Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.977.1

ГРАНИЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

О. Ю. Эмануилов

Аннотация: Изучаются вопросы существования решения задач точной управляемости линейными гиперболическими уравнениями второго порядка. Управление находится в граничных условиях и распределено по части границы области. При условии существования функции $\varphi(x)$, поверхности уровня которой псевдовыпуклы относительно бихарактеристик гиперболического оператора, доказана разрешимость задачи точной управляемости. Библиогр. 14.

Работа посвящена изучению задачи точной управляемости линейным гиперболическим уравнением второго порядка в случае, когда управление находится в граничных условиях и распределено по части границы. В работах Ж. Л. Лионса [1–3] был разработан метод «единственности Гильберта» сводящий вопрос о разрешимости задачи точной управляемости линейным гиперболическим уравнением к доказательству наблюдаемости сопряженного ему гиперболического уравнения. В [4, 5] для доказательства наблюдаемости были применены теоремы о распространении особенностей и приведены условия типа неловушечности, близкие к необходимым, при которых задача управляемости имеет решение. Однако использование теоремы о распространении особенностей требует C^∞-гладкости коэффициентов гиперболического оператора и части границы, что является существенным ограничением в прикладных задачах. В большинстве работ (см. [1–3, 6, 7]) доказательство наблюдаемости гиперболического оператора проводилось на основе энергетических неравенств, что не требовало большой гладкости. Значительным недостатком этих методов является то, что на коэффициенты гиперболического уравнения при производных ниже второго порядка накладывались помимо требований гладкости дополнительные ограничения (в [4, 5] показано, что в общем случае разрешимость задачи точной управляемости определяется главной частью гиперболического оператора.) Для преодоления этого недостатка в настоящей работе предложен более мощный метод, основанный на априорных оценках карлемановского типа. Достаточные условия разрешимости задачи управляемости нами формулируются в терминах существования функции $\phi(x_1, \dots, x_n)$, поверхности уровня которой псевдовыпуклы относительно бихарактеристик гиперболического оператора (см. [8, с. 272]). В качестве примера известные результаты по разрешимости задачи точной граничной управляемости для волнового уравнения распространены на произвольный гиперболический оператор, у которого главная часть совпадает с волновым оператором.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного Научного фонда (грант N M76000).

С момента представления данной работы опубликован ряд интересных статей по данной тематике. Прежде всего отметим [9], где введен метод «карлемановских множителей», а также работу [10], где карлемановские оценки применены для исследования задачи точной управляемости абстрактным эволюционным уравнением с управлением, распределенным по всей границе. Новый метод исследования задач точной граничной управляемости, основанный на методах дифференциальной геометрии, предложен в [9]. В [11] решение задачи точной управляемости строится непосредственно, без сведения ее к задаче наблюдаемости.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная ограниченная область, $\Gamma = \partial\Omega \in C^2$, а Γ_0 — произвольная подобласть в Γ и $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$. Обозначим через $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ внешнюю единичную нормаль к $\partial\Omega$. Положим $Q_T =]0,T[\times\Omega$, $\Sigma_T =]0,T[\times\Gamma$, $\Sigma_T^0 =]0,T[\times\Gamma_0$, $\Sigma_T^1 =]0,T[\times\Gamma_1$, $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\zeta = (\zeta_0, \zeta') = (\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$. Введем следующие пространства:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u(x),\ x \in \Omega : u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, \dots, n \right\}$$

с нормой $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum\limits_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$H_0^1(\Omega) = \text{замыкание } C_0^\infty(\Omega) \text{ в норме } H^1(\Omega),$$

$H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$ с нормой $\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\limits_{w \in H_0^1(\Omega)} \frac{(u,w)_{L^2(\Omega)}}{\|w\|_{H^1(\Omega)}}$,

$$X_T = \left\{ z(x),\ x \in Q_T : \frac{\partial z}{\partial x_0} \in C(0,T; L^2(\Omega)),\ z \in C(0,T; H^1(\Omega)) \right\}$$

с нормой $\|z\|_{X_T} = \|z\|_{C(0,T;H^1(\Omega))} + \left\|\frac{\partial z}{\partial x_0}\right\|_{C(0,T;L^2(\Omega))}$,

$$Y_T = \left\{ z(x)\ x \in Q_T : \frac{\partial z}{\partial x_0} \in C(0,T; H^{-1}(\Omega)), z \in C(0,T; L^2(\Omega)) \right\}$$

с нормой $\|z\|_{Y_T} = \|z\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} + \left\|\frac{\partial z}{\partial x_0}\right\|_{C(0,T;H^{-1}(\Omega))}$.

Пусть функция $y(x_0, x')$, описывающая состояние управляемой системы, удовлетворяет краевой задаче

$$Py = \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x')\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x')y) + c_1(x')y = g \text{ в } Q_T, \quad (1)$$

$$y|_{\Sigma_T^1} = 0, \quad y|_{\Sigma_T^0} = u, \quad (2)$$

$$y(0,x') = v_0(x'), \quad \frac{\partial y}{\partial x_0}(0,x') = v_1(x'), \quad (3)$$

где функции v_0, v_1, g заданы, а управлением является функция u. Изучаемая нами задача точной управляемости состоит в следующем. Пусть заданы функции v_2, v_3. Требуется выбрать управление u так, чтобы в момент времени T выполнялось равенство

$$y(T,x') = v_2(x'), \quad \frac{\partial y}{\partial x_0}(T,x') = v_3(x'). \quad (4)$$

Предполагается, что коэффициенты оператора P удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad b_i \in L^\infty(\Omega), \quad c_1 \in L^\infty(\Omega), \tag{5}$$

$i, j = 1, \dots, n$, и существует константа $\beta > 0$ такая, что

$$a(x', \zeta, \zeta) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x')\zeta_i\zeta_j \geq \beta|\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n, \ x' \in \Omega. \tag{6}$$

Относительно гладкости коэффициентов a_{ij} предположим, что либо

$$a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{7}$$

либо

$$a_{ij}(x') = c(x')\hat{a}_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n; \ \hat{a}_{ij} \in \mathbb{R}^1, \quad c(x') \text{ — липшицева функция.} \tag{8}$$

Для любых двух гладких функций $\phi(x, \zeta), \psi(x, \zeta)$ определим скобку Пуассона по формуле

$$\{\phi, \psi\} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial \phi}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_i} \right).$$

Через $p(x, \zeta)$ обозначим главный символ оператора P:

$$p(x, \zeta) = \zeta_0^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x')\zeta_i\zeta_j.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$P^* z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x') \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=0}^n b_i(x') \frac{\partial z}{\partial x_i} + c_1(x')z = 0 \text{ в } Q_T, \tag{9}$$

$$z|_{\Sigma_T} = 0, \quad z(0, x') = z_0(x'), \quad \frac{\partial z}{\partial x_0}(0, x') = z_1(x'). \tag{10}$$

Следующая теорема доказана в [12, 13].

Теорема 1. *Пусть выполнены* (5), (6) *и одно из условий* (7), (8). *Тогда для любых* $z_0 \in H_0^1(\Omega)$, $z_1 \in L^2(\Omega)$ *существует и единственно решение задачи* (9), (10) $z \in X_T$ *и имеет место оценка*

$$\|z\|_{X_T} + \left\| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma_T)} \leq C_1(\|z_0\|_{H^1(\Omega)} + \|z_1\|_{L^2(\Omega)}). \tag{11}$$

Предположим, что выполнено

Условие 1. *Существует функция* $\phi_0(x') \in C^2(\overline{\Omega})$ *такая, что*

$$\{a(x', \zeta', \zeta'), \{a(x', \zeta', \zeta'), \phi_0(x')\}\} < \beta' < 0 \ \forall x' \in \overline{\Omega}, \ \zeta' \in \mathbb{R}^n \setminus 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \zeta_i} a(x', \zeta) \frac{\partial \phi_0}{\partial x_i} = 0$$

и справедливо включение

$$\Gamma_0 \supset \{x' \in \Gamma \mid a(x', \nu, \nabla \phi_0(x')) < 0\}.$$

Условие 1 предполагает некоторую дифференцируемость коэффициентов a_{ij}, в то время как (8) гарантирует лишь их липшицевость. Для преодоления этой трудности введем

Условие 2. *Существуют последовательность $a^{\varepsilon}_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая (6), и функция $\phi_0(x') \in C^2(\overline{\Omega})$ такие, что*

$$a^{\varepsilon}_{ij}(x) \to a_{ij}(x) \quad \text{в } C(\overline{\Omega}), \quad \|a^{\varepsilon}_{ij}\|_{C^1(\overline{\Omega})} \le C \quad \forall \varepsilon \in (0,1)$$

и для билинейной формы $a^{\varepsilon}(x', \zeta, \zeta)$ выполнено условие 1 с константой β', не зависящей от ε.

Теорема 2. *Предположим, что $z_0 \in H^1_0(\Omega)$, $z_1 \in L^2(\Omega)$ и выполнены условия (5), (6). Кроме того, пусть выполнено либо (7) и условие 1, либо (8) и условие 2. Тогда найдется константа T_0 такая, что при $T \ge T_0$ для решений задачи (9), (10) справедлива оценка*

$$\|z\|_{X_T} \le c_2(T) \left\| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma^0_T)}. \tag{12}$$

Доказательство. Положим $\phi(x) = \frac{\varepsilon}{T}(x_0 - T/2)^2 + \phi_0(x')$, где $\phi_0(x')$ — функция из условия 1. Значения параметров $\varepsilon \in (0,1)$ и $T > 0$ будут определены ниже.

Следуя [8], введем обозначения

$$P^{(j)}(x,\zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta_j} p(x,\zeta), \quad P^{(j,k)}(x,\zeta) = \frac{\partial^2}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} p(x,\zeta), \quad P_j(x,\zeta) = \frac{\partial}{\partial x_j} p(x,\zeta).$$

Положим

$$q(x) = -c_1(x')z + \sum_{i=0}^{n} b_i(x') \frac{\partial z}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x') \frac{\partial z}{\partial x_j}.$$

В силу (9) справедливо равенство

$$Lz = \frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x') \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = q \quad \text{в } Q_T. \tag{13}$$

Обозначим $u(x) = z(x)e^{-s\phi}$, $q_s(x) = qe^{-s\phi}$. Из (13) следует, что

$$\Psi u = e^{-s\phi} L e^{s\phi} u = e^{-s\phi} Lz = q_s \text{ в } Q_T. \tag{14}$$

Легко видеть, что

$$\Psi u = Lu + L_1 u = g_s \quad \text{в } Q_T, \quad u|_{\Sigma_T} = 0, \tag{15}$$

где

$$L_1 u = \sum_{i=0}^{n} s\phi_{x_i} P^{(i)}(x, \nabla u),$$

$$g_s(x) = q_s + \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(s^2 \phi_{x_i}\phi_{x_j} + s\phi_{x_i x_j}) - s\phi_{x_0 x_0} - s^2 \phi^2_{x_0} \right) u.$$

Беря L_2-норму правой и левой частей равенства (15), имеем

$$\|g_s\|^2_{L^2(Q_T)} = \|Lu\|^2_{L^2(Q_T)} + \|L_1 u\|^2_{L^2(Q_T)} + 2(L_1 u, Lu)_{L^2(Q_T)}. \tag{16}$$

Преобразуем последний член, входящий в правую часть равенства (16).

Лемма. *Пусть функция $u \in X_T$ является решением задачи (15). Тогда скалярное произведение $(L_1u, Lu)_{L^2(Q_T)}$ может быть записано в виде*

$$(L_1u, Lu)_{L^2(Q_T)} = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \sum_{i=0}^{n} s\phi_{x_i} P^{(i)}(x, \nabla u) - s\phi_{x_0} p(x, \nabla u) \right) dx' \bigg|_0^T$$
$$+ s \int\limits_{\Sigma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 a(x', \nu, \nu) a(x, \nu, \nabla \phi) \, d\Sigma$$
$$- \frac{s}{2} \int\limits_{Q_T} \left(\{p, \{p, \phi\}\}(x, \nabla u) + \sum_{k,i=0}^{n} P_k^{(k)}(x, \nabla u) \phi_{x_i} P^{(i)}(x, \nabla u) - \theta p(x, \nabla u) \right) dx, \tag{17}$$

где

$$\theta(x) = \sum_{l,m=0}^{n} (\phi_{x_l x_m} P^{(l,m)}(x, \nabla u) + \phi_{x_l} P_m^{(l,m)}(x, \nabla u))$$

(функция θ не зависит от u).

Доказательство. Заметим, что поскольку $u|_{\Sigma_T} = 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg|_{\Sigma_T} = \nu_i \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \forall\, i = 1, \dots, n. \tag{18}$$

Интегрируя по частям по x, с учетом (18) имеем

$$(L_1u, Lu)_{L^2(Q_T)} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_0} \sum_{i=0}^{n} s\phi_{x_i} P^{(i)}(x, \nabla u) \, dx' \bigg|_0^T$$
$$+ 2s \int\limits_{\Sigma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 a(x', \nu, \nu) a(x', \nu, \nabla \phi) d\Sigma - \frac{s}{2} \int\limits_{Q_T} \sum_{k,i=0}^{n} \Bigg(P^{(k)}(x, \nabla u) \bigg\{ \phi_{x_i x_k} P^{(i)}(x, \nabla u)$$
$$+ \phi_{x_i} \left(P_k^{(i)}(x, \nabla u) + P^{(i)}\left(x, \nabla \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right) \bigg\} + \phi_{x_i} P_k^{(k)}(x, \nabla u) P^{(i)}(x, \nabla u) \Bigg) dx. \tag{19}$$

Покажем, что справедливо тождество

$$\sum_{k,i=0}^{n} P^{(k)}(x, \nabla u) \phi_{x_i} P^{(i)}\left(x, \nabla \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$$
$$= \sum_{k,i=0}^{n} \phi_{x_k} P^{(k,i)}(x, \nabla u) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} p(x, \nabla u) - P_i(x, \nabla u) \right\}. \tag{20}$$

Действительно,

$$\sum_{k,i=0}^{n} P^{(k)}(x, \nabla u) \phi_{x_i} P^{(i)}\left(x, \nabla \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \sum_{k,i=0}^{n} 4\phi_{x_i} \sum_{l,j=0}^{n} a_{jk} a_{il} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}$$
$$= \sum_{l,i=0}^{n} 4\phi_{x_i} a_{il} \sum_{k,j=0}^{n} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{i,l=0}^{n} 2\phi_{x_i} a_{il} \sum_{k,j=0}^{n} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$
$$= \sum_{l,i=0}^{n} \phi_{x_i} P^{(i,l)}(x, \nabla u) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} p(x, \nabla u) - P_l(x, \nabla u) \right)$$

$$= \sum_{k,i=0}^{n} \phi_{x_i} P^{(i,k)}(x,\nabla u)\left(\frac{\partial}{\partial x_k} p(x,\nabla u) - P_k(x,\nabla u)\right).$$

Преобразуем (19) с помощью (20). В результате имеем

$$(L_1 u, Lu)_{L^2(Q_T)} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_0} \sum_{i=0}^{n} s\phi_{x_i} P^{(i)}(x,\nabla u)\, dx' \Big|_0^T$$

$$+ 2s \int\limits_{\Sigma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x',\nu,\nu) a(x',\nu,\nabla\phi)\, d\Sigma - \frac{s}{2} \int\limits_{Q_T} \Bigg\{ \sum_{k,i=0}^{n} P^{(k)}(x,\nabla u)\big[\phi_{x_i x_k} P^{(i)}(x,\nabla u)$$

$$+ \phi_{x_i} P_k^{(i)}(x,\nabla u)\big] + \sum_{k,i=0}^{n} \phi_{x_i} P^{(i,k)}(x,\nabla u)\left(\frac{\partial}{\partial x_k} p(x,\nabla u) - P_k(x,\nabla u)\right)$$

$$+ \sum_{k,i=0}^{n} \phi_{x_i} P_k^{(k)}(x,\nabla u) P^{(i)}(x,\nabla u)\Bigg\}\, dx. \quad (21)$$

Проинтегрировав в (21) по частям по x, получаем равенство

$$(L_1 u, Lu)_{L^2(Q_T)} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_0} \sum_{i=0}^{n} s\phi_{x_i} P^{(i)}(x,\nabla u)\, dx' \Big|_0^T$$

$$- s \int\limits_{\Omega} \phi_{x_0} p(x,\nabla u)\, dx' \Big|_0^T + s \int\limits_{\Sigma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x',\nu,\nu) a(x',\nu,\nabla\phi)\, d\Sigma$$

$$- \frac{s}{2} \int\limits_{Q_T} \sum_{k,i=0}^{n} \big(P^{(k)}(x,\nabla u)\big[\phi_{x_i x_k} P^{(i)}(x,\nabla u) + \phi_{x_i} P_k^{(i)}(x,\nabla u)\big]$$

$$- \phi_{x_i} P^{(i,k)}(x,\nabla u) P_k(x,\nabla u) - \big(\phi_{x_i x_k} P^{(i,k)}(x,\nabla u) + \phi_{x_i} P_k^{(i,k)}(x,\nabla u)\big) p(x,\nabla u)$$

$$+ \phi_{x_i} P_k^{(k)}(x,\nabla u) P^{(i)}(x,\nabla u)\big)\, dx. \quad (22)$$

Путем дифференцирования несложно установить справедливость тождества

$$\{p,\{p,\phi\}\}(x,\nabla u) = \sum_{i,k=0}^{n} \big(P^{(k)}(x,\nabla u)\big[P^{(i)}(x,\nabla u)\phi_{x_i x_k} + P_k^{(i)}(x,\nabla u)\phi_{x_i}\big]$$

$$- \phi_{x_k} P^{(k,i)}(x,\nabla u) P_i(x,\nabla u)\big). \quad (23)$$

С учетом (23) формулу (22) можно записать в виде

$$(L_1 u, Lu)_{L^2(Q_T)} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_0} \sum_{i=0}^{n} s\phi_{x_i} P^{(i)}(x,\nabla u)\, dx' \Big|_0^T - s \int\limits_{\Omega} \phi_{x_0} p(x,\nabla u)\, dx' \Big|_0^T$$

$$+ s \int\limits_{\Sigma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x',\nu,\nu) a(x',\nu,\nabla\phi)\, d\Sigma$$

$$- \frac{s}{2} \int\limits_{Q_T} \Bigg(\{p,\{p,\phi\}\}(x,\nabla u) - \sum_{k,i=0}^{n} \big(\phi_{x_i x_k} P^{(i,k)}(x,\nabla u) + \phi_{x_i} P_k^{(i,k)}(x,\nabla u)\big) p(x,\nabla u)$$

$$+ \sum_{k,i=0}^{n} P_k^{(k)}(x,\nabla u)\phi_{x_i} P^{(i)}(x,\nabla u)\Bigg)\, dx.$$

Таким образом, тождество (17) доказано.

Продолжим доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим случай, когда выполнены (7) и условие 1. Обозначим

$$A_1 = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_0} \sum_{i=0}^{n} s\phi_{x_i} P^{(i)}(x, \nabla u)\, dx' \bigg|_0^T - s \int\limits_{\Omega} \phi_{x_0} p(x, \nabla u)\, dx' \bigg|_0^T .$$

В силу (16), (17) для любых $s \geq 2$ справедливо неравенство

$$\|g_s\|^2_{L^2(Q_T)} \geq \|L_1 u\|^2_{L^2(Q_T)} + 2A_1 + 2s \int\limits_{\Sigma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x', \nu, \nu) a(x', \nu, \nabla\phi)\, d\Sigma$$

$$- s \int\limits_{Q_T} (\{p, \{p, \phi\}\}(x, \nabla u) - \theta p(x, \nabla u))\, dx - \|L_1 u\|_{L^2(Q_T)} \left\| \sum_{k=0}^{n} P_k^{(k)}(x, \nabla u) \right\|_{L^2(Q_T)}$$

$$\geq \frac{1}{2}\|L_1 u\|^2_{L^2(Q_T)} + 2A_1 + 2s \int\limits_{\Sigma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x', \nu, \nu) a(x', \nu, \nabla\phi)\, d\Sigma$$

$$- \int\limits_{Q_T} s(\{p, \{p, \phi\}\}(x, \nabla u) - \theta p(x, \nabla u))\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{k=0}^{n} P_k^{(k)}(x, \nabla u) \right)^2 dx. \quad (24)$$

Согласно выбору функции ϕ скобку Пуассона $\{p, \{p, \phi\}\}$ можно записать в следующем виде:

$$\{p, \{p, \phi\}\}(x, \nabla u) = \frac{8\varepsilon}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \{p, \{p, \phi_0\}\}(x, \nabla u)$$

$$= \frac{8\varepsilon}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \{a(x', \nabla u, \nabla u), \{a(x', \nabla u, \nabla u), \phi_0\}\}. \quad (25)$$

Напомним, что из условия 1 следует существование констант $\mu > 0$ и $C_4 > 0$ таких, что

$$C_4 \left(\sum_{i=1}^{n} \phi_{0x_i} P^{(i)}(x, \zeta) \right)^2 - \{a, \{a, \phi_0\}\}(x, \zeta) \geq \mu a(x', \zeta, \zeta) \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (26)$$

В силу (24)–(26) для любого $s > 2$ имеем

$$\|g\|^2_{L^2(Q_T)} \geq \frac{1}{2}\|L_1 u\|^2_{L^2(Q_T)} + 2A_1 + 2s \int\limits_{\Sigma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x', \nu, \nu) a(x', \nu, \nabla\phi)\, d\Sigma$$

$$+ \int\limits_{Q_T} s\theta p(x, \nabla u) dx + \int\limits_{Q_T} \Bigg(s\mu a(x', \nabla u, \nabla u) - \frac{8\varepsilon s}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2$$

$$- \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} P_k^{(k)}(x, \nabla u) \right)^2 - C_4 s \left(\sum_{i=1}^{n} \phi_{0x_i} P^{(i)}(x, \nabla u) \right)^2 \Bigg) dx. \quad (27)$$

Поскольку функция θ непрерывна, найдется функция $\theta_1 \in C^\infty(\overline{Q}_T)$ такая, что

$$\|\theta - \theta_1\|_{C(\overline{Q_T})} \leq \frac{\mu}{120}. \quad (28)$$

Пусть $\varepsilon \in \left(0, \frac{T\mu}{80}\right)$. Умножим (15) на $s\left(\frac{11\mu}{20} - \theta_1\right)u$ скалярно в $L^2(Q_T)$. Интегрируя по частям по x, получаем

$$s \int\limits_{Q_T} \left(\frac{11\mu}{20} - \theta_1\right) p(x, \nabla u)\, dx + A_2 = 0, \tag{29}$$

где

$$A_2 = -s \int\limits_{\Omega} \left(\frac{11\mu}{20} - \theta_1\right) u \frac{\partial u}{\partial x_0}\, dx' \bigg|_0^T - s \int\limits_{Q_T} \Bigg(\left(\frac{11\mu}{20} - \theta_1\right) u L_1 u + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial(\theta_1 a_{ij})}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} u - g_s \left(\frac{11\mu}{20} - \theta_1\right) u \Bigg)\, dx.$$

Легко видеть, что

$$|A_2| \le \frac{1}{4s} \|L_1 u\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{\mu}{100} \int\limits_{Q_T} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + a(x', \nabla u, \nabla u) \right) dx + sC_5 \left(s^4 \int\limits_{Q_T} u^2\, dx + \left| \int\limits_{\Omega} \left(\frac{11\mu}{20} - \theta_1\right) u \frac{\partial u}{\partial x_0}\, dx' \bigg|_0^T \right| \right) + \|g_s\|^2_{L^2(Q_T)}. \tag{30}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} 4C_4 \int\limits_{Q_T} \frac{\varepsilon}{T} \left| \left(x_0 - \frac{T}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x_0} \sum_{k=1}^{n} \phi_{0x_k} P^{(k)}(x, \nabla u) \right| dx &\le \varepsilon C_6 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_0} \right\|_{L^2(Q_T)} \left(\int\limits_{Q_T} a(x', \nabla u, \nabla u)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C_6 \varepsilon \int\limits_{Q_T} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + a(x', \nabla u, \nabla u) \right) dx, \end{aligned} \tag{31}$$

где константа C_6 не зависит от ε, T.

Прибавляя к правой части неравенства (27) левую часть равенства (29), имеем

$$\begin{aligned} \|g\|^2_{L^2(Q_T)} \ge \frac{1}{8} \|L_1 u\|^2_{L^2(Q_T)} + 2A_1 + A_2 + 2s \int\limits_{\Sigma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x', \nu, \nu) a(x', \nu, \nabla \phi)\, d\Sigma \\ + \int\limits_{Q_T} \Bigg\{ \frac{9s\mu}{20} \left(a(x', \nabla u, \nabla u) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 \right) + C_4 s \Bigg(\left(\sum_{k=0}^{n} \phi_{x_k} P^{(k)}(x, \nabla u) \right)^2 \\ - \left(\sum_{k=1}^{n} \phi_{x_k} P^{(k)}(x, \nabla u) \right)^2 \Bigg) + s(\theta - \theta_1) p(x, \nabla u) \Bigg\} dx. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (28), получаем

$$\|g\|^2_{L^2(Q_T)} \ge \frac{1}{8}\|L_1 u\|^2_{L^2(Q_T)} + 2A_1 + A_2 + 2s\int\limits_{\Sigma_T}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x',\nu,\nu)a(x',\nu,\nabla\phi)\,d\Sigma$$
$$+\int\limits_{Q_T}\left\{\frac{2s\mu}{5}\left(a(x',\nabla u,\nabla u)+\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2\right)+4sC_4\left(\frac{\varepsilon}{T}\left(x_0-\frac{T}{2}\right)\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{4s\varepsilon C_4}{T}(x_0-T/2)\frac{\partial u}{\partial x_0}\sum_{k=1}^n \phi_{0x_k}P^{(k)}(x,\nabla u)\right\}dx \quad \forall s>s_0. \tag{32}$$

Выберем ε из интервала $(0,\min\{1,\frac{T\mu}{80},\mu/(C_6 10)\})$. Используя оценку (31) в неравенстве (32), получаем, что для любого $s>s_0$

$$\int\limits_{Q_T} s\frac{\mu}{10}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + a(x',\nabla u,\nabla u)\right)dx + 2s\int\limits_{\Sigma_T}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x',\nu,\nu)a(x',\nu,\nabla\phi)\,d\Sigma$$
$$+\frac{1}{8}\|L_1 u\|^2_{L^2(Q_T)} \le C_8\left(|A_1|+|A_2|+s^4\int\limits_{Q_T}u^2\,dx\right). \tag{33}$$

В силу (30), (33) существует константа $s_1>1$ такая, что

$$\int\limits_{Q_T}\frac{1}{20}s\mu\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + a(x',\nabla u,\nabla u)\right)dx + 2s\int\limits_{\Sigma_T}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x',\nu,\nu)a(x',\nu,\nabla\phi)\,d\Sigma$$
$$\le C_9\left(s(T+1)\int\limits_{\Omega}(|\nabla u(T,x')|^2+|\nabla u(0,x')|^2\right.$$
$$\left.+|u(T,x')|^2+|u(0,x')|^2)\,dx' + s^5\int\limits_{Q_T}u^2\,dx\right) \quad \forall s\ge s_1. \tag{34}$$

Переходя в (34) от переменной u к z, получаем

$$\int\limits_{Q_T}\frac{1}{20}s\mu\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)^2 + a(x',\nabla z,\nabla z)\right)e^{-2s\phi}\,dx$$
$$+2s\int\limits_{\Sigma_T}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2 a(x',\nu,\nu)a(x',\nu,\nabla\phi)e^{-2s\phi}\,d\Sigma$$
$$\le C_9\left(s(T+1)\int\limits_{\Omega}(|\nabla z(T,x')|^2+|\nabla z(0,x')|^2+s^2|z(T,x')|^2\right.$$
$$\left.+s^2|z(0,x')|^2)e^{-2s\phi(T,x')}\,dx' + s^5\int\limits_{Q_T}z^2e^{-2s\phi}\,dx\right) \quad \forall s\ge s_2. \tag{35}$$

Выберем параметр $T>1$ таким, что

$$\gamma = \min_{x'\in\overline{\Omega}}\phi(T,x') > \beta = \max_{x\in[T/4,3T/4]\times\overline{\Omega}}\phi(x).$$

Тогда в силу (11) найдется константа s_3 такая, что для любых $s \geq s_3$ справедлива цепочка неравенств

$$\int\limits_{[T/4,3T/4]\times\Omega} \frac{1}{40} s\mu\biggl(\Bigl(\frac{\partial z}{\partial x_0}\Bigr)^2 + a(x', \nabla z, \nabla z)\biggr) e^{-2s\phi}\, dx$$

$$\geq \int\limits_{[T/4,3T/4]\times\Omega} \frac{1}{40} s\mu\biggl(\Bigl(\frac{\partial z}{\partial x_0}\Bigr)^2 + a(x', \nabla z, \nabla z)\biggr) e^{-2s\beta}\, dx$$

$$\geq C_9 s^3 (T+1) \int\limits_{\Omega} (|\nabla z(T,x')|^2 + |\nabla z(0,x')|^2 + |z(T,x')|^2 + |z(0,x')|^2) e^{-2s\gamma}\, dx'$$

$$\geq C_9 s^3 (T+1) \int\limits_{\Omega} (|\nabla z(T,x')|^2 + |\nabla z(0,x')|^2 + |z(T,x')|^2 + |z(0,x')|^2) e^{-2s\phi(0,x')}\, dx'. \tag{36}$$

Из (35), (36) вытекает оценка

$$\int\limits_{Q_T} \frac{1}{40} s\mu\biggl(\Bigl(\frac{\partial z}{\partial x_0}\Bigr)^2 + a(x', \nabla z, \nabla z)\biggr) e^{-2s\phi}\, dx + 2s \int\limits_{\Sigma_T} \Bigl(\frac{\partial z}{\partial \nu}\Bigr)^2 a(x', \nu, \nu) a(x', \nu, \nabla\phi) e^{-2s\phi}\, d\Sigma \leq C_{11} s^5 \int\limits_{Q_T} z^2 e^{-2s\phi}\, dx \quad \forall s \geq \max(s_2, s_3). \tag{37}$$

Зафиксируем параметр s равным $s = \max(s_2, s_3)$. Заметим, что $a(x', \nu, \nabla\phi) = a(x', \nu, \nabla\phi_0)$ $\forall x \in \mathbb{R}^1_+ \times \partial\Omega$. Таким образом, из (37) и условия 1 следует оценка

$$\int\limits_{Q_T} |\nabla z|^2\, dx \leq C_{12}(T) \biggl(\int\limits_{\Sigma_T^0} \Bigl(\frac{\partial z}{\partial \nu}\Bigr)^2 a(x', \nu, \nu) a(x', \nu, \nabla\phi_0) e^{-2s\phi}\, d\Sigma + \int\limits_{Q_T} z^2\, dx\biggr) \quad \forall T \geq T_0. \tag{38}$$

Рассмотрим случай, когда выполнены (8) и условие 2. Наша цель — установить неравенство (38). Обозначим через P_ε^* оператор, полученный из (9) заменой коэффициентов a_{ij} на a_{ij}^ε. Коэффициенты a_{ij}^ε определены в условии 2. Обозначим через z_ε решение краевой задачи

$$P_\varepsilon^* z_\varepsilon = 0 \text{ в } Q_T, \quad z_\varepsilon|_{\Sigma_T} = 0,\ z_\varepsilon(0,x') = z_0(x'), \quad \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_0}(0,x') = z_1(x'). \tag{39}$$

Известно, что

$$z_\varepsilon \to z \text{ в } H^1(Q_T) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{40}$$

где z является решением задачи (9), (10) с начальными данными z_0, z_1. Действительно, в силу теоремы 1 последовательность z_ε ограничена в пространстве X_T. Таким образом, из этой последовательности можно выделить подпоследовательность такую, что

$$z_\varepsilon \to \tilde{z} \quad \text{слабо в } H^1(Q_T).$$

С помощью предельного перехода несложно показать, что

$$P^*\tilde z = 0 \text{ в } Q_T, \quad \tilde z|_{\Sigma_T} = 0, \ \tilde z(0,x') = z_0(x'), \quad \frac{\partial \tilde z}{\partial x_0}(0,x') = z_1(x'). \tag{41}$$

Поскольку в силу теоремы 1 решение задачи (41) единственно, имеем $\tilde z(x) \equiv z(x)$. Умножая (39) на $\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} e^{-Nt}$ скалярно в $L^2(Q_T)$ и интегрируя по частям по x, имеем

$$\begin{aligned} J^2_{N,\varepsilon}(z_\varepsilon) = \int\limits_{Q_T} \Biggl(\Biggl(\Bigl(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_0}\Bigr)^2 + \sum_{i,j=1}^n a^\varepsilon_{ij}(x') \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_j}\Biggr) e^{-Nt} \\ + \int\limits_0^{x_0} N \Biggl(\Bigl(\frac{\partial z_\varepsilon(\tau,x')}{\partial x_0}\Bigr)^2 + \sum_{i,j=1}^n a^\varepsilon_{ij}(x') \frac{\partial z_\varepsilon(\tau,x')}{\partial x_i}\frac{\partial z_\varepsilon(\tau,x')}{\partial x_j} \\ - 2\sum_{i=0}^n b_i(x') \frac{\partial z_\varepsilon(\tau,x')}{\partial x_i}\frac{\partial z_\varepsilon(\tau,x')}{\partial x_0}\Biggr) e^{-Nt}\,d\tau \Biggr) dx + \|z_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_T)} \\ = \|z_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_T)} + T\Biggl(\int\limits_\Omega z_1^2\,dx' + \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^\varepsilon_{ij}(x') \frac{\partial z_0}{\partial x_i}\frac{\partial z_0}{\partial x_j}\,dx' \Biggr). \end{aligned}$$

При достаточно больших $N > 0$ функционал $J_{N,\varepsilon}$ является нормой на пространстве $H^1(Q_T)$. В силу (41)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} J^2_{N,\varepsilon}(z_\varepsilon) = J^2_N(z) = \int\limits_{Q_T} \Biggl(\Biggl(\Bigl(\frac{\partial z}{\partial x_0}\Bigr)^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x') \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j}\Biggr) e^{-Nt} \\ + \int\limits_0^{x_0} N \Biggl(\Bigl(\frac{\partial z(\tau,x')}{\partial x_0}\Bigr)^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x') \frac{\partial z(\tau,x')}{\partial x_i}\frac{\partial z(\tau,x')}{\partial x_j} \\ - 2\sum_{i=0}^n b_i(x') \frac{\partial z(\tau,x')}{\partial x_i}\frac{\partial z(\tau,x')}{\partial x_0}\Biggr) e^{-Nt}\,d\tau \Biggr) dx + \|z\|^2_{L^2(Q_T)} \\ = \|z\|^2_{L^2(Q_T)} + T\Biggl(\int\limits_\Omega z_1^2\,dx' + \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x') \frac{\partial z_0}{\partial x_i}\frac{\partial z_0}{\partial x_j}\,dx' \Biggr). \end{aligned} \tag{42}$$

Таким образом, (40) следует из (41), (42).

С другой стороны, (40) влечет (см. [13]) сходимость

$$\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \nu} \to \frac{\partial z}{\partial \nu} \quad \text{в} \quad L^2(\Sigma_T). \tag{43}$$

Прежде всего заметим, что для доказательства (38) в силу (40), (43) достаточно доказать это неравенство для оператора P^*_ε с константой $C_{12}(T)$, не зависящей от ε. Основная проблема здесь связана с интегралом

$$\int\limits_{Q_T} \theta_\varepsilon p_\varepsilon(x, \nabla u)\,dx.$$

Поскольку предел θ_ε в общем случае не является непрерывной функцией, его невозможно аппроксимировать равномерно по ε в $C(\overline{Q})$ с помощью гладкой функции. Для преодоления этой трудности рассмотрим оператор $\widetilde{P} = \rho P$, где $\rho(x') = c(x')^{-\frac{1}{2}}$. Положим

$$\tilde{p}(x,\zeta) = \rho(x')p(x,\zeta), \quad \widetilde{P}^{(j)} = \frac{\partial}{\partial \zeta_j}\tilde{p}(x,\zeta),$$

$$\widetilde{P}^{(j,k)}(x,\zeta) = \frac{\partial^2}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}\tilde{p}(x,\zeta), \quad \widetilde{P}_j(x,\zeta) = \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{p}(x,\zeta).$$

Обозначим $u = z_\varepsilon e^{-s\phi}$, где z_ε является решением задачи (39). (Для простоты обозначений мы опустили индекс ε в определении $p(x,\zeta), \widetilde{P}$ и u.) В силу леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} \|g_s\|^2_{L^2(Q_T,\rho^2)} &= \|L_1 u\|^2_{L^2(Q_T,\rho^2)} + \|L_2 u\|^2_{L^2(Q_T,\rho^2)} + 2\widetilde{A}_1 \\ &+ 2s\int\limits_{\Sigma_T}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x',\nu,\nu)a(x',\nu,\nabla\phi)\rho^2\,d\Sigma - s\int\limits_{Q_T}(\{\tilde{p},\{\tilde{p},\phi\}\}(x,\nabla u) - \tilde{\theta}\tilde{p}(x,\nabla u) \\ &+ \sum_{k,i=0}^{n}\widetilde{P}^{(k)}_k(x,\nabla u)\phi_{x_i}\widetilde{P}^{(i)}(x,\nabla u))\,dx, \end{aligned} \tag{44}$$

где

$$\tilde{\theta}(x) = \sum_{l,m=0}^{n}\left(\phi_{x_l x_m}\widetilde{P}^{(\ell,m)}(x,\nabla u) + \rho_{x_m}\phi_{x_l}P^{(\ell,m)}(x,\nabla u) + \phi_{x_l}\rho P^{(l,m)}_m(x,\nabla u)\right) \tag{45}$$

и

$$\widetilde{A}_1 = \int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_0}\sum_{i=0}^{n}s\phi_{x_i}P^{(i)}(x,\nabla u)\rho^2(x')\,dx'\Big|_0^T - s\int\limits_{\Omega}\phi_{x_0}p(x,\nabla u)\rho^2(x')\,dx'\Big|_0^T.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \{\tilde{p},\{\tilde{p},\phi\}\}(x,\nabla u) &= \rho^2\{p,\{p,\phi\}\}(x,\nabla u) + \sum_{k,i=0}^{n}\rho P^{(k)}(x,\nabla u)\frac{\partial\rho}{\partial x_k}P^{(i)}(x,\nabla u)\phi_{x_i} \\ &- \sum_{k,i=0}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_k}P^{(i,k)}(x,\nabla u)\phi_{x_i}\tilde{p}(x,\nabla u). \end{aligned} \tag{46}$$

С помощью (45), (46) можно преобразовать (44) следующим образом:

$$\begin{aligned} \|g_s\|^2_{L^2(Q_T,\rho^2)} &= \|L_1 u\|^2_{L^2(Q_T,\rho^2)} + \|L_2 u\|^2_{L^2(Q_T,\rho^2)} + 2\widetilde{A}_1 \\ &+ 2s\int\limits_{\Sigma_T}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x',\nu,\nu)a(x',\nu,\nabla\phi)\rho^2\,d\Sigma \\ -s\int\limits_{Q_T}\Bigg(&\rho^2\{p,\{p,\phi\}\}(x,\nabla u) - \left(\tilde{\theta}_2 + 2\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\phi_{x_i}P^{(i,k)}(x,\nabla u) + \rho\phi_{x_i}P^{(i,k)}_k(x,\nabla u)\right)\tilde{p}(x,\nabla u) \\ &+ \sum_{k,i=0}^{n}\left(2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x_k} + \rho^2\right)P^{(k)}_k(x,\nabla u)\phi_{x_i}P^{(i)}(x,\nabla u)\Bigg)\,dx, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\theta}_2(x) = \sum_{i,j=0}^{n}\rho\phi_{x_i x_j}P^{(i,j)}(x,\nabla u).$$

Учитывая, что

$$2\rho_{x_k}\phi_{x_i}P^{(i,k)}(x,\nabla u)+\rho\phi_{x_i}P_k^{(i,k)}(x,\nabla u)=0 \quad \text{в} \quad Q_T,$$

имеем

$$\|g_s\|^2_{L^2(Q_T,\rho^2)}=\|L_1u\|^2_{L^2(Q_T,\rho^2)}+\|L_2u\|^2_{L^2(Q_T,\rho^2)}+2\widetilde{A}_1$$
$$+2s\int\limits_{\Sigma_T}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 a(x',\nu,\nu)a(x',\nu,\nabla\phi)\rho^2\,d\Sigma-s\int\limits_{Q_T}\Bigg(\rho^2\{p,\{p,\phi\}\}(x,\nabla u)-\tilde\theta_2\tilde p(x,\nabla u)$$
$$+\sum_{k,i=0}^{n}\left(2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x_k}+\rho^2\right)P_k^{(k)}(x,\nabla u)\phi_{x_i}P^{(i)}(x,\nabla u)\Bigg)\,dx. \quad (47)$$

Легко видеть, что функция $\tilde\theta_2$ непрерывна. Таким образом, повторяя рассуждения, проводимые от формулы (24) до формулы (37), получаем (38).

Чтобы вывести из априорной оценки (38) оценку (12), введем следующее пространство:

$$E_T=\bigg\{(v_0,v_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\mid P^*z=0 \text{ в } Q_T,\ z|_{\Sigma_T}=0,$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_{\Sigma_T^0}=0,\ z(0,x')=v_0,\ \frac{\partial z}{\partial x_0}(0,x')=v_1\bigg\}.$$

Покажем, что $\dim E_t<\infty$ для любых $t\geq T_0$. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого $T>T_0$ существует последовательность функций $\{v_0^{(n)},v_1^{(n)}\}\in E_T$ такая, что

$$\big(v_0^{(n)},v_1^{(n)}\big)\to(0,0) \quad \text{слабо в } H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega), \quad \big\|\big(v_0^{(n)},v_1^{(n)}\big)\big\|_{H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}=1. \quad (48)$$

Обозначим через z_n решение краевой задачи

$$P^*z_n=0 \text{ в } Q_T, \quad z_n|_{\Sigma_T}=0,\ z_n(0,x')=v_0^{(n)}, \quad \frac{\partial z_n(0,x')}{\partial x_0}=v_1^{(n)}. \quad (49)$$

Из соотношений (48), (49) следует, что

$$z_n\to 0 \quad \text{в} \quad L^2(Q_T). \quad (50)$$

Согласно определению пространства E_T функция z_n удовлетворяет соотношению

$$\left.\frac{\partial z_n}{\partial \nu}\right|_{\Sigma_T^0}=0. \quad (51)$$

В силу (11), (38), (51) для решений краевой задачи (49) справедливы априорные оценки

$$C_1\big\|\big(v_0^{(n)},v_1^{(n)}\big)\big\|^2_{H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq\int\limits_{Q_T}|\nabla z_n|^2\,dx\leq C_2\int\limits_{Q_T}z_n^2\,dx,$$

где $C_1>0$. Из этого соотношения, сходимости (50) и априорной оценки (38) вытекает сходимость

$$\big(v_0^{(n)},v_1^{(n)}\big)\to(0,0) \quad \text{в} \quad H^1(\Omega)\times L^2(\Omega),$$

что невозможно в силу (48).

Очевидно, что

$$E_{T_1} \subset E_{T_2} \quad \forall T_1 > T_2 \geq T_0. \tag{52}$$

Согласно (38), (52) на полуинтервале $[T_0, \infty)$ функция $\ell(t) = \dim E_t$ конечна и монотонно убывает. Однако функция $\ell(t)$ может принимать только целые неотрицательные значения. Поэтому для любого $\delta > 0$ найдутся $T_1, T_2 \in [T_0, T_0 + \delta]$, $0 < T_1 < T_2$, такие, что

$$\dim E_{T_1} = \dim E_{T_2}. \tag{53}$$

Ввиду (52) соотношение (53) влечет за собой равенство

$$E_{T_1} = E_{T_2}. \tag{54}$$

Поскольку коэффициенты оператора P^* не зависят от x_0, то

$$E_{T_1} = E_\infty. \tag{55}$$

Действительно, предположим что существуют пара $(\hat{v}_0, \hat{v}_1) \in E_{T_1}$ и число $\hat{T} > T_2$ такие, что функция $\hat{z}$, являющаяся решением краевой задачи

$$P^*\hat{z} = 0 \text{ в } Q_\infty, \quad z|_{\Sigma_\infty} = 0, \quad \hat{z}(0, x') = \hat{v}_0, \quad \frac{\partial z}{\partial x_0}(0, x') = \hat{v}_1, \tag{56}$$

обладает следующим свойством:

$$\left.\frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\right|_{\Sigma_{\hat{T}}} = 0, \quad \left.\frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\right|_{[\hat{T}, \hat{T}+\varepsilon] \times \Gamma_0} \not\equiv 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{57}$$

Согласно (56), (57) пара $\big(\hat{z}(\widehat{T} - T_1, x'), \frac{\partial \hat{z}}{\partial x_0}(\widehat{T} - T_1, x')\big)$ принадлежит E_{T_1}. Однако из тождества (54) немедленно следует, что эта пара также принадлежит пространству E_{T_2} и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\right|_{[\widehat{T}, \widehat{T} + T_2 - T_1] \times \Gamma_0} \equiv 0.$$

Однако это невозможно в силу (57).

Пусть пара (v_0, v_1) — произвольный элемент пространства E_∞. Рассмотрим краевую задачу

$$P^*z = 0 \text{ в } \mathbb{R}^1 \times \Omega, \quad z|_{R^1 \times \partial\Omega} = 0, \quad z(0, x') = v_0, \quad \frac{\partial z}{\partial x_0}(0, x') = v_1. \tag{58}$$

Покажем, что

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_{\mathbb{R}^1 \times \Gamma_0} = 0. \tag{59}$$

Пусть $\tau > 0$ — произвольное число. Согласно (56) найдется пара $(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1) \in E_\infty$ такая, что справедливы соотношения

$$P^*\tilde{z} = 0 \text{ в } Q_\infty, \quad \tilde{z}|_{R^1 \times \partial\Omega} = 0, \quad \tilde{z}(0, x') = v_0, \quad \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_0}(0, x') = v_1$$

и

$$\left(\tilde{z}(\tau, x'), \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_0}(\tau, x')\right) = (v_0, v_1).$$

Отсюда ввиду теоремы 1 вытекает равенство

$$z(x) = \tilde{z}(x_0 - \tau, x').$$

Но поскольку $(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1) \in E_\infty$, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}\bigg|_{[-\tau,0]\times\Gamma_0} = 0,$$

что и доказывает (59).

В [14, с. 390] доказано, что всякая функция z, удовлетворяющая (58), (59), тождественно равна нулю в $\mathbb{R}^1 \times \Omega$. Следовательно,

$$\dim E_T = 0 \quad \forall T > T_0. \tag{60}$$

Покажем, что справедлива оценка (12). Предположим, что это не так. Тогда найдется последовательность функций $z_k \in X$, являющихся решениями задачи (9), (10), таких, что

$$\|z_k\|_{H^1(Q_T)} = 1, \quad \left\|\frac{\partial z_k}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Sigma_T^0)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{61}$$

Выделим из подпоследовательности $\{z_k\}$ подпоследовательность, которую также обозначим через $\{z_k\}$, такую, что

$$z_k \to z \quad \text{слабо в } H^1(Q_T), \quad z_k \to z \quad \text{в } L^2(Q_T).$$

С помощью предельного перехода несложно установить, что функция z удовлетворяет уравнениям (9), (10). Кроме того, в силу (11), (61) для функции z выполнено соотношение (59). Следовательно, как показано выше, $z \equiv 0$, что невозможно в силу (38), (61). Теорема доказана.

В [1] доказана

Теорема 3. *Пусть выполнены* (5), (6) *и одно из соотношений* (7) *или* (8). *Тогда для любых исходных данных*

$$v_0 \in L^2(\Omega), \quad v_1 \in H^{-1}(\Omega), \quad g \in L^1(0,T; H^{-1}(\Omega))$$

существует единственное решение задачи (1)–(3) $y \in Y_T$ *и справедливо неравенство*

$$\|y\|_{Y_T} \le C_1(\|v_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))}). \tag{62}$$

Из теорем 2 и 3 вытекает

Теорема 4. *Пусть выполнены* (5), (6) *и, кроме того, выполнено либо* (7) *и условие* 1, *либо* (8) *и условие* 2. *Тогда найдется константа* T_0 *такая, что при* $T > T_0$ *для любых исходных данных* $v_0, v_2 \in L^2(\Omega)$, $v_1, v_3 \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ *существует решение задачи* (1)–(4) $(y, v) \in Y_T \times L^2(\Sigma_T^0)$.

В качестве примера применения теоремы 4 рассмотрим задачу точной управляемости гиперболическим оператором, у которого главная часть совпадает с волновым оператором

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Положим

$$\Gamma_0 = \left\{x' \in \Gamma \mid \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x_i - \bar{x}_i) > 0\right\},$$

где $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка из $\mathbb{R}^n$.

Пусть функция $y(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} - \Delta y + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial (b_i(x')y)}{\partial x_i} + c_1(x')y = g \quad \text{в} \quad Q_T, \tag{63}$$

$$y|_{\Sigma_T^1} = 0, \quad y|_{\Sigma_T^0} = u, \tag{64}$$

$$y(0,x') = v_0(x'), \quad \frac{\partial y}{\partial x_0}(0,x') = v_1(x'), \tag{65}$$

$$y(T,x') = v_2(x'), \quad \frac{\partial y}{\partial x_0}(T,x') = v_3(x'). \tag{66}$$

Справедлива

Теорема 5. *Пусть выполнено* (5). *Тогда найдется константа* T_0 *такая, что при* $T > T_0$ *для любых исходных данных* $v_0, v_2 \in L^2(\Omega)$, $v_1, v_3 \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ *существует решение задачи* (63)–(66) $(y,v) \in Y_T \times L^2(\Sigma_T^0)$.

Доказательство. Положим $\phi_0(x') = -\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)^2$. Легко видеть, что для данной функции $\phi_0(x')$ выполнено условие 1. Применяя теорему 4, получаем утверждение теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lions J. L.* Controllability exacte, stabilization et perturbation des systemes distribues. V. 1: Controllabilite exacte. Paris,: Masson, 1988.
2. *Lions J. L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30, N 1. P. 1–68.
3. *Lions J. L.* Controlabilite exacte des systemes distribues // Acad. Sci. Ser. I Math. 1986. N 302. P. 471–475.
4. *Эмануилов О. Ю.* Точная управляемость гиперболическими уравнениями. Ч. 1 // Автоматика. 1990. № 3. С. 10–13.
5. *Bardos C., Lebeau G., Rauch J.* Sharp sufficient conditions for the observaton, control, and stabilization of wave equation from the boundary // SIAM J. Control Optim. 1992. V. 30, N 5. P. 1024–1065.
6. *Komornik V.* Exact controllability and stabilization // Lecture Notes in Control and Inform. 1990. V. 148. P. 149–192.
7. *Lagnese J.* The Hilbert uniqueness method: A retrospective // Lecture Notes in Control and Inform. 1990. V. 148. P. 158–181.
8. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
9. *Lasiecka I., Triggiani R., Yao P. F.* Exact controllability for second-order hyperbolic equations with variable coefficient-principal part and first-order terms // Nonlinear anal. theory, methods and applications. 1997. V. 30, N 1. P. 111–122.
10. *Tataru D.* Boundary controllability of conservative PDEs // Appl. Math. Optim. 1995. V. 31. P. 257–295.
11. *Littman W., Taylor S.* Smoothing evolution equations and boundary control theory // Journal Anal. Math. 1992. V. 59. P. 117–131.
12. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1972.
13. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.
14. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985.

Статья поступила 27 февраля 1995 г.,
окончательный вариант — 4 марта 1999 г.

Ames, IA, USA
Iowa State University
vika@iastate.edu