(\lambda),l\\ 2a-\psi(b),\lambda}} f\|_q \approx \Bigg(\int\limits_{\psi(\lambda)}^{\psi(b)} |v(2a-t)|^q \Bigg(\int\limits_{\psi(\lambda)}^{t} f(y)(a-y)^{\alpha-1}\,dy\Bigg)^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, норма оператора $T_{\substack{\psi(\lambda),l\\ 2a-\psi(b),\lambda}}$ характеризуется константами A_{22}, D_{22} в (I), (II) соответственно.

3. Если $x \in [2a-\psi(b),\lambda]$ и $y \in (l(x),\psi(b))$, то $x+y \ge x+2a-x = 2a$ и согласно (10) имеем

$$\|T_{\substack{l,\psi(b)\\ 2a-\psi(b),\lambda}} f\|_q \approx \Bigg(\int\limits_{2a-\psi(b)}^{\lambda} |v(x)(x-a)^{\alpha-1}|^q \Bigg(\int\limits_{2a-x}^{\psi(b)} f(y)\,dy\Bigg)^q dx\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Делая замену переменных $2a-x=t$, получим

$$\|T_{\substack{l,\psi(b)\\ 2a-\psi(b),\lambda}} f\|_q \approx \Bigg(\int\limits_{\psi(\lambda)}^{\psi(b)} |v(2a-t)(a-t)^{\alpha-1}|^q \Bigg(\int\limits_{t}^{\psi(b)} f(y)\,dy\Bigg)^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Следовательно, норма $T_{\substack{l,\psi(b)\\ 2a-\psi(b),\lambda}}$ определяется константами A_3 в (I) и D_3 в (II).

4. Если $x \in [\lambda,b]$ и $y \in (\psi(x),\psi(b))$, то $x+y \ge x+\psi(x) \ge x+2a-x = 2a$ и $\|T_{\substack{\psi,\psi(b)\\ \lambda,b}} f\|_q \approx \|H_4 f\|_q$, где

$$(H_4 f)(x) = v(x)(x-a)^{\alpha-1}\chi_{(\lambda,b)}(x)\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(b)} f(y)\,dy.$$

Поэтому $\|T_{\substack{\psi,\psi(b)\\ \lambda,b}}\| \approx A_4$ в (I) и $\|T_{\substack{\psi,\psi(b)\\ \lambda,b}}\| \approx D_4$ в (II).

В случае $2a-\psi(b) \ge b$ норма оператора $T_{\substack{\psi,-\\ a,b}}$ оценивается константами A_0 или D_0 соответственно в (I) или (II), так как $\|T_{\substack{\psi,\psi(b)\\ a,b}} f\|_q \approx \|H_1 f\|_q$ с $w(x)=v(x)$. Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть выполнены все условия теоремы 7. Тогда* (I) *если* $1 < p \le q < \infty$, *то для компактности оператора* $T_{\substack{\psi,-\\a,b}}$ *из* L^p *в* L^q *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\a,b}} < \infty$ *и* $\lim\limits_{t\to b'} \mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\a,b}}(t) = 0$, *где* $\mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\a,b}}(t) = A_0(t)$, *если* $2a - \psi(b) \ge b'$, *но* $\mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\a,b}}(t) = A_4(t)$ *в ином случае;* (II) *если* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$ *и* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *то для компактности оператора* $T_{\substack{\psi,-\\a,b}} : L^p \to L^q$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{D}_{\substack{\psi,-\\a,b}} < \infty$.

Доказательство. (I). Необходимость. Из компактности оператора $T_{\substack{\psi,-\\a,b}}$ следует его ограниченность, так что теорема 7 влечет конечность константы $\mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\a,b}}$. Для $s \in (a, b')$ положим $f_{T_{\substack{\psi,-\\a,b}},s}(x) = f_s(x)$, где

$$f_s(x) = \begin{cases} [\psi(b) - \psi(s)]^{-\frac{1}{p}} \chi_{(\psi(s),\psi(b))}(x), & 2a - \psi(b) < b', \\ (a-x)^{(\alpha-1)\frac{p'}{p}} \left[\int\limits_{\psi(s)}^{\psi(b)} (a-t)^{(\alpha-1)p'}\, dt\right]^{-\frac{1}{p}} \chi_{(\psi(s),\psi(b))}(x) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $\|f_s\|_p = 1$ и для произвольной фиксированной функции $g \in L^{p'}$

$$\left|\int\limits_0^\infty f_s(x) g(x)\, dx\right| \le \|f_s\|_p \left(\int\limits_{\psi(s)}^{\psi(b)} |g(x)|^{p'}\, dx\right)^{\frac{1}{p'}} \longrightarrow 0, \quad s \to b'.$$

Таким образом, $f_s \to 0$ слабо при $s \to b'$, и из компактности оператора $T_{\substack{\psi,-\\a,b}}$ следует $\lim\limits_{s\to b'} \|T_{\substack{\psi,-\\a,b}} f_s\|_q = 0$. Это и доказывает необходимость, так как для s, достаточно близких к b', выполнено $\|T_{\substack{\psi,-\\a,b}} f_s\|_q \gg A_0(s)$, если $2a - \psi(b) \ge b'$, и $\|T_{\substack{\psi,-\\a,b}} f_s\|_q \gg A_4(s)$ в ином случае.

Достаточность. Для $a < \xi < \eta < b'$ положим

$$P_\xi = \chi_{(a,\xi)} T_{\substack{\psi,-\\a,b}}, \quad P_{\xi,\eta} = \chi_{[\xi,\eta]} T_{\substack{\psi,-\\a,b}}, \quad P_\eta = \chi_{(\eta,b)} T_{\substack{\psi,-\\a,b}}.$$

Тогда $T_{\substack{\psi,-\\a,b}} = P_\xi + P_{\xi,\eta} + P_\eta$. Применяя теорему 7 к операторам P_ξ и P_η, получим

$$\|P_\xi\| \ll \sup_{a<t\le\xi} A_0(t) \ll a^{\alpha-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^\xi |v(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{если } \xi < 2a - \psi(b);$$

$$\|P_\eta\| \ll \begin{cases} \sup_{\eta\le t<b'} A_0(t), & \text{если } 2a - \psi(b) \ge b', \\ \sup_{\eta\le t<b'} A_4(t), & \text{если } 2a - \psi(b) < b' \text{ и } \eta > \lambda. \end{cases}$$

Таким образом, $\|P_\xi\| + \|P_\eta\| \to 0$ при $\xi \to a$, $\eta \to b'$. Далее, из $\chi_{[\psi(\xi),\psi(b)]} \in L^p$ и ограниченности оператора $T_{\substack{\psi,-\\a,b}}$ имеем

$$(\psi(b) - \psi(\xi))^{\frac{1}{p}} \mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\a,b}} \gg \|T_{\substack{\psi,-\\a,b}} \chi_{[\psi(\xi),\psi(b)]}\|_q \gg \left[\int\limits_\xi^\eta |v(x)|^q \left(\frac{\psi(b) - \psi(x)}{(x - \psi(x))^{1-\alpha}}\right)^q dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\ge \min_{t\in[\xi,\eta]} \left(\frac{\psi(b) - \psi(t)}{(t - \psi(t))^{1-\alpha}}\right) \left(\int\limits_\xi^\eta |v(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

и компактность оператора $P_{\xi,\eta}$ — следствие [7, гл. XI, разд. 3.2], так как

$$\int_{\xi}^{\eta}|v(x)|^q\biggl(\int_{\psi(x)}^{\psi(b)}\frac{dy}{(x-y)^{(1-\alpha)p'}}\biggr)^{\frac{q}{p'}}dx \ll \eta^{(\alpha-\frac{1}{p})q}\int_{\xi}^{\eta}|v(x)|^q\,dx<\infty.$$

Тем самым показано, что оператор $T_{\substack{\psi,-\\a,b}}$ является пределом компактных операторов и, следовательно, сам компактен. Случай (II) исчерпывается аналогично доказательству теоремы 4. Теорема доказана.

Обратимся к изучению оператора $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$.

Теорема 9. *Пусть* $0\le c<d\le\infty$, $0<p,q<\infty$, $p>\max(\frac{1}{\alpha},1)$ *и* $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$. *Предположим также, что* v *измерима, а функции* ψ, ϕ *принадлежат классу* $AC^{\uparrow}[c,d]$ *и удовлетворяют условию* $\psi(x)\le\phi(x)$, $x\in[c,d]$, *где равенство* $\phi(x)=\psi(x)$ *возможно, лишь когда* $\phi(x)=\psi(c)$ *или* $\phi(d)=\psi(x)$. *Кроме того, обозначим* $\tilde\phi=\min(\phi,\psi(d))$, $\tilde\psi=\max(\tilde\phi(c),\psi)$, $c_1=\tilde\phi_{\Pi}^{-1}(\tilde\phi(c))$, $d_1=\tilde\psi_{\Lambda}^{-1}(\tilde\psi(d))$, $c_2=\tilde\phi_{\Lambda}^{-1}(\tilde\phi(d))$, $d_2=\tilde\psi_{\Pi}^{-1}(\tilde\psi(c))$. *Выбрав* ξ_0 *в* (c_1,d_1) *произвольно, если* $\phi(c)<\psi(d)$, *но* $\xi_0=c$ *в ином случае, построим последовательность* $\{\xi_k\}$:

$$\xi_k=\begin{cases}\tilde\psi_{\Pi}^{-1}(\tilde\phi(\xi_{k-1})) & \text{при } k>0,\\ \tilde\phi_{\Lambda}^{-1}(\tilde\psi(\xi_{k+1})) & \text{при } k<0,\end{cases}$$

$$n_1=\inf\{k:\xi_k>c\},\quad n_2=\sup\{k:\xi_k<d\}.$$

Тогда для ограниченности оператора $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ *из* L^p *в* L^q *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{A}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}+\mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}<\infty$ *при* $p\le q$, *но* $\mathcal{D}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}+\mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}<\infty$ *при* $q<p$, *где*

$$\mathcal{A}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}=\sup_{n_1\le k\le n_2}\mathcal{A}_{\substack{-,\tilde\phi\\\xi_{k-1},\xi_k}}+\sup_{n_1\le k\le n_2}\mathcal{A}_{\substack{\tilde\psi,-\\\xi_k,\xi_{k+1}}}+\mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\c,d_2}}+\mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\c_2,d}},$$

$$\mathcal{D}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}=\biggl(\sum_{k=n_1}^{n_2}\mathcal{D}^r_{\substack{-,\tilde\phi\\\xi_{k-1},\xi_k}}\biggr)^{\frac{1}{r}}+\biggl(\sum_{k=n_1}^{n_2}\mathcal{D}^r_{\substack{\tilde\psi,-\\\xi_k,\xi_{k+1}}}\biggr)^{\frac{1}{r}}+\mathcal{D}_{\substack{\psi,-\\c,d_2}}+\mathcal{D}_{\substack{-,\phi\\c_2,d}},$$

$$\mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}=\biggl(\int_c^d|v(x)(x-\psi(d))^{\alpha-1}|^q\,dx\biggr)^{\frac{1}{q}}[\max(\phi(c)-\psi(d),0)]^{\frac{1}{p'}}.$$

Доказательство. При разбиении интервала (c,d) точками $\{\xi_k\}$ оператор $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ распадается в сумму двух блок-диагональных операторов и остатка $S=S_1+S_2$:

$$T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}=\sum_{k=n_1}^{n_2}T_{\substack{-,\tilde\phi\\\xi_{k-1},\xi_k}}+\sum_{k=n_1}^{n_2}T_{\substack{\tilde\psi,-\\\xi_k,\xi_{k+1}}}+S_1+S_2, \tag{11}$$

где $S_1=T_{\substack{\psi,-\\c,d_2}}+T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}}$, а $S_2=T_{\substack{\psi(d),\phi(c)\\c,d}}$, если $\phi(c)>\psi(d)$, но $S_2=0$ в ином случае. Поэтому характеризация L^p-L^q ограниченности оператора $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ выполняется через критерии для $T_{\substack{-,\tilde\phi\\\xi_{k-1},\xi_k}}$, $T_{\substack{\tilde\psi,-\\\xi_k,\xi_{k+1}}}$, $T_{\substack{\psi,-\\c,d_2}}$, $T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}}$ и S_2. Норма оператора S_2 элементарно оценивается константой $\mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ с помощью неравенства Гельдера для интегралов

$$\|S_2f\|_q\le\biggl(\int_c^d|v(x)|^q\biggl(\int_{\psi(d)}^{\phi(c)}(x-y)^{(\alpha-1)p'}\,dy\biggr)^{\frac{q}{p'}}dx\biggr)^{\frac{1}{q}}\|f\|_p\approx\mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}\|f\|_p$$

и тестовой функции $\chi_{[\psi(d),\phi(c)]}$. Остальные операторы подходят под условия теорем 1, 2, 7. В силу блок-диагональности для неотрицательной f имеем

$$\|T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} f\|_q^q \approx \sum_{k=n_1}^{n_2} \|T_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}} f\|_q^q + \sum_{k=n_1}^{n_2} \|T_{\substack{\tilde\psi,-\\ \xi_k,\xi_{k+1}}} f\|_q^q + \|Sf\|_q^q$$
$$\le \sum_{k=n_1}^{n_2} \|T_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}}\|^q \|f\chi_{(\xi_{k-1},\xi_k)}\|_p^q + \sum_{k=n_1}^{n_2} \|T_{\substack{\tilde\psi,-\\ \xi_k,\xi_{k+1}}}\|^q \|f\chi_{(\xi_k,\xi_{k+1})}\|_p^q + \|S\|^q\|f\|_p^q. \tag{12}$$

Применяя к суммам при $p \le q$ неравенство Йенсена, а при $q < p$ неравенство Гсльдера и учитывая, что $\|S_2\| \approx \mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$, из (12) и теорем 1, 2, 7 получим достаточность.

Необходимость. Из представления (11) имеем

$$\|T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}\| \gg \sup_k \|T_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}}\| + \sup_k \|T_{\substack{\tilde\psi,-\\ \xi_k,\xi_{k+1}}}\| + \|T_{\substack{\psi,-\\c,d_2}}\| + \|T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}}\| + \|S_2\|, \tag{13}$$

откуда применением теорем 1, 7 заканчивается доказательство необходимости в случае $p \le q$. Кроме того, из (13) и теорем 2, 7 следует конечность всех констант вида $\mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$, $\mathcal{D}_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}}$, $\mathcal{D}_{\substack{\tilde\psi,-\\ \xi_k,\xi_{k+1}}}$, $\mathcal{D}_{\substack{\psi,-\\c,d_2}}$, $\mathcal{D}_{\substack{-,\phi\\c_2,d}}$, участвующих в характеризации случая $q < p$. Для каждого $T_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}}$ имеем $\|T_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}}\| \approx \mathcal{D}_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}}$, поэтому для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ найдется такая неотрицательная функция f_k с $\operatorname{supp}\{f_k\} \subset [\tilde\phi(\xi_{k-1}), \tilde\phi(\xi_k)]$, что

$$\|f_k\|_p = \mathcal{D}^{\frac{r}{p}}_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}}, \quad (1-\varepsilon)\mathcal{D}_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}} \|f_k\|_p \ll \|T_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}} f_k\|_q.$$

В силу этого, обозначив $f = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} f_k$, где $n_1 < k_1 < k_2 < n_2$, получим

$$(1-\varepsilon)^q \sum_{k=k_1}^{k_2} \mathcal{D}^r_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}} = (1-\varepsilon)^q \sum_{k=k_1}^{k_2} (\mathcal{D}_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}} \|f_k\|_p)^q \ll \sum_{k=k_1}^{k_2} \|T_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}} f_k\|_q^q$$
$$\le \|T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} f\|_q^q \le \|T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}\|^q \|f\|_p^q = \|T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}\|^q \Bigg(\sum_{k=k_1}^{k_2} \mathcal{D}^r_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}}\Bigg)^{\frac{q}{p}}.$$

Следовательно,

$$(1-\varepsilon)\Bigg(\sum_{k=k_1}^{k_2} \mathcal{D}^r_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}}\Bigg)^{\frac{1}{r}} \ll \|T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}\|.$$

Устремляя $k_1 \to n_1$ и $k_2 \to n_2$, а затем $\varepsilon \to 0$, заключаем $\sum\limits_k \mathcal{D}^r_{\substack{-,\tilde\phi\\ \xi_{k-1},\xi_k}} < \infty$. Аналогично доказывается конечность суммы $\sum\limits_k \mathcal{D}^r_{\substack{\tilde\psi,-\\ \xi_k,\xi_{k+1}}}$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть* $\max(\frac{1}{\alpha}, 1) < p \le q < \infty$, v *измерима, а функции* ψ, ϕ *принадлежат классу* $AC^{\uparrow}[c,d]$ *и удовлетворяют условию* $\phi(c) \le \psi(x) \le \phi(x) \le \psi(d)$, $x \in [c,d]$, *где равенство* $\phi(x) = \psi(x)$ *возможно, лишь когда* $\phi(x) = \psi(c)$ *или* $\phi(d) = \psi(x)$. *Кроме того, обозначим* $c' = \phi_\Pi^{-1}(\phi(c))$ *и* $d' = \psi_\Lambda^{-1}(\psi(d))$. *Тогда оператор* $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} : L^p \to L^q$ *ограничен, если и только если* $\mathcal{A}'_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} < \infty$, *где*

$$\mathcal{A}'_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} = \sup_{c'<t<d'} \mathcal{A}'_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}(t) = \sup_{c'<t<d'} [\mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\ \phi_\Lambda^{-1}(\psi(t)),t}} + \mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\ t,\psi_\Pi^{-1}(\phi(t))}}].$$

Теорема 10. *Пусть выполнены все условия следствия 2. Тогда для компактности оператора $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} : L^p \to L^q$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{A}'_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} < \infty$ и $\lim\limits_{t\to c'} \mathcal{A}'_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}(t) = \lim\limits_{t\to d'} \mathcal{A}'_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}(t) = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Из компактности оператора $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ вытекает его ограниченность, так что следствие 2 влечет $\mathcal{A}'_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} < \infty$. Для произвольного $t \in (c', d')$ положим $t_1 = \phi_\Lambda^{-1}(\psi(t))$, $t_2 = \psi_\Pi^{-1}(\phi(t))$ и рассмотрим операторы $T_{\substack{-,\phi\\t_1,t}}$, $T_{\substack{\psi,-\\t,t_2}}$. По теореме 1 $\|T_{\substack{-,\phi\\t_1,t}}\| \approx \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\t_1,t}}$ и, следовательно, существует такая неотрицательная функция $f_{T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}},1,t}(x) \equiv f_t$ с $\|f_t\|_p = 1$ и $\operatorname{supp}\{f_t\} \subset [\phi(t_1), \phi(t)]$, что $\|T_{\substack{-,\phi\\t_1,t}} f_t\|_q \geq \gamma \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\t_1,t}}$ для некоторой константы $\gamma = \gamma(\alpha, p, q)$. Из определения t_1, t_2 вытекает, что $\phi(t_1) = \psi(t)$ и $\psi(t_2) = \phi(t)$, откуда в силу непрерывности ϕ, ψ и равенств $\phi(c) = \psi(c)$, $\phi(d) = \psi(d)$ имеем

$$\lim_{t\to c'} \phi(t) = \lim_{t\to c'} \phi(t_1) = \lim_{t\to c'} \psi(t_2) = \lim_{t\to c'} \psi(t) = \phi(c),$$
$$\lim_{t\to d'} \phi(t) = \lim_{t\to d'} \phi(t_1) = \lim_{t\to d'} \psi(t_2) = \lim_{t\to d'} \psi(t) = \phi(d).$$

Тогда для произвольной фиксированной функции $g \in L^{p'}$ будет

$$\left| \int_0^\infty f_t(x) g(x)\, dx \right| \leq \|f_t\|_p \left(\int_{\phi(t_1)}^{\phi(t)} |g(x)|^{p'}\, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \longrightarrow 0, \quad t \to c',\ t \to d'.$$

Таким образом, $f_t \to 0$ слабо при $t \to c'$ и $t \to d'$, и из компактности оператора $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ следует $\lim\limits_{t\to c'} \|T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} f_t\|_q = \lim\limits_{t\to d'} \|T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} f_t\|_q = 0$. Но $\|T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} f_t\|_q \geq \|T_{\substack{-,\phi\\t_1,t}} f_t\|_q \geq \gamma \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\t_1,t}}$, откуда и $\lim\limits_{t\to c'} \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\t_1,t}} = \lim\limits_{t\to d'} \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\t_1,t}} = 0$. Аналогичные рассуждения с оператором $T_{\substack{\psi,-\\t,t_2}}$ и неотрицательной функцией $f_{T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}},2,t} \equiv h_t$ со свойствами: $\|h_t\|_p = 1$, $\operatorname{supp}\{h_t\} \subset [\psi(t), \psi(t_2)]$ и $\|T_{\substack{\psi,-\\t,t_2}} h_t\|_q \gg \mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\t,t_2}}$, которая также существует, дают $\lim\limits_{t\to c'} \mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\t,t_2}} = \lim\limits_{t\to d'} \mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\t,t_2}} = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Для $c' < \xi < \eta < d'$ положим

$$P_\xi = \chi_{(c,\xi)} T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}, \quad P_{\xi,\eta} = \chi_{[\xi,\eta]} T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}, \quad P_\eta = \chi_{(\eta,d)} T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}.$$

Тогда $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} = P_\xi + P_{\xi,\eta} + P_\eta$. Применяя следствие 2, получим

$$\|P_\xi\| \ll \sup_{c'<t<\xi} \mathcal{A}'_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}(t), \quad \|P_\eta\| \ll \sup_{\eta<t<d'} \mathcal{A}'_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}(t).$$

Таким образом, $\|P_\xi + P_\eta\| \to 0$ при $\xi \to c'$, $\eta \to d'$. Далее, из $\chi_{[\psi(\xi),\phi(\eta)]} \in L^p$ и ограниченности оператора $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ следует

$$(\phi(\eta) - \psi(\xi))^{\frac{1}{p}} \mathcal{A}'_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} \gg \|T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} \chi_{[\psi(\xi),\phi(\eta)]}\|_q \gg \left(\int_\xi^\eta |v(x)|^q \left(\frac{\phi(x) - \psi(x)}{(x - \psi(x))^{1-\alpha}} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\geq \min_{t\in[\xi,\eta]} \left(\frac{\phi(t) - \psi(t)}{(t - \psi(t))^{1-\alpha}} \right) \left(\int_\xi^\eta |v(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

и компактность оператора $P_{\xi,\eta}$ вытекает из [7, гл. XI, разд. 3.2], так как

$$\int\limits_{\xi}^{\eta} |v(x)|^q \Bigl(\int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x)} \frac{dy}{(x-y)^{(1-\alpha)p'}}\Bigr)^{\frac{q}{p'}} dx \ll \eta^{(\alpha-\frac{1}{p})q} \int\limits_{\xi}^{\eta} |v(x)|^q\, dx < \infty.$$

Тем самым показано, что оператор $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ является пределом компактных операторов и, следовательно, сам компактен. Теорема доказана.

Теорема 11. *Пусть выполнены все условия теоремы* 9 *и, кроме того,* $c_3 = \phi_{\Pi}^{-1}(\phi(c_2))$, $d_3 = \psi_{\Lambda}^{-1}(\psi(d_2))$. *Тогда* (I) *если* $p \le q$, *то для компактности оператора* $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} : L^p \to L^q$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{A}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} + \mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} < \infty$ *и*

$$\lim_{t\to c_3} \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\c_2,d}}(t) = \lim_{t\to d} \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\c_2,d}}(t) = \lim_{t\to d_3} \mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\c,d_2}}(t) = 0,\ \lim_{t\to c_1} \mathcal{A}'_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}}(t) = \lim_{t\to d_1} \mathcal{A}'_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}}(t) = 0; \tag{14}$$

(II) *если* $q < p$, *то для компактности оператора* $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} : L^p \to L^q$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{D}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} + \mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} < \infty$.

Доказательство. (I). Достаточность. Оператор $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ раскладывается в сумму:

$$T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} = T_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}} + T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}} + T_{\substack{\psi,-\\c,d_2}} + S_2. \tag{15}$$

Конечность константы $\mathcal{A}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} + \mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ по теореме 9 влечет ограниченность $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ из L^p в L^q и, следовательно, ограниченность операторов представления (15). Применяя теоремы 1, 7 и следствие 2, получим конечность констант $\mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\c_2,d}}$, $\mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\c,d_2}}$, $\mathcal{A}'_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}}$ соответственно, а это вместе с (14) влечет компактность операторов $T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}}$, $T_{\substack{\psi,-\\c,d_2}}$, $T_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}}$ в силу теорем 3, 8, 10. Компактность S_2, как вытекает из [7, гл. XI, разд. 3.2] и вида $\mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$, есть следствие конечности $\mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$. Таким образом, оператор $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ компактен, ибо раскладывается в конечную сумму компактных операторов.

Необходимость. Компактность оператора $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$ влечет его ограниченность и, следовательно, конечность константы $\mathcal{A}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} + \mathcal{C}_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$. Кроме того, заметим, что для всякой неотрицательной функции f в силу представления (15) выполнено

$$\|T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} f\|_q \gg \|T_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}} f\|_q + \|T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}} f\|_q + \|T_{\substack{\psi,-\\c,d_2}} f\|_q. \tag{16}$$

Для доказательства (14) используем последовательности функций $\{f_{T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}},1,s}\}$, $\{f_{T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}},2,s}\}$, $\{f_{T_{\substack{\psi,-\\c,d_2}},s}\}$, $\{f_{T_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}},1,t}\}$, $\{f_{T_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}},2,t}\}$, построенные при доказательстве теорем 3, 8, 10. Все они слабо сходятся к нулю: первая при $s \to c_3$, вторая при $s \to d$, третья при $s \to d_3$, четвертая и пятая как при $t \to c_1$, так и при $t \to d_1$. Это вместе с компактностью оператора $T_{\substack{\psi,\phi\\c,d}}$, соотношением (16) и оценками

$$\|T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}} f_{T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}},1,s}\|_q \gg \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\c_2,d}}(s), \quad \|T^*_{\substack{\psi,\phi\\c,d}} f_{T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}},2,s}\|_{p'} \ge \|T^*_{\substack{-,\phi\\c_2,d}} f_{T_{\substack{-,\phi\\c_2,d}},2,s}\|_{p'} \gg \mathcal{A}_{\substack{-,\phi\\c_2,d}}(s),$$
$$\|T_{\substack{\psi,-\\c,d_2}} f_{T_{\substack{\psi,-\\c,d_2}},s}\|_q \gg \mathcal{A}_{\substack{\psi,-\\c,d_2}}(s), \quad \|T_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}} f_{T_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}},1,t}\|_q + \|T_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}} f_{T_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}},2,t}\|_q \gg \mathcal{A}'_{\substack{\tilde\psi,\tilde\phi\\c,d}}(t)$$

заканчивает доказательство необходимости.

Случай (II) исчерпывается аналогично доказательству теоремы 4. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Newman J., Solomyak M.* Two-sided estimates on singular values for a class of integral operators on the semiaxis // Integral Equations Operator Theory. 1994. V. 20. P. 335–349.
2. *Solomyak M.* Estimates for the approximation numbers of the weighted Riemann — Liouville operator in the spaces L_p // Operator Theory: Advances and Applications. 2000. V. 113. P. 371–383.
3. *Meskhi A.* Solution of some weight problems for the Riemann — Liouville and Weyl operators // Georgian Math. J. 1998. V. 5. P. 564–574.
4. *Prokhorov D.* On the boundedness and compactness of a class of integral operators // J. London Math. Soc. 2000. V. 61. P. 617–628.
5. *Stepanov V. D.* Weighted norm inequalities for integral operators and related topics // Nonlinear analysis, Function spaces and Applications. Prague: Prometheus, 1994. V. 5. P. 139–176.
6. *Heining H. P., Sinnamon G.* Mapping properties of integral averaging operators // Studia Math. 1998. V. 129. P. 157–177.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
8. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 4 апреля 2000 г.,
окончательный вариант — 13 июля 2000 г.

г. Хабаровск
Вычислительный центр ДВО РАН
prohorov@as.fe.ru