Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

С. Г. Пятков, Н. Л. Абашеева

Аннотация: Получены результаты о разрешимости краевых задач для уравнений вида $B(t)u_t - L(t)u = f$, $t \in (0,T)$, $T \le \infty$, в случае, когда оператор $B(t)$ самосопряженный, а оператор $L(t)$ диссипативный в данном гильбертовом пространстве E. Оператор $B(t)$ может иметь ненулевое ядро, а $L(t)$ предполагается равномерно диссипативным. В случае, когда операторы B и L не зависят от t, условие равномерной диссипативности оператора L ослабляется, требуется лишь его равномерная диссипативность на M (M — некоторое подпространство конечной коразмерности). Библиогр. 37.

Введение

Работа посвящена исследованию краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений вида

$$Mu = B(t)u_t - L(t)u = f, \quad t \in (0,T), \quad T \le \infty, \tag{1}$$

где $B(t)$, $L(t)$ ($t \in (0,T)$) — линейные операторы, определенные в данном гильбертовом пространстве E. Мы не предполагаем, что оператор B обратим; в частности, он может иметь ненулевое ядро. В случае если операторы L, B не зависят от параметра t и спектр пучка $L + \lambda B$ содержится в одной из полуплоскостей вида $\operatorname{Re}\lambda < a$, $\operatorname{Re}\lambda > a$ или при выполнении условия $D(B) \subset D(L)$, то такие уравнения обычно называют уравнениями типа Соболева. Среди работ, посвященных уравнениям типа Соболева, отметим [1–8]. Теория полугрупп для уравнений вида (1) соболевского типа в случае необратимого оператора B имеется, например, в работах [9–12]. Сошлемся также на недавно вышедшую книгу Фавини и Яги [13], где можно найти подробную библиографию и ряд результатов. Для уравнений типа Соболева корректна обычная задача Коши или задача, близкая к ней. Иная ситуация, как мы увидим, в случае, если уравнение не является уравнением типа Соболева (как правило, это означает, что спектр оператора B содержит одновременно бесконечные подмножества положительной и отрицательной полуосей). Такие уравнения возникают в физике [14–21], геометрии, популяционной генетике [22–24] и некоторых других областях.

Мы рассматриваем уравнения вида (1), вообще говоря, не являющиеся уравнениями типа Соболева. Ранее вопросы разрешимости краевых задач для таких уравнений исследовались в случае, когда операторы $L(t)$, $B(t)$ не зависят

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 99–01–00621), Министерством общего и профессионального образования РФ (грант для ученых экспертов).

от t и самосопряжены в данном гильбертовом пространстве E [14, 16, 25–28]. В данной работе операторы L, B могут зависеть от t и условие самосопряженности оператора L заменяется условием его диссипативности. Под диссипативным оператором мы понимаем оператор, удовлетворяющий условию: $\mathrm{Re}(-L(t)u, u) \geq 0$ для всех $u \in D(L(t))$ и $t \in (0, T)$. Здесь $D(L(t))$ — область определения оператора $L(t)$. Такое определение диссипативности используется в [29, 30] (в отличие от [31], где вышеприведенное неравенство заменяется неравенством $\mathrm{Im}(L(t)u, u) \geq 0$).

Опишем содержание работы. В § 1 рассматриваются краевые задачи для уравнения (1) в случае, когда оператор L диссипативен и, более того, найдется постоянная $\delta > 0$ такая, что $\mathrm{Re}(-L(t)u, u) > \delta\|u\|^2$ для всех $u \in D(L(t))$ и $t \in (0, T)$, т. е. L равномерно диссипативен. В § 2 предполагается, что операторы L, B не зависят от t и условие равномерной диссипативности ослаблено, требуется лишь, что $\mathrm{Re}(-Lu, u) > \delta\|u\|^2$ для всех $u \in D(L) \cap M$ (M — некоторое подпространство конечной коразмерности). Это условие существенно осложняет исследование краевых задач в случае $T = \infty$. Задача в пространствах L_2 становится некорректной, появляются решения однородного уравнения, степенным образом ведущие себя на бесконечности. Однако именно такая ситуация наиболее часто встречается в приложениях. Случай операторов, зависящих от t, в этой ситуации требует сложных дополнительных рассмотрений и может быть темой отдельной работы.

§ 1. Положительно определенный случай

1.1. Определения и вспомогательные утверждения. Как обычно, под $C^k([0,T]; B)$, $L_p(0,T;B)$ (B — банахово или гильбертово пространство) понимаем пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций со значениями в B с нормой

$$\|u\|_{C^k([0,T];B)} = \sum_{i=0}^{k} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{d^i}{dt^i} u(t) \right\|_B$$

(предполагается, что функция u и все ее производные допускают непрерывное продолжение на замыкание интервала $(0,T)$) и пространство сильно измеримых функций, определенных на $(0,T)$, со значениями в B и конечной нормой

$$\|u\|_{L_p(0,T;B)} = \left[\int_0^T \|u(\tau)\|_B^p \, d\tau \right]^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;B)} = \operatorname*{vrai\,max}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_B.$$

Пространство $W_2^k(0,T;B)$ состоит из функций $u \in L_2(0,T;B)$, имеющих обобщенные производные (в смысле теории распределений) до порядка k, которые принадлежат пространству $L_2(0,T;B)$. Через $L(A,B)$ обозначаем пространство линейных непрерывных операторов, заданных на данном банаховом пространстве A, со значениями в B. Под $\sigma(L)$, $\rho(L)$ понимаем спектр и резольвентное множество оператора L. Всегда, если не оговорено противное, вводим в $D(L)$ норму графика. Символом $R(L)$ обозначаем область значений оператора L. Даны комплексные гильбертовы пространства E и H_1, $H_1 \subset E$, причем последнее вложение плотно. Пусть $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в E. Тогда негативное пространство H_1', построенное как пополнение E по норме

$$\|u\|_{H_1'} = \sup_{v\in H_1, v\neq 0} |(u,v)|/\|v\|_{H_1}, \tag{2}$$

совпадает с пространством непрерывных антилинейных функционалов над H_1 и скалярное произведение в E допускает продолжение до отношения двойственности между H_1 и H_1' [30, 32]. Пусть A, B — комплексные банаховы пространства, непрерывно вложенные в некоторое комплексное топологическое линейное пространство. Через $(A,B)_{\theta,p}$ обозначаем пространство, построенное с помощью метода вещественной интерполяции [33].

Даны операторы $L(t), B(t) : E \to E$, E — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Мы предполагаем в этом параграфе, что операторы $L(t)$, $B(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

I. *Найдется гильбертово пространство H_1, плотно вложенное в E, такое, что $L(t) \in L_\infty(0,T;L(H_1;H_1'))$, $B(t) \in W^1_\infty(0,T;L(H_1,H_1'))$ (т. е. без ограничения общности можем считать, что $B(t) \in C([0,T];L(H_1,H_1'))$). Операторы $B(0)$ и $B(T)$ (если $T<\infty$) самосопряжены в E. Операторы $B(t)$ симметричны во внутренних точках интервала $(0,T)$ в том смысле, что $(B(t)u,v) = (u,B(t)v)$ при всех $u,v\in H_1$; H_1 плотно вложено в $D(|B(0)|^{1/2})$ и в $D(|B(T)|^{1/2})$.*

Условия I гарантируют, что для любой $u(t)\in W_2^1(0,T;H_1)$ функция $B(t)u(t)$ имеет обобщенную производную $\frac{d}{dt}B(t)u(t)$ и справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}B(t)u(t) = B(t)u_t(t) + B_t(t)u(t),$$

где u_t, B_t — обобщенные производные от функций $u(t)$, $B(t)$. Кроме того, $(B_t(t)u,v) = (u,B_t(t)v)$ при всех $u,v\in H_1$ и почти всех $t\in(0,T)$.

Дополнительно предположим, что выполнено условие

II. *Найдется постоянная $\delta>0$ такая, что*

$$\operatorname{Re}\biggl(\Bigl(-L(t) - \frac{1}{2}B_t(t)\Bigr)u,u\biggr) \geq \delta\|u\|^2_{H_1}$$

для всех $u\in H_1$ и почти всех $t\in(0,T)$.

Определим пространства

$$F_0 = D(|B(0)|^{1/2})/\ker B(0), \quad G_0 = D(|B(T)|^{1/2})/\ker B(T),$$

$$F_0^{\pm} = \{u\in F_0 : E^{\pm}(0)u = u\}, \quad G_0^{\pm} = \{u\in G_0 : E^{\pm}(T)u = u\},$$

где $E^{\pm}(0)$, $E^{\pm}(T)$ — спектральные проекторы операторов $B(0)$ и $B(T)$, соответствующие положительной и отрицательной частям спектра. Например, если $E_\lambda(0)$ — спектральное семейство оператора $B(0)$, то $E^-(0) = E_{-0}$, $E^+(0) = I - E_0$ (I — тождественный оператор). Кроме того, положим $F_1 = H_1/(\ker B(0)\cap H_1)$, $G_1 = H_1/(\ker B(T)\cap H_1)$. Из условия I вытекает, что F_1, G_1 плотно вложены в F_0, G_0 соответственно. Определим скалярные произведения в F_0, G_0 с помощью равенств $(u,v)_{F_0} = (B(0)J(0)u,v)$, $(u,v)_{G_0} = (B(T)J(T)u,v)$, где $J(0) = E^+(0) - E^-(0)$ и $J(T) = E^+(T) - E^-(T)$. В подпространствах $F_0^{\pm}$, $G_0^{\pm}$ вводим нормы и скалярные произведения, индуцированные из F_0, G_0 соответственно. Построим также пространства F_{-1}, G_{-1} как пополнения F_0, G_0 по нормам

$$\|u\|_{F_{-1}} = \|B(0)u\|_{H_1'}, \quad \|u\|_{G_{-1}} = \|B(T)u\|_{H_1'}.$$

Имеем $F_1 \subset F_0 \subset F_{-1}$, $G_1 \subset G_0 \subset G_{-1}$.

Приведем некоторые вспомогательные результаты, считая, что условия I, II выполнены. Ниже через c обозначаем, вообще говоря, различные постоянные, не зависящие от функций, участвующих в неравенствах. Введем вспомогательное пространство

$$W = \left\{ u(t) \in L_2(0,T;H_1) : \frac{d}{dt}B(t)u(t) \in L_2(0,T;H_1') \right\}$$

с естественной нормой

$$\|u\|_W^2 = \|u(t)\|^2_{L_2(0,T;H_1)} + \left\| \frac{d}{dt}B(t)u(t) \right\|^2_{L_2(0,T;H_1')}.$$

Лемма 1. *Если $T < \infty$, то $C^\infty([0,T];H_1)$ плотно в W. Если $T = \infty$, то множество функций из $C^\infty([0,\infty);H_1)$, имеющих ограниченный носитель, плотно в W.*

Доказательство. Рассмотрим случай $T < \infty$. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — вещественные функции класса $C^\infty([0,T])$, первая из которых равна единице в некоторой окрестности точки 0, а вторая — в некоторой окрестности точки T, и такие, что $\varphi_1(t) + \varphi_2(t) = 1$ для всех $t \in [0,T]$. Пусть $u \in W$. Положим $u_i = u\varphi_i(t) \in W$ $(i = 1,2)$. Первую из этих функций продолжим нулем на весь интервал $(0,\infty)$, а вторую — нулем на весь интервал $(-\infty,T)$. Построим функции

$$u^1_\rho(t) = \int\limits_0^\infty \omega(\xi)u_1(t+\rho\xi)\,d\xi, \quad u^2_\rho(t) = \int\limits_0^\infty \omega(\xi)u_2(t-\rho\xi)\,d\xi,$$

где $\omega(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\omega \in (0,1)$, $\int\limits_0^\infty \omega(\xi)\,d\xi = 1$. Стандартным образом проверяется, что $\left\|u^i_\rho - u_i\right\|_{L_2(0,T;H_1)} \to 0$ $(i = 1,2)$ при $\rho \to 0$, $\left\|B(u^i_\rho - u_i)\right\|_{L_2(0,T;H_1')} \to 0$ $(i = 1,2)$ при $\rho \to 0$. Имеем представление

$$\frac{d}{dt}\bigl(B(t)u^1_\rho\bigr) = \int\limits_0^\infty \omega(\xi)B_t(t)u_1(t+\rho\xi)\,d\xi - \int\limits_0^\infty \omega'(\xi)\frac{(B(t) - B(t+\rho\xi))}{\rho}u_1(t+\rho\xi)\,d\xi + \int\limits_0^\infty \omega(\xi)\frac{d}{dt}(B(t+\rho\xi)u_1(t+\rho\xi))\,d\xi.$$

Из этого представления вытекает оценка

$$\left\| \frac{d}{dt}\bigl(B(t)u^1_\rho\bigr) \right\|_{L_2(0,T;H_1')} \le c\|u\varphi_1\|_W. \tag{3}$$

Аналогично

$$\left\| \frac{d}{dt}\bigl(B(t)u^2_\rho\bigr) \right\|_{L_2(0,T;H_1')} \le c\|u\varphi_2\|_W. \tag{4}$$

Возьмем последовательность $\rho_k \to 0$ при $k \to \infty$. Из оценок (3), (4) вытекает, что найдется подпоследовательность $\rho_{k(n)}$ такая, что $u^i_{\rho_{k(n)}} \to u_i$ при $n \to \infty$

слабо в W. Тогда найдутся и выпуклые комбинации u_n^1, u_n^2 элементов этих подпоследовательностей такие, что

$$\left\|u_n^1 - u_1\right\|_W + \left\|u_n^2 - u_2\right\|_W \to 0$$

при $n \to \infty$. Последовательность $u_n = u_n^1 + u_n^2$ будет искомой. В случае $T = \infty$ искомую последовательность можно построить в виде

$$u^1_{\rho(n)}(t) = \varphi(t/n) \int\limits_0^\infty \omega(\xi) u(t + \rho(n)\xi)\, d\xi,$$

где $\varphi(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $\xi \in [0,1]$ и нулю при $\xi \geq 2$, а $\rho(n) \to 0$ — некоторая последовательность вещественных чисел.

Ниже, в леммах 2, 3, мы предполагаем, что $T < \infty$. Соответствующие переформулировки для случая $T = \infty$ очевидны, а доказательства в этом случае только упрощаются.

Лемма 2. *Пусть $u(t) \in W$. Тогда после, возможно, изменения на множестве меры 0 функция $B(t)u(t)$ принадлежит классу $C([0,T]; H_1')$. Единственным образом определены функции $u_0 \in F_{-1}$, $u_T \in G_{-1}$ (которые можно назвать следами функции $u(t)$ при $t = 0$ и $t = T$ соответственно), обладающие свойством: для любой последовательности $u_n \in C^\infty([0,T]; H_1)$, сходящейся к $u(t)$ в норме пространства W,*

$$\|I_0 u_n(0) - u_0\|_{F_{-1}} \to 0, \quad \|I_T u_n(T) - u_T\|_{G_{-1}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Здесь I_0, I_T — канонические гомоморфизмы, сопоставляющие элементам $u_n(0) \in H_1$, $u_n(T) \in H_1$ фактор-классы

$$I_0 u_n(0) = u_n(0) + \ker B(0) \cap H_1, \quad I_0 u_n(T) = u_n(T) + \ker B(T) \cap H_1.$$

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно, поскольку

$$B(t)u(t) \in L_2(0,T; H_1'), \quad \frac{d}{dt} B(t)u(t) \in L_2(0,T; H_1')$$

[33, п. 1.8.3, гл. 1]. Второе утверждение вытекает из первого и определения пространств F_{-1}, G_{-1}.

В дальнейшем мы обозначаем функции u_0, u_T, определенные в лемме 2, через $u(0)$, $u(T)$ соответственно. При некоторых дополнительных условиях лемма 2 может быть обобщена, а точнее справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $u(t) \in W$ и выполнены условия*

$$(F_1, F_{-1})_{1/2,2} = F_0, \quad (G_1, G_{-1})_{1/2,2} = G_0. \tag{5}$$

Тогда следы $u(0)$, $u(T)$ принадлежат пространствам F_0, G_0 и справедлива оценка

$$\|u(0)\|_{F_0} + \|u(T)\|_{G_0} \leq c\|u\|_W.$$

Более того, для любых элементов $v_0 \in F_0$, $v_T \in G_0$ существует функция $v(t) \in W$ такая, что $v(0) = v_0$, $v(T) = v_T$.

Доказательство. Пусть $u(t) \in W$. Рассмотрим функции $u_i(t)$, ω, построенные в доказательстве леммы 1, и положим

$$v_1(t) = \int\limits_0^\infty \omega(\xi) u_1(t + t\xi)\, d\xi, \quad v_2(t) = \int\limits_0^\infty \omega(\xi) u_2(t - t\xi)\, d\xi.$$

Без ограничения общности считаем, что $\operatorname{supp} v_1 \subset [0,T)$ и $\operatorname{supp} v_2 \subset (0,T]$, иначе уменьшим носитель функции ω. Очевидно, что $v_1(t) \in C^\infty((0,\infty); H_1)$. Кроме того, $v_1(t) \in L_2(0,\infty; H_1)$, и справедлива оценка

$$\|v_1(t)\|_{L_2(0,T;H_1)} \le c\|u\|_W. \tag{6}$$

Покажем, что функция $B(0)v_1(t) \in L_2(0,T;H_1')$ имеет обобщенную производную, принадлежащую пространству $L_2(0,T;H_1')$. Приблизим функцию $u(t)$ в норме пространства W функциями $f_n \in C^\infty([0,T];H_1)$. Тогда соответствующие функции

$$v_{1n}(t) = \int_0^\infty \omega(\xi) f_n(t+t\xi)\varphi_1(t+t\xi)\,d\xi,\ v_{2n}(t) = \int_0^\infty \omega(\xi) f_n(t-(T-t)\xi)\varphi_2(t-(T-t)\xi)\,d\xi$$

принадлежат классу $C^\infty([0,T];H_1)$. Имеем представление

$$\begin{aligned} B(0)v_{1nt} &= \int_0^\infty \omega(\xi) B(0)\frac{d}{dt}(f_n(t+t\xi)\varphi_1(t+t\xi))\,d\xi \\ &= \int_0^\infty \omega(\xi) B(t+t\xi)\frac{d}{dt}(f_n(t+t\xi)\varphi_1(t+t\xi))\,d\xi \\ &- \int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\omega(\xi)\frac{(1+\xi)}{t}\right)(B(0)-B(t+t\xi))(f_n(t+t\xi)\varphi_1(t+t\xi))\,d\xi \\ &+ \int_0^\infty \omega(\xi)(1+\xi)B_t(t+t\xi)(f_n(t+t\xi)\varphi_1(t+t\xi))\,d\xi. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $\|B(0)-B(t+t\xi)\|_{L(H_1,H_1')} \le ct(1+\xi)$, получим неравенство

$$\|B(0)v_{1nt}\|_{L_2(0,T;H_1')} \le c\|f_n\|_W, \tag{7}$$

где c — постоянная, не зависящая от n. Взяв в (7) вместо функции v_{1nt} разность $v_{1nt} - v_{1mt}$, получим сходимость в себе последовательности v_{1nt} в пространстве $L_2(0,T;H_1')$ и, следовательно, сходимость к некоторой функции χ. Из определения обобщенной производной вытекает, что обобщенная производная от функции $B(0)v_1$ существует и совпадает с χ. Рассмотрим функцию $\tilde v_1(t) = I_0 v_1(t) \in L_2(0,T;F_1)$. Тогда обобщенная производная от этой функции существует и принадлежит пространству $L_2(0,T;F_{-1})$. Из теоремы 1.8.3 в [33, гл. 1] и первого из равенств (5) заключаем, что $\tilde v_1(t) \in C([0,T];F_0)$ (после, возможно, изменения на множестве меры нуль) и справедлива оценка

$$\|\tilde v_1(t)\|_{C([0,T];F_0)} \le c(\|v_1\|_{L_2(0,T;H_1)} + \|B(0)v_{1t}\|_{L_2(0,T;H_1')}). \tag{8}$$

Из определения функции $v_{1n}(t)$ имеем $v_{1n}(0) = f_n(0)$. Тогда из (8) вытекает, что последовательность $I_0 f_n(0)$ сходится в себе в F_0 и, следовательно, $u(0) = v_1(0) = \lim I_0 f_n(0) \in F_0$. Пользуясь оценками (6)–(8), выводим оценку

$$\|u(0)\|_{F_0} \le c\|u\|_W. \tag{9}$$

Проводя те же рассуждения для функции $v_2(t)$, получим, что след $u(T)$ принадлежит G_0 и справедлива оценка

$$\|u(T)\|_{G_0} \le c\|u\|_W. \tag{10}$$

Из оценок (9), (10) следует первая часть утверждения леммы. Покажем вторую часть утверждения. Пусть $v_0 \in F_0$, $v_T \in G_0$. Пользуясь теоремой 1.8.3 из [33, гл. 1], найдем функцию $\tilde{v}_1(t)$ такую, что $\tilde{v}_1(t) \in L_2(0,T;F_1)$, $\tilde{v}_{1t} \in L_2(0,T;F_{-1})$, $\tilde{v}_1(0) = v_0$. Найдется функция $v_1(t) \in L_2(0,T;H_1)$ такая, что $I_0 v_1 = \tilde{v}_1$. Тогда функция $B(0)v_1(t)$ имеет обобщенную производную, принадлежащую пространству $L_2(0,T;H_1')$. Далее, строим функцию

$$u_1(t) = \int\limits_0^\infty \omega(\xi) v_1(t+t\xi)\varphi_1(t+t\xi)\, d\xi.$$

Легко проверить, как и при доказательстве первой половины леммы, что эта функция принадлежит W, $\operatorname{supp} u_1 \subset [0,T)$ и $u_1(0) = v_1(0) = v_0$. Аналогично строим функцию u_2 со свойствами: $u_2 \in W$, $\operatorname{supp} u_2 \subset (0,T]$ и $u_2(T) = v_2(T) = v_T$. Искомая функция совпадает с функцией $u = u_1 + u_2$.

Замечание 1. В конкретных ситуациях условие (5) выполнено довольно часто. Если оператор $B(t)$ не зависит от t (в этом случае $F_i = G_i$ $(i = -1, 0, 1)$), то условие (5) эквивалентно условию: из принадлежности функции $u(t)$ пространству W вытекает, что $I_0 u(t) \in C([0,T];F_0)$. В случае $\ker B = \{0\}$, это означает, что условие (5) эквивалентно классической теореме о следах. Если оператор $B(0)$ знакоопределен, т. е. $B(0) \geq 0$ или $B(0) \leq 0$, то первое из равенств (5) выполнено. Аналогичное утверждение имеет место для оператора $B(T)$. Равенства (5) также справедливы, если оператор $L(t)$ ограничен. В этом случае $H_1 = E$.

1.2. Теоремы существования и единственности. Дополним уравнение (1) краевыми условиями

$$E^+(0)u(0) = u_0^+, \quad \lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \quad (T = \infty), \tag{11}$$

$$\begin{gathered} E^+(0)u(0) = h_{11}E^-(0)u(0) + h_{12}E^+(T)u(T) + u_0^+, \\ E^-(T)u(T) = h_{21}E^-(0)u(0) + h_{22}E^+(T)u(T) + u_T^- \quad (T < \infty), \end{gathered} \tag{12}$$

где операторы h_{ij} обладают свойствами: $h_{11} \in L(F_0^-, F_0^+)$, $h_{12} \in L(G_0^+, F_0^+)$, $h_{21} \in L(F_0^-, G_0^-)$, $h_{22} \in L(G_0^+, G_0^-)$.

Схема доказательства разрешимости краевых задач (1), (11) и (1), (12) близка к тем, что были использованы, например, в [25, 28].

Вначале рассмотрим случай $T = \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;H_1')$, $u_0^+ \in F_0^+$ *и выполнены условия* I, II. *Тогда существует решение краевой задачи* (1), (11), *принадлежащее пространству* W, *причем* $u(0) \in F_0$ *и, следовательно, первое из равенств* (11) *имеет смысл.*

Доказательство. Обозначим через Φ множество векторов $(u(t), I_0 u(0))$, где функция $u(t) \in C^\infty([0,\infty);H_1)$ имеет ограниченный носитель. Пусть F — замыкание множества векторов $\vec{u} \in \Phi$ в норме пространства $L_2(0,T;H_1) \times F_0$. Очевидно, что F совпадает с пространством $L_2(0,T;H_1) \times F_0$. Пусть также $\widetilde{W}$ — замыкание Φ по норме $W \times F_0$. Определим полуторалинейную форму

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int\limits_0^\infty [-(u, Bv_t)(t) - (u, B_t v)(t) - (Lu, v)(t)]\, dt - (BE^- u^0, v(0)),$$

где $\vec{u} = (u(t), u^0) \in F$, $\vec{v} \in \Phi$. Форма $a(\vec{u}, \vec{v})$ допускает оценку

$$|a(\vec{u}, \vec{v})| \leq c\|\vec{u}\|_F \|\vec{v}\|_{\widetilde{W}}. \tag{13}$$

Тогда при фиксированном $\vec{v} \in \Phi$ эта форма является линейным непрерывным функционалом над F. В качестве скалярного произведения в F берем скалярное произведение

$$(\vec{u}, \vec{v})_F = (u(t), v(t))_{L_2(0,\infty;H_1)} + (u^0, v^0)_{F_0}, \quad \vec{u} = (u(t), u^0), \quad \vec{v} = (v(t), v^0).$$

Следовательно, существует вектор $A(\vec{v}) \in F$ такой, что

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, A(\vec{v}))_F.$$

Оператор $A : F \to F$ с $D(A) = \Phi$ допускает замыкание. Действительно, достаточно проверить, что из сходимостей $\vec{v}_n \to 0$, $A(\vec{v}_n) \to \vec{f}$ при $n \to \infty$ в F вытекает, что $\vec{f} = 0$. Это утверждение очевидно в силу плотности класса Φ в F. Замыкание мы обозначаем тем же символом A. Согласно условию II для любого $\vec{v} \in \Phi$ (следовательно, и для любого $\vec{v} \in D(A)$) имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}(\vec{v}, A(\vec{v}))_F \geq \delta \int\limits_0^\infty \|v(t)\|_{H_1}^2 \, dt + \frac{1}{2}(v(0), v(0))_{F_0} \geq \delta_1 \|\vec{v}\|_F^2, \quad \delta_1 = \min(\delta, 1/2). \tag{14}$$

Отсюда $\ker A = \{0\}$ и

$$\|A(\vec{v})\|_F \geq \delta_1 \|\vec{v}\|_F \quad \forall \vec{v} \in D(A). \tag{15}$$

Вследствие замкнутости A оценка (15) гарантирует, что область значений $R(A)$ оператора A замкнута в F. В силу плотности $D(A)$ в F определен сопряженный оператор $A^* : F \to F$, причем $\overline{R(A^*)} = \ker A^\perp = F$. Однако подпространства $R(A^*)$ и $R(A)$ замкнуты или нет одновременно (см. лемму 8.2 в [34]). Тогда

$$R(A^*) = F. \tag{16}$$

Рассмотрим выражение

$$l(\vec{v}) = \left(B(0)u_0^+, v^0\right) + \int\limits_0^\infty (f(t), v(t)) \, dt, \quad \vec{v} = (v(t), v^0),$$

являющееся антилинейным непрерывным функционалом над F. Найдется $\vec{g} \in F$ такой, что

$$l(\vec{v}) = (\vec{g}, \vec{v})_F.$$

В силу (16) существует вектор $\vec{u} \in D(A^*)$ такой, что $A^*\vec{u} = \vec{g}$. Для этого вектора $\vec{u} = (u(t), u^0)$ будем иметь

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = l(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \Phi. \tag{17}$$

Взяв $v(t) \in C_0^\infty(0, \infty; H_1)$, из (17) заключаем, что соответствующая функция $u(t)$ принадлежит W и выполнено равенство (1). Взяв затем $v(t) \in C^\infty([0, \infty); H_1) \cap W$ и интегрируя по частям в (17) (пользуясь леммой 1, можно интегрирование провести на гладких функциях $u(t)$ и затем совершить предельный переход), получим равенство $u(0) = u_0^+ + E^-(0)u^0 \in F_0$. Отсюда заключаем, что выполнены краевые условия (11). Второе условие в (11) здесь заменяется условием принадлежности функции $u(t)$ пространству $L_2(0, \infty; H_1)$. Теорема доказана.

Перейдем к случаю $T < \infty$. Определим оператор

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} : F_0^- \times G_0^+ \to F_0^+ \times G_0^-.$$

Ввиду условий на h_{ij} оператор H является линейным непрерывным отображением из $F_0^- \times G_0^+$ в $F_0^+ \times G_0^-$. Обозначим норму этого отображения через ρ_H.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_2(0,T;H_1')$, $u_0^+ \in F_0^+$, $u_T^- \in G_0^-$, *выполнены условия* I, II *и, кроме того,* $\rho_H < 1$. *Тогда существует решение краевой задачи* (1), (12), *принадлежащее пространству* W, *такое, что* $u(0) \in F_0$, $u(T) \in G_0$ *и, следовательно, равенства* (12) *имеют смысл.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1. Приведем необходимые изменения в соответствующих определениях. Класс Φ совпадает с классом $\{(u(t), I_0u(0), I_Tu(T)) : u(t) \in C^\infty([0,T];H_1)\}$. Через F обозначим замыкание множества векторов $\vec{u} \in \Phi$ в норме пространства $L_2(0,T;H_1) \times F_0 \times G_0$. Полуторалинейная форма $a(\vec{u},\vec{v})$ в данном случае имеет вид

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int_0^T [-(u(t), B(t)v_t(t)) - (u(t), B_t(t)v(t)) - (L(t)u(t), v(t))]\,dt$$
$$+ (E^+(T)u^T, v(T))_{G_0} + (E^-(0)u^0, v(0))_{F_0} - (h_{21}E^-(0)u^0 + h_{12}E^+(T)u^T, v(T))_{G_0}$$
$$- (h_{11}E^-(0)u^0 + h_{12}E^+(T)u^T, v(0))_{F_0},$$

где $\vec{u} = (u(t), u^0, u^T) \in F$, $\vec{v} \in \Phi$. Неравенство (14) в данном случае запишется в виде

$$\operatorname{Re}(\vec{v}, A(\vec{v}))_F \geq \delta \int_0^T \|v(t)\|_{H_1}^2\,dt + \frac{1}{2}\big(\|v(0)\|_{F_0}^2 + \|v(T)\|_{G_0}^2\big)$$
$$- (h_{21}E^-(0)v(0) + h_{12}E^+(T)v(T), v(T))_{G_0}$$
$$- (h_{11}E^-(0)v(0) + h_{12}E^+(T)v(T), v(0))_{F_0} \geq \delta_2\|\vec{v}\|_F^2,$$

где δ_2 — некоторая положительная постоянная, зависящая от величин δ, ρ_H. Из этого неравенства вытекает, что справедлив соответствующий аналог неравенства (15) и, следовательно, доказательство может быть проведено по той же схеме, что и в теореме 1.

Перейдем к условиям, гарантирующим корректность задач (1), (11) и (1), (12).

Теорема 3. *Пусть* $f \in L_2(0,T;H_1')$, $u_0^+ \in F_0^+$, *выполнены условия* I, II *и справедливо первое из равенств* (5). *Тогда решение задачи* (1), (11), *принадлежащее пространству* W, *единственно и справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_W + \|u(0)\|_{F_0} \leq c(\|f\|_{L_2(0,T;H_1')} + \|u_0^+\|_{F_0}), \tag{18}$$

где c — *некоторая положительная постоянная, не зависящая от* $f(t), u_0^+, u(t)$.

Доказательство. Воспользовавшись леммой 1, приблизим решение $u(t)$ последовательностью функций $u_n \in C^\infty([0,\infty);H_1)$, имеющих ограниченный носитель. В силу леммы 3

$$\|u_n(0) - u(0)\|_{F_0} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

причем след $u(0)$ определен и принадлежит пространству F_0. В частности,

$$\|E^+(0)u_n(0) - u_0^+\|_{F_0} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Интегрируя по частям в выражении $\int_0^\infty \operatorname{Re}(Mu_n, u_n)(t)\,dt$ и используя условие II, получим оценку

$$\|u_n\|_{L_2(0,T;H_1)} \leq c(\|Mu_n\|_{L_2(0,T;H_1')} + \|E^+(0)u_n\|_{F_0}).$$

Из этой оценки и определения оператора M вытекает оценка

$$\|u_n\|_W \leq c_1(\|Mu_n\|_{L_2(0,T;H_1')} + \|E^+(0)u_n\|_{F_0}).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по n и пользуясь оценкой из леммы 3, приходим к неравенству (18), из которого и вытекает единственность решений задачи (1), (11).

Аналогичное утверждение справедливо и в случае задачи (1), (12).

Теорема 4. *Пусть $f \in L_2(0,T;H_1')$, $u_0^+ \in F_0^+$, $u_T^- \in G_0^-$, выполнены условия* I, II, *$\rho_H \leq 1$ и справедливы равенства* (5). *Тогда существует единственное решение краевой задачи* (1), (12), *принадлежащее пространству W. Справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_W + \|u(0)\|_{F_0} + \|u(T)\|_{G_0} \leq c\big(\|f\|_{L_2(0,T;H_1')} + \big\|u_0^+\big\|_{F_0} + \big\|u_T^-\big\|_{G_0}\big), \qquad (19)$$

где c — положительная постоянная, не зависящая от $f(t), u_0^+, u_T^-, u(t)$.

Доказательство. Пусть $u(t)$ — решение задачи (1), (12). По лемме 3 определены следы $u(0) \in F_0$, $u(T) \in G_0$. Приблизим функцию $u(t)$ последовательностью $u_n \in C^\infty([0,T];H_1)$. Повторяя рассуждения теоремы 3 и пользуясь условием $\rho_H \leq 1$, получим оценку (19) с постоянной, не зависящей от функций f, u_0^+, u_T^- и от оператора H, которая гарантирует единственность решений $u \in W$. Существование решений в случае $\rho_H < 1$ вытекает из теоремы 2. Покажем существование решений в случае $\rho_H = 1$. Для этого рассмотрим задачу (1), (12), где вместо оператора H используем оператор τH ($\tau \in (0,1)$). В соответствии с теоремой 2 существует решение u^τ задачи (1), (12). Из оценки (19), равномерной по параметру $\tau \in (0,1)$, вытекает существование подпоследовательности u^{τ_n} ($\tau_n \to 1$ при $n \to \infty$) и функции $u \in W$ таких, что $u^{\tau_n} \to u \in W$ слабо в W, $u^{\tau_n}(0) \to u(0)$, $u^{\tau_n}(T) \to u(T)$ слабо в F_0, G_0 соответственно. Переходя к пределу по n, получим утверждение теоремы.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 (*или теоремы* 4). *Рассмотрим уравнение*

$$Mu - \lambda u = f(t). \qquad (20)$$

Тогда для любого λ такого, что $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, существует единственное решение задачи (20), (11) (*или* (20),(12)), *принадлежащее пространству W.*

Приведем некоторые простейшие результаты о гладкости решений рассмотренных выше краевых задач.

В дополнение к условиям I, II потребуем выполнения следующего условия.

III. *Функция $L(t)$ принадлежит $W_\infty^1(0,T;L(H_1;H_1'))$ и найдется положительная постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что*

$$\operatorname{Re}\left(\left(-L(t) + \frac{1}{2}B_t(t)\right)u, u\right) \geq \delta_0\|u\|_{H_1}^2 \quad \forall u \in H_1,\ \forall t \in (0,T).$$

Положим $\varphi = (T-t)^2t^2$ в случае $T < \infty$ и $\varphi = \min(t^2, 1)$ при $T = \infty$.

Теорема 5. *Пусть $f \in L_2(0,T;H_1')$, $\sqrt{\varphi}f_t \in L_2(0,T;H_1')$ $u_0^+ \in F_0^+$, $u_T^- \in G^-$, выполнены условия* I–III, *$\rho_H \leq 1$ и справедливы равенства* (5). *Тогда существует единственное решение $u(t)$ краевой задачи* (1), (12), *принадлежащее пространству W, такое, что*

$$\sqrt{\varphi}u_t \in L_2(0,T;H_1), \quad \sqrt{\varphi}\frac{d}{dt}B(t)u_t \in L_2(0,T;H_1').$$

Если дополнительно $\sqrt{\varphi} f \in L_2(0,T;E)$, $B(t) \in L_\infty(0,T;L(H_1,E))$, *то*

$$\sqrt{\varphi}u(t) \in L_2(0,T;D(L)) = \{v(t) \in L_2(0,T;H_1) : Lv \in L_2(0,T;E)\}.$$

Доказательство. Определим пространства

$$\widetilde{W} = \left\{u \in W : \sqrt{\varphi}u_t \in L_2(0,T;H_1),\ \sqrt{\varphi}\frac{d}{dt}B(t)u_t \in L_2(0,T;H_1')\right\}.$$

$$F = \{(f,u_0^+,u_T^-) : f \in L_2(0,T;H_1')\ \sqrt{\varphi}f_t \in L_2(0,T;H_1'),\ u_0^+ \in F_0^+,\ u_T^- \in G_0^-\}.$$

Отметим, что класс $C^\infty([0,T];H_1)$ плотен в $\widetilde{W}$. Фактически пространство $\widetilde{W}$ состоит из функций $u \in W$ таких, что обобщенная производная u_t принадлежит пространству, норма в котором совпадает с нормой пространства W с дополнительным весом φ. Поскольку операция обобщенного дифференцирования коммутирует с операцией усреднения, для доказательства плотности можно применить рассуждения из леммы 1, которые будут справедливы без каких-либо изменений.

Для функций $u \in \widetilde{W}$ определим оператор $A : \widetilde{W} \to F$, сопоставляющий каждой функции $u \in \widetilde{W}$ вектор-функцию $(Mu, h_1(u), h_2(u))$, где

$$h_1(u) = E^+(0)u(0) - (h_{11}E^-(0)u(0) + h_{12}E^+u(T)),$$

$$h_2(u) = E^-(T)u(T) - (h_{21}E^-(0)u(0) + h_{22}E^+u(T)).$$

В силу теоремы 4 $\ker A = \{0\}$. Ввиду оценки (19) имеем

$$\|Au\|_F \geq \delta_2\|u\|_W \quad (u \in C^\infty([0,T];H_1)), \tag{21}$$

где δ_2 — некоторая положительная постоянная. Интегрируя по частям и используя условие III, получим, что

$$\int_0^T \mathrm{Re}\left((Mu)_t, \varphi(t)u_t(t) - \frac{1}{2}\varphi_t(t)u(t)\right)dt$$
$$\geq \delta_3\|\sqrt{\varphi}u_t\|^2_{L_2(0,T;H_1)} - c\|u\|^2_W \quad (u \in C^\infty([0,T];H_1)), \tag{22}$$

где δ_3, c — положительные постоянные. Из (21), (22) и определений операторов M, A получим оценку

$$\|Au\|_F \geq \delta_4\|u\|_{\widetilde{W}},$$

где δ_4 — положительная постоянная, не зависящая от u. Из этой оценки и определения оператора A вытекает, что A допускает расширение до ограниченного линейного отображения $\widetilde{W}$ в F с замкнутой областью значений. Покажем, что $R(A)$ совпадает с F. Предположим, что это не так. Тогда найдется нетривиальный линейный непрерывный функционал $l \in F^*$ такой, что $l(Au) = 0$ для всех $u \in \widetilde{W}$ и, в частности, для всех $u \in C^\infty([0,T];H_1)$. Однако из теоремы 4, плотности класса $C^\infty([0,T];H_1)$ в W и леммы 3 следует, что линеал $\{Au,\ u \in C^\infty([0,T];H_1)\}$ плотен в пространстве $\widetilde{F} = L_2(0,T;H_1') \times F_0^+ \times G_0^-$, причем вложение $F \subset \widetilde{F}$ плотно. Тогда функционал l допускает продолжение до линейного непрерывного функционала над $\widetilde{F}$ и, следовательно, найдется вектор $(f(t), v_0^+, v_T^-)$ $(f(t) \in L_2(0,T;H_1))$ такой, что

$$l(u) = (Mu, f(t)) + (h_1(u), v_0^+)_{F_0} + (h_2(u), v_T^-)_{G_0} = 0 \quad \forall u \in C^\infty([0,T];H_1).$$

Из теоремы 4 выводим, что $f(t) = 0$, $v_0^+ = 0$, $v_T^- = 0$; противоречие. Оставшиеся утверждения теоремы вытекают из определений оператора M и пространства $\widetilde{W}$.

Замечание 2. При выполнении дополнительных условий типа гладкости на операторы $B(t)$, $L(t)$ и дополнительных неравенств того же типа, что и в условии III, гладкость решений в весовых пространствах по переменной t повышается и далее. Однако в общем случае избавиться от веса φ мы не можем в том смысле, что имеются уравнения вида (1), для которых задача (1), (12) (или (1), (11)) имеет решение, удовлетворяющие условию $u_t \in L_2(0,T;H_1)$ лишь при выполнении конечного или бесконечного количества дополнительных условий типа ортогональности для правой части и граничных данных, несмотря на то, что априорные оценки имеют место. В качестве примера может служить параболическое уравнение с меняющимся направлением времени, рассмотренное в [35]. Примеры операторов L, B, для которых условие (5) не выполнено, приведены в работах [36, 37].

Теорема 6. *Пусть $f \in L_2(0,\infty;H_1')$, $\sqrt{\varphi}f_t \in L_2(0,\infty;H_1')$, $u_0^+ \in F_0^+$, выполнены условия* I–III, *$\rho_H \leq 1$ и справедливо первое из равенств* (5). *Тогда существует единственное решение $u(t)$ краевой задачи* (1), (11), *принадлежащее пространству W и такое, что*

$$\sqrt{\varphi}u_t \in L_2(0,\infty;H_1), \quad \sqrt{\varphi}\frac{d}{dt}B(t)u_t \in L_2(0,\infty;H_1').$$

Если дополнительно $\sqrt{\varphi}f \in L_2(0,\infty;E)$, $B(t) \in L_\infty(0,\infty;L(H_1,E))$, то

$$\sqrt{\varphi}u(t) \in L_2(0,\infty;D(L)) = \{v \in L_2(0,\infty;H_1) : Lv \in L_2(0,\infty;E)\}.$$

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 5.

§ 2. Вырожденный случай

В этом параграфе мы предполагаем, что операторы $B(t)$, $L(t)$ не зависят от параметра t. Вместо I, II потребуем выполнения следующих условий.

IV. *Найдется пространство H_1, плотно вложенное в E, такое, что $L \in L(H_1;H_1')$ и $B \in L(H_1,H_1')$. Оператор $B : E \to E$ самосопряжен в E; H_1 плотно вложено в $D(|B|^{1/2})$.*

V. *Для $u \in H_1$ выполнено неравенство $\operatorname{Re}(-Lu,u) \geq 0$ и найдется постоянная $\delta > 0$ такая, что*

$$\operatorname{Re}(-Lu,u) \geq \delta\|u\|_{H_1}^2$$

для всех $u \in H_1 \cap M^\perp$, где $M \subset H_1$ — некоторое конечномерное подпространство, а ортогональное дополнение берется в E. Для всех $u \in M$ справедливо равенство $\operatorname{Re}(Lu,u) = 0$.

Построим сопряженный к оператору L: $L^* : H_1 \to H_1'$. Сопряженный к оператору B совпадает с B. Отметим, что множество $\{u \in H_1 : \operatorname{Re}(Lu,u) = 0\}$ всегда является подпространством и совпадает с ядром оператора $L + L^*$. Это вытекает из неравенства Коши — Буняковского:

$$-((L+L^*)u,v) \leq (-(L+L^*)u,u)(-(L+L^*)v,v) \quad \forall u,v \in H_1,$$

и равенства $\operatorname{Re}(Lu,u) = ((L+L^*)u,u)/2$. Из неравенства Коши — Буняковского вытекает также, что

$$\operatorname{Re}(L(u+v),(u+v)) = \operatorname{Re}(Lv,v) \quad \forall u \in M,\ v \in H_1. \tag{23}$$

Говорят, что $\lambda \in \mathbb{C}$ *принадлежит резольвентному множеству* $\rho(L-\lambda B)$ *пучка* $L-\lambda B$, если оператор $L-\lambda B: H_1 \to H_1'$ ограниченно обратим. Положим $\sigma(L-\lambda B) = \mathbb{C} \setminus \rho(L-\lambda B)$. Далее считаем условия IV, V выполненными.

Лемма 4. *Пусть P — произвольный проектор в H_1 на подпространство M. Тогда найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что*

$$\mathrm{Re}(-Lu, u) \geq \delta_1 \|u\|_{H_1}^2$$

для всех $u \in R(I-P)$. Подпространства $R(L-iyB)$ и $R(L^*-iyB)$ замкнуты в H_1' для любого $y \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Покажем первое утверждение леммы. Предполагая противное, найдем последовательность $u_n \in R(I-P)$ такую, что $\|u_n\|_1 = 1$, $\mathrm{Re}(-Lu_n, u_n) \leq 1/n$. Пусть P_0 — ортопроектор в E на M. Поскольку M конечномерно и $H_1 \subset E$, то $P_0|_{H_1} \in L(H_1)$. Положим $u_{1n} = P_0 u_n$, $u_{2n} = (I-P_0)u_n$. Тогда последовательности u_{in} $(i = 1, 2)$ ограничены в H_1. В силу конечномерности M считаем, что $u_{1n} \to u_1$ по норме H_1, иначе выберем подпоследовательность. Условие V и равенство (23) гарантируют, что $\|u_{2n}\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Тем самым $u_n \to u_1$ по норме H_1 и $\|u_1\|_1 = 1$. Кроме того, $u_1 \in R(I-P)$. Это противоречит предельному равенству $\mathrm{Re}(Lu_1, u_1) = 0$, которое влечет, что $u_1 \in M$. Доказательство второй части утверждения леммы совершенно аналогично. Предполагая, что $(L-iyB)u_n \to f \in H_1'$ при $n \to \infty$, и используя проектор P_0, равенство (23) и условие V, мы показываем сходимость по норме H_1 некоторой подпоследовательности последовательности u_n. Кроме того, используем равенство $\mathrm{Re}(Lu, u) = \mathrm{Re}((L-iyB)u, u)$.

Нам понадобится дополнительное условие

$$\ker B \cap M = \{0\}. \tag{24}$$

Лемма 5. *Мнимая ось $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, за исключением конечного числа точек, принадлежит резольвентному множеству пучка $L-\lambda B$.*

Доказательство. Из (24) вытекает, что число точек λ с $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ таких, что $\ker(L-\lambda B) \neq \{0\}$, конечно. Положим $L_1 = L-\lambda B$. Пусть $\ker L_1 = \{0\}$ и $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. Покажем, что оператор L_1 имеет ограниченный обратный. В силу предыдущей леммы подпространства $R(L_1)$ и $R(L_1^*)$ замкнуты. Тогда $R(L-\lambda B) = \ker(L^*-\overline{\lambda}B)^{\perp}$. Покажем, что $\ker L_1^* = \{0\}$. Пусть $u \in \ker L_1^*$. Имеем $\mathrm{Re}(L_1^* u, u) = \mathrm{Re}(Lu, u) = 0$. Отсюда вытекает, что $u \in M = \ker(L_1 + L_1^*)$ и, значит, $L_1 u = -L_1^* u$. Следовательно, $u \in \ker L_1$ и $u = 0$. Таким образом, $R(L_1) = H_1'$. По теореме Банаха о замкнутом графике оператор L_1 ограниченно обратим.

Сформулируем аналоги теорем 4, 5 для нашего случая. Сохраняем обозначения и определения § 1, в частности, определения пространств W, F_0, F_1, и F_{-1}. Пространства G_i в данном случае совпадают с F_i $(i = 1, 0, -1)$.

Теорема 7. *Пусть $f \in L_2(0,T;H_1')$, $u_0^+ \in F_0^+$, $u_T^- \in F_0^-$, выполнены условия* IV, V, (24), $\rho_H < 1$ *и справедливо равенство*

$$(F_1, F_{-1})_{1/2,2} = F_0. \tag{25}$$

Тогда существует единственное решение краевой задачи (1), (12) *принадлежащее пространству W. Справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_W + \|u(0)\|_{F_0} + \|u(T)\|_{F_0} \leq c(\|f\|_{L_2(0,T;H_1')} + \|u_0^+\|_{F_0} + \|u_T^-\|_{F_0}),$$

где c — положительная постоянная, не зависящая от $f(t)$, u_0^+, u_T^-, $u(t)$. Если дополнительно $\sqrt{\varphi}f_t \in L_2(0,T;H_1')$, то решение обладает свойством

$$\sqrt{\varphi}u_t \in L_2(0,T;H_1), \quad \sqrt{\varphi}\frac{d}{dt}B(t)u_t \in L_2(0,T;H_1').$$

Если, кроме того, $\sqrt{\varphi}f \in L_2(0,T;E)$ и $B(t) \in L_\infty(0,T;L(H_1,E))$, то $\sqrt{\varphi}u(t) \in L_2(0,T;D(L))$, где под $D(L)$ понимаем класс $\{u \in H_1 : Lu \in E\}$.

Доказательство. Получим первую часть утверждения. Поскольку оператор $L-\varepsilon$ $(1 > \varepsilon > 0)$ удовлетворяет условиям теорем 4 и 5, существует решение u_ε задачи (1), (12), где в (1) вместо оператора L мы берем оператор $L-\varepsilon$. Далее, приблизим решение u_ε последовательностью функций $u_n \in C^\infty([0,T];H_1)$ в норме пространства W. Тогда функции I_0u_n принадлежат пространству $L_2(0,T;F_1)$, причем $I_0u_n'(t) \in L_2(0,T;F_{-1})$, и мы имеем сходимость

$$\|I_0(u_n-u_\varepsilon)\|_{L_2(0,T;F_1)} + \|I_0(u_n'-u_\varepsilon')\|_{L_2(0,T;F_{-1})} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Отсюда вытекает (см. лемму 3), что

$$\|u_n(0)-u_\varepsilon(0)\|_{F_0} \to 0, \quad \|u_n(T)-u_\varepsilon(T)\|_{F_0} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

и, таким образом, можем считать, что

$$\|E^+u_n(0)\|_{F_0} + \|E^-u_n(T)\|_{F_0} \le 2(\|u_0^+\|_{F_0} + \|u_T^-\|_{F_0}) \quad \forall n = 1,2,\dots.$$

Функции u_n удовлетворяют уравнению

$$Bu_{nt} - (L-\varepsilon I)u_n = f_n \to f \quad \text{в} \quad L_2(0,T;H_1'). \tag{26}$$

В силу условия (24) оператор I_0 отображает M на подпространство $I_0M \subset F_0$ той же размерности. Пространство H_1', как и само пространство H_1, гильбертово. По построению F_{-1} — гильбертово пространство со скалярным произведением $(u,v)_{-1} = (Bu,Bv)_{H_1'}$. Найдем в M ортонормированный относительно скалярного произведения в F_{-1} базис $\{\omega_i\}_{i=1}^N$. Оператор

$$Pu = \sum_{i=1}^N c_i(u)\omega_i$$

с $c_i(u) = (u,\omega_i)_{-1}$ является проектором в H_1 и обладает свойством $I_0PI_0 \in L(F_{-1})$. Умножим (26) скалярно (в E) на u_n и проинтегрируем полученное равенство по t от 0 до T. Интегрируя по частям и используя условие $\rho_H < 1$, лемму 4 и числовое неравенство $|ab| \le |a|^2/(2\delta) + \delta|b|^2/2$, получим оценку

$$\int_0^T \|(I-P)u_n(t)\|_1^2\,dt + \|u_n(0)\|_{F_0}^2 + \|u_n(T)\|_{F_0}^2 \\ \le c(\delta)\|f\|_{L_2(0,T;H_1')}^2 + \delta\|u_n\|_{L_2(0,T;H_1)}^2 + c_1\big(\|u_0^+\|_{F_0}^2 + \|u_T^-\|_{F_0}^2\big), \tag{27}$$

где постоянная $\delta > 0$ может быть выбрана произвольно, а оставшиеся постоянные не зависят от n, ε. Из равенства (26) получим неравенство

$$\|e^{-\gamma t}Bu_{nt}\|_{L_2(0,T;H_1')}^2 \le c_2\big(\|e^{-\gamma t}u_n\|_{L_2(0,T;H_1)}^2 + \|e^{-\gamma t}f_n\|_{L_2(0,T;H_1')}\big),$$

где γ — некоторая положительная постоянная, которую мы выберем позднее, а постоянная c_2 не зависит от γ, n, ε. Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&\|e^{-\gamma t}Bu_{nt}\|^2_{L_2(0,T;H_1')}+\|e^{-\gamma t}u_n\|^2_{L_2(0,T;H_1)}+\|u_n(0)\|^2_{F_0}+\|u_n(T)\|^2_{F_0}\\&\le(c_2+1)\big(\|e^{-\gamma t}u_n\|^2_{L_2(0,T;H_1)}+\|u_n(0)\|^2_{F_0}+\|u_n(T)\|^2_{F_0}+c_2\|e^{-\gamma t}f_n\|^2_{L_2(0,T;H_1')}\big).\end{aligned}\tag{28}$$

Ортогональность оператора P в пространстве F_{-1} и ортогональность ω_i влечет оценку

$$\begin{aligned}\|e^{-\gamma t}Bu_{nt}\|^2_{L_2(0,T;H_1')}&\ge\frac12\|e^{-\gamma t}Bu_{nt}\|^2_{L_2(0,T;H_1')}+\frac12\|e^{-\gamma t}BPu_{nt}\|^2_{L_2(0,T;H_1')}\\&\ge\frac12\|e^{-\gamma t}Bu_{nt}\|^2_{L_2(0,T;H_1')}+\frac12\sum_{i=1}^N\int_0^T e^{-2\gamma t}|c_i'(u_n)|^2(t)\,dt.\end{aligned}$$

Воспользовавшись этим неравенством, перепишем (28) в виде

$$\begin{aligned}\|e^{-\gamma t}Bu_{nt}\|^2_{L_2(0,T;H_1')}&+\sum_{i=1}^N\int_0^T e^{-2\gamma t}|c_i'(u_n)|^2(t)\,dt\\&+\|e^{-\gamma t}u_n\|^2_{L_2(0,T;H_1)}+\|u_n(0)\|^2_{F_0}+\|u_n(T)\|^2_{F_0}\\&\le c_3\big(\|(I-P)u_n\|^2_{L_2(0,T;H_1)}+\|u_n(0)\|^2_{F_0}+\|u_n(T)\|^2_{F_0}\big)\\&\quad+c_4\|e^{-\gamma t}f_n\|^2_{L_2(0,T;H_1')}+c_5\sum_{i=1}^N\int_0^T e^{-2\gamma t}|c_i(u_n)|^2(t)\,dt,\end{aligned}\tag{29}$$

где все постоянные не зависят от γ, n, ε. Из формулы Ньютона — Лейбница легко можно получить оценку

$$\int_0^T e^{-2\gamma t}|c(t)|^2\,dt\le\frac{2T}{\gamma}\int_0^T e^{-2\gamma t}|c'(t)|^2\,dt+\frac{2}{\gamma}|c(0)|^2,\quad c(t)\in W_2^1(0,T).$$

Подставляя это неравенство, записанное для функций c_i, в правую часть неравенства (29) и выбирая параметр γ достаточно большим ($2Tc_5/\gamma<1$), переносим последнее слагаемое в (29) в левую часть неравенства. Усиливая его, придем к неравенству

$$\begin{aligned}&\|e^{-\gamma t}Bu_{nt}\|^2_{L_2(0,T;H_1')}+\|e^{-\gamma t}u_n\|^2_{L_2(0,T;H_1)}+\|u_n(0)\|^2_{F_0}+\|u_n(T)\|^2_{F_0}\\&\le c_3\big(\|(I-P)u_n\|^2_{L_2(0,T;H_1)}+c_6\|u_n(0)\|^2_{F_0}+\|u_n(T)\|^2_{F_0}\big)+c_4\|e^{-\gamma t}f_n\|^2_{L_2(0,T;H_1')}.\end{aligned}$$

Воспользовавшись (27) в правой части этого неравенства и выбирая параметр δ достаточно малым, придем к оценке

$$\|u_n\|^2_W+\|u_n(0)\|^2_{F_0}+\|u_n(T)\|^2_{F_0}\le c\big(\|f_n\|^2_{L_2(0,T;H_1')}+\|u_0^+\|^2_{F_0}+\|u_T^-\|^2_{F_0}\big),\tag{30}$$

где постоянная c не зависит от ε, n. Оценка (30) позволяет осуществить предельный переход в (26) и показать существование решения. Вторая часть утверждения доказывается аналогично. Мы используем теорему 5, приближаем решение u_ε функциями $u_n\in C^\infty([0,T];H_1)$ в норме пространства $\widetilde W$ и получаем априорные оценки с постоянными, не зависящими от ε. Весовую оценку находим с помощью дифференцирования уравнения по t, оценки (30) и использования тех же рассуждений, что были использованы при получении (30) для u_n, применительно к u_{nt}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barbu V., Favini A.* Periodic solutions for degenerate differential equations // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 1996. V. 28. P. 29–57.

2. *Lagnuese J. E.* Singular differential equations in Hilbert space // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4, N 4. P. 623–637.

3. *Зубова С. П., Чернышев К. И.* О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при старшей производной // Дифференц. уравнения и их применения. 1976. Т. 14. С. 21–39.

4. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 11. С. 1996–2010.

5. *Радбель Н. И.* О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = 0$ // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 6. С. 1142–1143.

6. *Сидоров Н. А., Фалалеев М. В.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при старших производных // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1516–1526.

7. *Мельникова И. В., Альшанский М. А.* Корректность вырожденной задачи Коши в банаховом пространстве // Докл. РАН. 1994. Т. 336, № 1. С. 17–20.

8. *Favini A.* Sobolev type equations // Partial Diff. Equations. Warzava: Banach Center Publ., 1992. V. 27. P. 101–109.

9. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.

10. *Свиридюк Г. А.* Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, № 5. С. 216–237.

11. *Свиридюк Г. А., Федоров В. Е.* Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1130–1145.

12. *Сукачева Т. Г.* Задача Коши для полулинейного нестационарного уравнения типа Соболева // Успехи мат. наук. 1995. V. 50, N 4. P. 143.

13. *Favini A, Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. New York: Marcel Dekker, 1999. (Pure Appl. Math.; 215).

14. *Greenberg W., Van der Mee C. V. M., Zweifel P. F.* Generalized kinetic equations // Integral Equations. Operator Theory. 1984. V. 7, N 1. P. 60–95.

15. *Greenberg W., Van der Mee C. V. M., Protopopescu V.* Boundary value problems in abstract kinetic theory. Basel: Birkhäuser, 1987.

16. *Beals R.* An abstract treatment of some forward-backward problems of transport and scattering // J. Funct. Anal. 1979. V. 34, N 1. P. 1–20.

17. *Van der Mee C. V. M.* Semigroups and factorization methods in transport theory. Amsterdam: Math. Centre Tract., 1981. N 146.

18. *Kaper H. G., Lekkerkerker C. G., Heitmanek J.* Spectral methods in linear transport theory. Basel; Boston; Stuttgart: Birkhauser Verl., 1982.

19. *Case K. M., Zweifel P. F.* Linear transport theory. Mass.: Addison-Wesley, 1969.

20. *Cercignani C.* Mathematical methods in kinetic theory. New York: Pergamon Press, 1969.

21. *Latrach K., Mokhtar-Kharroubi M.* Spectral analysis and generation results for streaming operator with multiplying boundary conditions // Positivity. 1999. V. 3, N 2. P. 273–296.

22. *Webb G.* A model of proliferating cell population with inherited cycle length // J. Math. Biol. 1986. V. 23. P. 269–282.

23. *Latrach K., Mokhtar-Kharroubi M.* On an unbounded linear operator arizing in the theory of growing cell population // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 211. P. 273–294.

24. *Latrach K.* Compactness properties for linear transport operator with abstract boundary conditions in slab geometry // Transp. Theory Stat. Phys. 1993. V. 22. P. 39–65.

25. *Кислов Н. В.* Неоднородные краевые задачи для дифференциально-операторного уравнения смешанного типа и их приложения // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 1. С. 19–37.

26. *Пятков С. Г.* Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск. 1986. С. 65–84.

27. *Egorov I. E.* On smoothness of a solution to a nonlocal boundary value problem for an operator-differential equation with variable time direction // Мат. заметки ЯГУ. 1995. Т. 2, № 1. С. 98–104.

28. *Egorov I. E.* Solvability of a nonlocal boundary value problem for an operator-differential equation of mixed type // Мат. заметки ЯГУ. 1995. Т. 2, № 2. С. 61–72.
29. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
30. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
31. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
32. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.
33. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
34. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 2. С. 43–118.
35. *Пятков С. Г.* О разрешимости одной краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 6. С. 1322–1327.
36. *Пятков С. Г.* О некоторых свойствах собственных функций линейных пучков // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 141–148.
37. *Abasheeva N. L., Pyatkov S. G.* Counterexamples in indefinite Sturm — Liouville problems // Siberian Adv. Math. 1997. V. 7, N 4. P. 1–8.

Статья поступила 18 февраля 2000 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН