Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.11

О ТИПАХ СХОДСТВА И РЕКУРСИВНОГО ИЗОМОРФИЗМА ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. А. Поляков

Аннотация: Доказано, что тип сходства разнозначной функции, принимающей $n \geq 1$ значений, состоит из $P(n) = \sum\limits_{i=0}^{n} D(n-i)D(i)$ типов рекурсивного изоморфизма, где $D(n)$ — число разбиений числа n ($D(0) = 1$). Также показно, что если частично рекурсивная функция α отлична от пустой функции и функции-константы и ее тип сходства состоит из одного типа рекурсивного изоморфизма, то α не имеет рекурсивных доопределений. Библиогр. 3.

Работа примыкает к работе [1]. Как обычно, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел $\{0, 1, 2, \dots\}$. Под функцией, если не оговорено противное, понимаем одноместную частично рекурсивную функцию (ЧРФ). Обозначать ЧРФ будем греческими буквами: α, β, $\gamma, \dots$, а рекурсивные функции — латинскими: f, g, $h, \dots$. Через $\delta\alpha$ обозначим область определения функции α, а через $\rho\alpha$ — область значений функции α; $\tau\alpha = \{(x, y) \mid \alpha(x) = y\}$ — график функции α; $\alpha^a = \{x \mid \alpha(x) = a\}$ — a-уровень функции α. Символ $\setminus$ указывает на разность множеств; для $A \subseteq \mathbb{N}$ дополнение $\mathbb{N} \setminus A$ обозначим через $\overline{A}$. Будем писать $\alpha(x)\downarrow$, если значение $\alpha(x)$ определено, и $\alpha(x)\uparrow$ в противном случае.

На множестве всех одноместных ЧРФ определим два отношения эквивалентности: сходство и рекурсивный изоморфизм (см. [2]).

Определение 1. Функция α *сходна с* β (обозначение $\alpha \sim \beta$), если существуют рекурсивные перестановки f и g такие, что $\alpha = f\beta g$.

Определение 2. Функция α *рекурсивно изоморфна* β (обозначение $\alpha \equiv \beta$), если существует рекурсивная перестановка f такая, что $\alpha = f^{-1}\beta f$.

Известно (см. [2]), что $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow (\exists f$ — рекурсивная перестановка$)$ $(\tau\beta = \{(f(x), f\alpha(x)) \mid x \in \delta\alpha\})$.

Классы эквивалентных элементов по эквивалентности $\sim$ будем называть типами сходства, а по эквивалентности $\equiv$ — типами рекурсивного изоморфизма. Тип сходства состоит из нескольких типов рекурсивного изоморфизма.

По определению *разбиением* называется набор целых положительных чисел (при данной их сумме), в котором порядок чисел не учитывается.

В статье доказано, что тип сходства разнозначной функции, принимающей $n \geq 1$ значений, состоит из $P(n) = \sum\limits_{0 \leq i \leq n} D(n-i)D(i)$ типов рекурсивного изоморфизма, где $D(i)$ — число разбиений числа i ($D(0) = 1$). Дается также нижняя оценка ($P(n)$) числа типов рекурсивного изоморфизма в данном типе сходства ограниченной ЧРФ α, принимающей $n \geq 1$ значений и такой, что $\overline{\delta\alpha}$ —

бесконечное множество. В заключение показано, что если ЧРФ α отлична от пустой функции и от функции-константы и ее тип сходства состоит из одного типа рекурсивного изоморфизма, то α не имеет рекурсивных доопределений.

Множество M с заданным на нем двуместным предикатом (бинарным отношением) R называется *графом* и обозначается через $\langle M; R\rangle$. Вместо $R(a,b)$ пишем aRb. Элементы множества M называются *вершинами* (*точками*) *графа* $\langle M; R\rangle$. Пара вершин (a,b), для которой имеет место aRb, называется *дугой* (*стрелкой*) *графа*, идущей из a в b (a — начало дуги, b — ее конец).

Путем в графе $G = \langle M; R\rangle$, *идущим из вершины* a_0 *в вершину* a_n, называется последовательность дуг

$$(a_0, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n) \quad (n \geq 1).$$

Число n — длина пути. Если $a_0 = a_n$, то путь называется *замкнутым.* Замкнутый путь называется циклом, если вершины $a_0, \ldots, a_{n-1}$ различны. Вершины графа, не являющиеся началами никаких дуг, называются *висячими*; вершины, не являющиеся ни началами, ни концами никаких дуг, — *изолированными.*

Граф $G' = \langle M'; R'\rangle$ называется *подграфом графа* $G = \langle M; R\rangle$, если $M' \subseteq M$ и каждая дуга G' является дугой G. Последовательность вершин графа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 1)$ называется *цепью*, соединяющей a_0 с a_n, если для каждого $i = 1, \ldots, n$ или из a_{i-1} в a_i, или из a_i в a_{i-1} идет дуга. Граф называется *связным*, если каждые две различные его вершины можно соединить цепью. Максимальный связный подграф графа G называется *связной компонентой* (или просто *компонентой*). Связный граф, не имеющий циклов, называется *деревом.*

Конечный граф называется *прадеревом*, если а) в нем существует единственная вершина (называемая корнем), в которую не заходит ни одна дуга; б) всякая его вершина, отличная от корня, является концом точно одной дуги; в) в нем нет замкнутых путей.

Прадерево называется *унарным*, если из каждой его невисячей вершины выходит точно одна дуга. *Длиной* унарного прадерева называется число вершин в нем.

Графы G, G' называются *изоморфными* (обозначение $G \cong G'$), если существует взаимно однозначное отображение ν множества M на M' такое, что xRy тогда и только тогда, когда $\nu(x)R'\nu(y)$ для всех x, y из M. С каждой ЧРФ α свяжем граф $G_\alpha = \langle \dot{\delta}\alpha \cup \rho\alpha; y = \alpha(x)\rangle$. Используя понятие орбиты (см. [3]), нетрудно видеть, что существует плоский граф (без самопересечений) $G'_\alpha \cong G_\alpha$. Точки графа G'_α обозначим теми же самыми символами, что и соответствующие натуральные числа. Граф G_α не имеет изолированных точек; каждая его компонента, — это либо дерево, либо цикл, либо цикл с одним или более ответвляющимися от его вершин деревьями. В графе G_α из каждой его вершины выходит не более одной стрелки.

В графе G_α выделим вершины, соответствующие числам из $\rho\alpha$. *Остовом* графа G_α (обозначение O_α) назовем максимальный подграф графа G_α, содержащий все выделенные вершины, и только их. Граф G называется *функциональным*, если $G \cong G_\alpha$ для некоторой функции α. Если два функциональных графа изоморфны, то их остовы изоморфны. Для разнозначных функций верно и обратное.

Лемма. *Если* $G_\alpha \cong G_\beta$, *где* α, β — *разнозначные функции, принимающие* n *значений, то* $\alpha \equiv \beta$.

Доказательство. Обозначим через ν изоморфизм G_α на G_β. Определим рекурсивную перестановку f такую, что f совпадает с ν на $A = \rho\alpha \cup \delta\alpha$ и $\alpha = f^{-1}\beta f$. Пусть $b_1, \ldots, b_k$ — все различные числа из $B \setminus A$, где $B = \rho\beta \cup \delta\beta$. Если $x \in A$, то $f(x) = \nu(x)$; если $x \in B \setminus A$ и $x = b_i$ для некоторого $1 \le i \le k$, то $f(x) = a_i$. В случае $x \notin A \cup B$ будет $f(x) = x$. Очевидно, f — рекурсивная перестановка. Покажем, что $\alpha = f^{-1}\beta f$. Пусть $\alpha(x)\downarrow$ и $y = \alpha(x)$. Тогда $\nu\alpha(x) = f\alpha(x) = f(y) = \nu(y)$. Так как $f(x) = \nu(x)$, $\beta\nu(x) = \nu(y) = f(y)$, то $\beta f(x) = f\alpha(x)$ и $f^{-1}\beta f(x) = \alpha(x)$.

Пусть $\alpha(x)\uparrow$. Тогда и $f^{-1}\beta f(x)\downarrow$. Действительно, если бы $f^{-1}\beta f(x) = y$, то $x \in A$, $f(x) = \nu(x)$. Имеем $\beta f(x) = f(y)$, $\alpha\nu^{-1}f(x) = \nu^{-1}\beta f(x)$, откуда $\alpha\nu^{-1}\nu(x) = \alpha(x) = \nu^{-1}\beta f(x)$ и $\alpha(x)\downarrow$. Противоречие. Лемма доказана.

Свойство функции принимать n значений и быть разнозначной инвариантно относительно сходства. Легко видеть, что разнозначные функции, принимающие n значений, образуют один тип сходства. Обозначим через $P(n)$ число типов рекурсивного изоморфизма, из которых он состоит. Очевидно, $P(0) = 1$.

Теорема 1. *Если $n \ge 1$, то*

$$P(n) = \sum_{i=0}^{n} D(n-i)D(i).$$

Доказательство. Остов любой компоненты графа G_α, где α — разнозначная функция, принимающая $n \ge 1$ значений, является либо унарным прадеревом, либо циклом. Пусть $\{G_1, \ldots, G_m\}$ — множество компонент графа G_α; p_i — длина остова O_i компоненты G_i $(1 \le i \le m)$. Тогда $p_1 + p_2 + \cdots + p_m = n$.

Заметим, что $\alpha \equiv \beta \Rightarrow G_\alpha \overset{\sim}{=} G_\beta$. Рассмотрим множество $O = \{O_1, \ldots, O_k\}$, где O_i либо унарное прадерево, либо цикл длины p_i $(1 \le i \le k)$, так что $p_1 + \cdots + p_k = n$. Тогда найдется функция $\beta \sim \alpha$ такая, что множество остовов компонент графа G_β совпадает с O. Используя лемму, видим, что для нахождения $P(n)$ достаточно подсчитать число попарно неизоморфных графов, соответствующих равнозначным функциям, которые принимают n значений. Графов, у которых каждая компонента — унарное прадерево, будет $D(n)$; аналогично графов, у которых каждая компонента представляет собой цикл, будет $D(n)$. Графов, у которых все компоненты, кроме одной, унарные прадеревья, будет $D(1)D(n-1)$; аналогично графов, у которых все компоненты, кроме одной, циклы, будет $D(n-1)D(1)$ и т. д. Нетрудно видеть, что

$$P(n) = \sum_{i=0}^{n} D(n-i)D(i).$$

Теорема 2. *Тип сходства* ЧРФ α, *принимающей $n \ge 1$ значений и такой, что $\overline{\delta\alpha}$ бесконечное, состоит не менее чем из $P(n)$ типов рекурсивного изоморфизма.*

Доказательство. Пусть α — ЧРФ, принимающая $n \ge 1$ значений. Рассмотрим множество $O = \{O_1, \ldots, O_k\}$, где O_i либо унарное прадерево, либо цикл длины p_i $(1 \le i \le k)$, так что $p_1 + \cdots + p_k = n$. Покажем, что найдется ЧРФ $\beta \sim \alpha$ такая, что множество остовов компонент графа G_β совпадает с O.

Идея и техника доказательства в общем виде видны после рассмотрения следующего примера. Пусть $n = 6$, $\rho\alpha = \{a_1, \ldots, a_6\}$; $O = \{O_1, O_2, O_3\}$, где O_1 — прадерево длины три, O_2 — цикл длины два, O_3 — цикл длины один. Без ограничения общности можно считать, что $\rho\alpha \subseteq \overline{\delta\alpha}$. Выберем числа $a'_i \in \alpha^{a_i}$ $(1 \le i \le 6)$, $c \in \overline{\delta\alpha}$, $c \notin \rho\alpha$. Определим рекурсивную перестановку f, полагая $f(a_1) = a'_2$, $f(a_2) = a'_1$, $f(a'_2) = a_1$, $f(a'_1) = a_2$, $f(a_3) = a'_3$, $f(a'_3) = a_3$, $f(c) = a'_4$, $f(a_4) = a'_5$, $f(a_5) = a'_6)$, $f(a_6) = a_6$, $f(a'_4) = c$, $f(a'_5) = a_4$, $f(a'_6) = a_5$; в остальных точках $f(x) = x$. Положим $\beta(x) = \alpha f(x)$. Нетрудно проверить, что множество остовов компонент графа G_β совпадает с заданным O.

Автору неизвестно: будет ли тип сходства ограничений ЧРФ состоять из конечного числа типов рекурсивного изоморфизма?

Теорема 3. *Если* ЧРФ α *отлична от пустой функции и от функции-константы и ее тип сходства состоит из одного типа рекурсивного изоморфизма, то* α *не имеет рекурсивных доопределений.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует рекурсивная функция f такая, что $\tau f \supseteq \tau\alpha$. Пусть $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \dots\}$ — рекурсивное множество всех неподвижных точек функции f, т. е. таких точек, что $\forall i(f(a_i) = a_i)$.

Рассмотрим рекурсивную перестановку

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin A, \\ a_{2i+1}, & \text{если } x = a_{2i} \ (i = 0, 1, \dots), \\ a_{2i}, & \text{если } x = a_{2i+1} \ (i = 0, 1, \dots). \end{cases}$$

Положим $\beta(x) = g\alpha(x)$. Очевидно, $\beta \sim \alpha$. Покажем, что ЧРФ β не имеет неподвижных точек. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $x \in A \cap \delta\alpha$. Тогда $\beta(x) = g(\alpha(x)) = g(x) \ne x$.

Случай 2. $x \in \delta\alpha \setminus A$. Обозначим $\alpha(x) = y$; имеем $\beta(x) = g(y)$, $y \ne x$.

Рассмотрим два подслучая.

(а) $y \in A$. Тогда $g\alpha(x) = g(y) \in A$ и, значит, $g(y) \ne x$, $\beta(x) \ne x$.

(б) $y \notin A$. Имеем $g(y) = y$, $\beta(x) = g\alpha(x) = g(y) = y \ne x$.

Но согласно [1] ЧРФ β должна иметь нерекурсивное множество неподвижных точек. Получили противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поляков Е. А.* О типах сходства и рекурсивного изоморфизма частично рекурсивных функций // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 6. С. 188–192.
2. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
3. *Поляков Е. А.* Об универсальной частично рекурсивной функции // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 2. С. 102–106.

Статья поступила 28 марта 1996 г.

г. Шуя Ивановской обл.

Шуйский гос. педагогический университет, кафедра математики