Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.5

К ВОПРОСУ О γ–ДОСТАТОЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ

В. Б. Шерстюков

Аннотация: В индуктивных пределах весовых банаховых пространств функций исследуются множества, определенным образом характеризуемые фиксированной положительной функцией. В традиционных классах целых в $\mathbb{C}^n$ функций с ограничением на рост на основе общих результатов доказывается критерий для введенных Ю. Ф. Коробейником γ-достаточных множеств в терминах обобщения множеств, эффективных по Ийеру. Изучается связь γ-достаточных множеств с абсолютно представляющими системами Миттаг-Леффлера. Библиогр. 7.

Слабо достаточные множества, введенные Шнейдером [1], играют важную роль в вопросах представления аналитических функций функциональными рядами (см., например, [2–4]). Естественное обобщение этих множеств — γ-достаточные множества — было предложено Ю. Ф. Коробейником [5] и применено им, в частности, к построению дискретных максимальных множеств в некоторых классах целых функций (теоремы типа Левинсона). Вопрос о связи между слабо достаточными и эффективными (по Ийеру) множествами, рассмотренный в [2], получил окончательное решение в работе [4].

В настоящей статье методами из [4] (с помощью более общих результатов) аналогичная задача решается для γ-достаточных множеств.

1. Вспомогательные результаты. В этом пункте используются определения, обозначения и некоторые результаты из [4].

Пусть T — некоторое множество, B — нормированное пространство с нормой $|\cdot|$, B^T — совокупность всех отображений, действующих из T в B, а $\upsilon(T)$ — из T в $(0,\infty)$. Для $f \in B^T$, $S \subset T$ и $\varphi \in \upsilon(T)$ положим $\|f\|_{\varphi,S} = \sup\{|f(t)|/\varphi(t) : t \in S\}$. В случае $S = T$ вместо $\|f\|_{\varphi,T}$ пишем $\|f\|_\varphi$. Если $E \subset B^T$ — векторное пространство, то $E(\varphi) := \{f \in E : \|f\|_\varphi < \infty\}$ — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_\varphi$. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, где $\varphi_n \in \upsilon(T)$ и $\varphi_n(t) \le \varphi_{n+1}(t)$, $t \in T$, $n \ge 1$. Векторное пространство $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(\varphi_n)$ обозначим через $E(\Phi)$. Зафиксируем $\eta \in \upsilon(T)$ и определим полунормированное пространство $E(\eta; S) := \{f \in E(\Phi) : \|f\|_{\eta,S} < \infty\}$ с преднормой $\|\cdot\|_{\eta,S}$. Назовем множество $S \subset T$ $\eta(t)$-*определяющим для* $E(\Phi)$, если существует $m \ge 1$ такое, что $E(\eta; S) \hookrightarrow E(\varphi_m)$ ($\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения). Будем также говорить, что S — $\eta(t)$-*секвенциально определяющее для* $E(\Phi)$ *множество*, если существует $m \ge 1$ такое, что $E(\eta; S) \subset E(\varphi_m)$. Наконец, S называется *множеством единственности для* $F \subset B^T$, если из того, что $f \in F$ и $f(t) = 0$ на S, следует, что $f(t) = 0$ на T.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–01018).

Лемма 1 [4]. *Пусть $S \subset T$, $\varphi \in \upsilon(T)$, пространство $E(\varphi)$ банахово и множество $\mathscr{G}$ ненулевых элементов из $E(\varphi)$ таково, что*

1) $\sup\{\|g\|_{\varphi,S} : g \in \mathscr{G}\} = M_S < \infty$;

2) $\{g/\|g\|_\varphi : g \in \mathscr{G}\}$ *относительно компактно в* $E(\varphi)$.

Тогда если S — множество единственности для $E(\varphi)$, то $\mathscr{G}$ ограничено в $E(\varphi)$.

Для $\mathscr{G} \subset B^T$ символом $\Sigma(\mathscr{G})$ обозначим совокупность всех $f \in B^T$, представимых в виде поточечно сходящегося в T ряда $f(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varkappa_i g_i(t)$, где $g_i \in \mathscr{G}$, $i \geq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\varkappa_i| < \infty$.

Пусть $\aleph$ — некоторая совокупность подмножеств из T; $\varphi, \psi \in \upsilon(T)$. Следуя [4], условимся писать $\varphi = o(\psi)$ на $\aleph$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \aleph : \varphi(t) \leq \varepsilon\psi(t)\ \forall t \in T\backslash\alpha$.

Лемма 2 [4]. *Пусть $\varphi, \psi \in \upsilon(T)$; $\varphi(t) \leq \psi(t)\ \forall t \in T$; $\varphi = o(\psi)$ на $\aleph$ и $E(\psi)$ банахово. Пусть, далее, при некотором $c > 0$ для множества $\mathscr{G} \subset \{f \in E(\varphi) : \|f\|_\psi = 1\}$ выполняется условие*

$$\forall \alpha \in \aleph\, \exists g \in \mathscr{G} : \sup\{|g(t)|/\psi(t) : t \in T\backslash\alpha\} \geq c. \tag{1}$$

Тогда $\Sigma(\mathscr{G}) \subset E(\psi)$ и $\Sigma(\mathscr{G})\backslash E(\varphi) \neq \varnothing$.

Будем предполагать, что найдется такая совокупность $\aleph$ подмножеств из T, что $\bigcup\limits_{\alpha \in \aleph} \alpha = T$ и

(i_1) $\inf\{\varphi_n(t) : t \in \alpha\} > 0$, $\sup\{\varphi_n(t) : t \in \alpha\} < \infty\ \forall \alpha \in \aleph$, $\forall n \geq 1$;

(i_2) $\varphi_n = o(\varphi_{n+1})$ на $\aleph$;

(i_3) каждая ограниченная в $(E(\Phi), \tau) := \operatorname*{ind}\limits_{n\to} E(\varphi_n)$ последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом $\alpha \in \aleph$ к некоторому элементу из E.

Как отмечено в [4], условия (i_1)–(i_3) обеспечивают банаховость пространств $E(\varphi_n)$ и полную непрерывность вложений $E(\varphi_n)$ в $E(\varphi_{n+1})$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Теорема 1. *Для того чтобы множество S было $\eta(t)$-определяющим для $E(\Phi)$, необходимо, а если*

$$\exists M < \infty\, \exists l \geq 1 : \eta(t) \leq M\varphi_l(t)\ \forall t \in S \tag{2}$$

и выполнены условия (i_1)–(i_3), то и достаточно, чтобы оно было для него $\eta(t)$-секвенциально определяющим множеством и множеством единственности.

В доказательстве нуждается лишь достаточность, которая будет установлена по схеме доказательства теоремы 2 из [4].

Так как S — $\eta(t)$-секвенциально определяющее множество для $E(\Phi)$, то $E(\eta; S) \subset E(\varphi_m)$ при некотором $m \geq l$. Достаточно показать, что шар $U_{\eta,S} = \{f \in E(\eta; S) : \|f\|_{\eta,S} \leq 1\}$ ограничен в $E(\varphi_{m+1})$. Ограниченность же $U_{\eta,S}$ в $E(\varphi_{m+1})$ эквивалентна ограниченности в нем множества $A := U_{\eta,S}\backslash U_{m+1}$ (U_n — единичный шар пространства $E(\varphi_n)$). Нетривиальным является лишь случай, когда A содержит бесконечное число элементов. Докажем, что существует $\alpha_0 \in \aleph$ такое, что

$$\|f\|_{\varphi_{m+1}} = \sup\{|f(t)|/\varphi_{m+1}(t) : t \in \alpha_0\} \quad \forall f \in A. \tag{3}$$

Предположим, что условие (3) нарушено, т. е.

$$\forall \alpha \in \aleph\, \exists f \in A : \|f\|_{\varphi_{m+1}} > \sup\{|f(t)|/\varphi_{m+1}(t) : t \in \alpha\}.$$

В этом случае будем иметь

$$\forall\alpha \in \aleph\, \exists f \in A : \|f\|_{\varphi_{m+1}} = \sup\{|f(t)|/\varphi_{m+1}(t) : t \in T\backslash\alpha\}.$$

Отсюда, положив $\mathscr{G} = \{f/\|f\|_{\varphi_{m+1}} : f \in A\}$, получаем

$$\forall\alpha \in \aleph\, \exists g \in \mathscr{G} : \sup\{|g(t)|/\varphi_{m+1}(t) : t \in T\backslash\alpha\} = 1.$$

Таким образом, выполнено условие (1) леммы 2 с $\varphi = \varphi_m$, $\psi = \varphi_{m+1}$, $c = 1$. В соответствии с этой леммой $\exists h \in \Sigma(\mathscr{G}) \subset E(\varphi_{m+1}) \subset E(\Phi)$, $h \notin E(\varphi_m)$. Далее, по определению A любая функция $f \in A$ удовлетворяет условиям $\|f\|_{\eta,S} \leq 1$ и $\|f\|_{\varphi_{m+1}} > 1$. Поэтому $\|g\|_{\eta,S} < 1\ \forall g \in \mathscr{G}$. Тогда $h \in E(\eta; S)$, и мы приходим к противоречию с вложением $E(\eta; S) \subset E(\varphi_m)$. Итак, для множества A выполнено условие (3). В силу (i_1) имеем

$$\inf\{\varphi_{m+1}(t) : t \in \alpha_0\} = a > 0, \quad \sup\{\varphi_{m+2}(t) : t \in \alpha_0\} = b < \infty.$$

Из условия (3) заключаем тогда, что для любой $f \in A$

$$\|f\|_{\varphi_{m+1}} = \sup_{t\in\alpha_0} \frac{|f(t)|}{\varphi_{m+1}(t)} \leq \frac{b}{a} \sup_{t\in\alpha_0} \frac{|f(t)|}{\varphi_{m+2}(t)} \leq \frac{b}{a}\|f\|_{\varphi_{m+2}}.$$

Следовательно, множество $\widetilde{\mathscr{G}} := \{f/\|f\|_{\varphi_{m+2}} : f \in A\}$ ограничено в $E(\varphi_{m+1})$. Так как вложение $E(\varphi_{m+1})$ в $E(\varphi_{m+2})$ вполне непрерывно, то $\widetilde{\mathscr{G}}$ относительно компактно в $E(\varphi_{m+2})$. Кроме того, из условия (2) и того, что $\|f\|_{\eta,S} \leq 1\ \forall f \in A$, получаем

$$\sup\{\|f\|_{\varphi_{m+2,S}} : f \in A\} = \sup\{\sup_{t\in S} \frac{|f(t)|}{\eta(t)} \cdot \frac{\eta(t)}{\varphi_{m+2}(t)} : f \in A\}$$
$$\leq M \sup\{\|f\|_{\eta,S} : f \in A\} \leq M.$$

Значит, выполнены все условия леммы 1 с $\varphi = \varphi_{m+2}$, $\mathscr{G} = A$. По этой лемме A ограничено в $E(\varphi_{m+2})$. По доказанному выше $\|f\|_{\varphi_{m+1}} \leq (b/a)\|f\|_{\varphi_{m+2}}\ \forall f \in A$, поэтому A ограничено в $E(\varphi_{m+1})$. Теорема доказана.

Выделим случай, когда $T = D$ — область в $\mathbb{C}^p$; $B = \mathbb{C}$; $\aleph = K(D)$ — совокупность всех компактов из D; $E = H(D)$ — пространство всех функций, голоморфных в D. Тогда $(i_1) \Rightarrow (i_3)$.

Следствие. *Пусть D — область в $\mathbb{C}^p$, $S \subset D$; $\eta \in \upsilon(D)$ удовлетворяет неравенству (2), причем $\Phi = \{\varphi_n\}$ — неубывающая последовательность положительных функций, определенных в D, со свойствами (i_1), (i_2). Тогда множество S является $\eta(t)$-определяющим для $H(D)(\Phi)$ в том и только в том случае, когда оно является для него $\eta(t)$-секвенциально определяющим множеством и множеством единственности.*

2. γ-Достаточность и γ-эффективность. Пусть h — неотрицательная в $\mathbb{C}^p$ функция и $h(z) \to \infty$, $z \to \infty$; $\{\gamma_n\}$ такова, что $0 < \gamma_n \uparrow 1$ $(n = 1, 2, \dots)$. Положим $\Phi = \{\exp \gamma_n h\}_{n=1}^{\infty}$, $P(h) = H(\mathbb{C}^p)(\Phi)$, $\eta_\alpha(z) = \exp \alpha h(z)$, $0 \leq \alpha < \gamma$, $0 < \gamma \leq 1$. Предположим, что h ограничена на каждом компакте из $\mathbb{C}^p$. Тогда для Φ выполнены условия (i_1), (i_2) следствия теоремы 1.

Множество S называется *γ-достаточным* для $P(h)$ [5], если $\forall\alpha < \gamma\, \exists m \geq 1 : E(\eta_\alpha; S) \hookrightarrow E(\exp \gamma_m h)$. По следствию из теоремы 1 S γ-достаточно для $P(h)$ тогда и только тогда, когда S — множество единственности для $P(h)$ и является (для $P(h)$) $\eta_\alpha(z)$-секвенциально определяющим множеством при любом $\alpha < \gamma$. Для неограниченного множества $S \subset \mathbb{C}^p$ и $y \in P(h)$ положим

$$\sigma_y = \overline{\lim_{z\to\infty}} \ln \frac{|y(z)|}{h(z)}, \quad \sigma_{y,S} = \overline{\lim_{z\to\infty, z\in S}} \ln \frac{|y(z)|}{h(z)}.$$

Полученный в [5] результат о γ-достаточных множествах [5, следствие 2 теоремы 4] послужил отправным пунктом для такого определения.

Неограниченное множество $S \subset \mathbb{C}^p$ назовем *γ-эффективным* для $P(h)$, если $\sigma_y \le 1 - \gamma + \sigma_{y,S}$ $\forall y \in P(h)$.

Теорема 2. *Всякое γ-эффективное множество для $P(h)$ является γ-достаточным (для $P(h)$).*

Доказательство результата также проведем по схеме доказательства теоремы 4 из [4]. Пусть S γ-эффективно для $P(h)$. Если $y \in P(h)$ и $y = 0$ на S, то $\sigma_{y,S} = -\infty$. Тогда и $\sigma_y = -\infty$. Отсюда получаем, что y ограничена в $\mathbb{C}^p$ и, значит, $y \equiv 0$, т. е. S — множество единственности для $P(h)$. Если $y \in P(h)$ и $y(z) = O(\exp \alpha h(z))$ на $S(\alpha < \gamma)$, то $\sigma_{y,S} \le \alpha$. Тогда $\sigma_y \le 1 - \gamma + \alpha < 1$. Из последнего неравенства следует, что $\exists m \ge 1 :\ y(z) = O(\exp \gamma_m h(z))$ в $\mathbb{C}^p$. Таким образом, $\forall \alpha < \gamma\, \exists m \ge 1 : E(\eta_\alpha; S) \subset E(\exp \gamma_m h)$, т. е. для всех $\alpha < \gamma$ множество S $\eta_\alpha(z)$-секвенциально определяющее для $P(h)$. Теорема доказана.

При некоторых дополнительных предположениях справедлив обратный результат. Положим для $\xi \in \mathbb{C}^p$, $r > 0$ и вещественнозначной функции h

$$|\xi|_p := \left(\sum_{i=1}^p |\xi_i|^2\right)^{1/2}; \quad \pi(\xi; r) := \{z \in \mathbb{C}^p : |z_i - \xi_i| \le r,\ i = 1, \dots, p\};$$

$$H(z) := \sup\{h(\zeta) : \zeta \in \pi(z; 1)\}; \quad R(h; \xi) := \{x \in H(\mathbb{C}^p) : |x(\xi)| = \exp h(\xi)\}.$$

Лемма 3 [4]. *Если h — плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^p$ функция, то*

$$\exists M < \infty\, \forall \xi \in \mathbb{C}^p\, \exists x_\xi \in R(h; \xi) : |x_\xi(z)| \le M \exp[H(z) + 2p \ln(1 + |z|_p^2)]\ \forall z \in \mathbb{C}^p.$$

Теорема 3. *Пусть h плюрисубгармонична в $\mathbb{C}^p$, причем*

$$\lim_{z\to\infty} H(z)/h(z) = 1; \quad \lim_{z\to\infty} \ln |z|_p / h(z) = 0. \tag{4}$$

Тогда всякое γ-достаточное для $P(h)$ множество γ-эффективно для $P(h)$.

Доказательство. Пусть S γ-достаточно для $P(h)$. Предположим, рассуждая от противного, что существует $y \in P(h)$ такое, что $\sigma_{y,S} < \sigma_y + \gamma - 1 =: \sigma + \gamma - 1$. Тогда существует $d > 0$ такое, что $\sigma_{y,S} < \sigma + \gamma - 1 - d$. Зафиксируем α такое, что $\gamma - d \le \alpha < \gamma$ и найдем $m \ge 1$ и $A < \infty$ такие, что имеет место импликация

$$f \in P(h),\ |f(z)| \le Be^{\alpha h(z)} \text{ на } S \Rightarrow |f(z)| \le BAe^{\gamma_m h(z)} \text{ в } \mathbb{C}^p. \tag{5}$$

Возьмем $a > 0$, $\eta > 0$ такие, что $\gamma_m + 2\eta < a + \sigma < 1 - 2\eta$. Из определения $\sigma_{y,S}$ и σ следует, что существует $C < \infty$ такое, что

$$|y(z)| \le C \exp(\sigma + \eta) h(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^p; \tag{6}$$

$$|y(z)| \le C \exp(\sigma + \gamma - 1 - d) h(z) \quad \forall z \in S; \tag{7}$$

$$\exists \{z_k\}_{k=1}^\infty\ (|z_k|_p \uparrow \infty) : |y(z_k)| \ge \exp(\sigma - \eta) h(z_k) \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{8}$$

Согласно (4) существует такое $r > 0$, что

$$aH(z) + 2p\ln\bigl(1 + |z|_p^2\bigr) \le (a+\eta)h(z) \quad \forall |z|_p \ge r. \tag{9}$$

По лемме 3, примененной к функции ah,

$\exists M < \infty\, \forall \xi \in \mathbb{C}^p\, \exists x_\xi \in R(ah;\xi) : |x_\xi(z)| \le M \exp\bigl[aH(z) + 2p\ln\bigl(1+|z|_p^2\bigr)\bigr]\ \forall z \in \mathbb{C}^p$.

Взяв

$$\widetilde{M} = M \sup\{\exp(a+\eta)h(z) : |z|_p < r\},$$

получим из (9)

$$|x_\xi(z)| \le \widetilde{M} \exp(a+\eta)h(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^p,\ \forall \xi \in \mathbb{C}^p. \tag{10}$$

Из условий (6) и (10) следует, что для любых $z \in \mathbb{C}^p$ и $\xi \in \mathbb{C}^p$ выполняется неравенство $|y(z)x_\xi(z)| \le C\widetilde{M}\exp(\sigma + a + 2\eta)h(z)$. В силу выбора a, η получаем $\sigma + a + 2\eta < 1$ и, значит, $yx_\xi \in P(h)$ для всех $\xi \in \mathbb{C}^p$. Далее, из (7), (10) и того, что $\sigma + a + \eta < 1 \le 1 - \gamma + \alpha + d$, заключаем, что оценка

$$|y(z)x_\xi(z)| \le C\widetilde{M}\exp(\sigma + \gamma - 1 - d + a + \eta)h(z) \le C\widetilde{M}\exp\alpha h(z)$$

выполняется при всех $z \in S$, $\xi \in \mathbb{C}^p$. Тогда в соответствии с (5) для всех $z \in \mathbb{C}^p$, $\xi \in \mathbb{C}^p$ имеем $|y(z)x_\xi(z)| \le C\widetilde{M}A\exp\gamma_m h(z)$. Полагая здесь $z = \xi = z_k$ и учитывая, что $|x_{z_k}(z_k)| = \exp ah(z_k)$ при всех $k \ge 1$ и $\gamma_m < a + \sigma - 2\eta$, получаем

$$|y(z_k)| \le C\widetilde{M}A\exp(\gamma_m - a)h(z_k) \le C\widetilde{M}A\exp(\sigma - 2\eta)h(z_k),$$

что противоречит (8). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть h удовлетворяет предположениям теоремы* 3 (*например, h — опорная функция содержащей начало координат ограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}^p$*). *Тогда множество $S \subset \mathbb{C}^p$ γ-достаточно для $P(h)$ тогда и только тогда, когда S γ-эффективно для $P(h)$.*

При $\gamma = 1$ из теорем 2 и 3 получаем соответствующие результаты А. В. Абанина [4] о связи слабо достаточных и эффективных множеств. Результат, аналогичный теореме 3, получен ранее в более общей ситуации и другим методом в [5, теорема 4]. В частности, следствие 1 теоремы 5 из [5] применительно к пространству $P(h)$ принимает следующий вид. Пусть $h(z) : \mathbb{C}^p \to \mathbb{R}^+$ — функция относительно медленного роста, $h(z) \to \infty$, $z \to \infty$; пространство $P(h)$ маркированное и $S \subset \mathbb{C}^p$ — γ-достаточное множество для $P(h)$. Тогда S будет γ-эффективным для $P(h)$. При этом $h(z)$ называется *функцией относительно медленного роста* [5], если

$$\lim_{\substack{z_1, z_2 \in K_n \\ n\to\infty}} \frac{h(z_1)}{h(z_2)} = 1$$

(стремление к единице равномерно относительно $z_1, z_2 \in K_n, n \to \infty$) для любой системы шаров $K_n = \{z \in \mathbb{C}^p : |z - a_n|_p < b_n\}$, $n \ge 1$,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{|a_n|_p} = 0$$

(стандартной в терминологии [5]). Определение маркированного пространства дано в [5]. Там же установлено, что при $p = 1$ для неотрицательной субгармонической функции $h(z)$ относительно медленного роста, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{z\to\infty} \ln|z|/h(z) = 0$, пространство $P(h)$ маркировано. Покажем, что в этом случае выполняется и первое из условий (4) теоремы 3. Возьмем произвольную последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \to \infty$, $n \to \infty$, и рассмотрим систему кругов $K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_n| \le 1\}$. Пусть $z_{1,n} \in K_n : \sup\{h(\xi) : |\xi - a_n| \le 1\} = h(z_{1,n})$, $z_{2,n} = a_n$. Поскольку последовательность кругов $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ стандартна, а $h(z)$ — функция относительно медленного роста, то

$$1 = \lim_{a_n \to \infty} \frac{h(z_{1,n})}{h(z_{2,n})} = \lim_{a_n \to \infty} \frac{\sup\{h(\xi) : |\xi - a_n| \le 1\}}{h(a_n)} = \lim_{a_n \to \infty} \frac{H(a_n)}{h(a_n)}.$$

В силу произвольности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \to \infty$, $n \to \infty$, заключаем отсюда, что

$$\lim_{z \to \infty} \frac{H(z)}{h(z)} = 1.$$

Таким образом, из теоремы 3 в одномерной ситуации следует, что утверждение А) следствия 2 теоремы 5 [5] справедливо при менее жестких предположениях, чем в [5].

Пусть g — 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая функция, $0 < g(\theta) < \infty$; $[\rho, g)$ — пространство всех целых функций, индикаторы которых при порядке ρ меньше, чем $g(\theta)$. Функция $h(z) = |z|^{\rho} g(\arg z)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, а $P(h)$ совпадает с $[\rho, g)$. Поэтому в силу известной связи между представляющими системами Миттаг-Леффлера в $H(G)$ (G — ρ-выпуклая область в $\mathbb{C}$ с ρ-опорной функцией $g(-\theta)$) и слабо достаточными для $[\rho, g)$ множествами (см., например, [2, гл. I, теорема 8]), следствие из теоремы 3 при $\gamma = 1$ дает (как указано в [4]) критерий для таких систем. Покажем, что аналогичная связь между γ-достаточными для $[\rho, g)$ множествами и определенным аппроксимационным свойством соответствующих систем Миттаг-Леффлера в $H(G)$ имеет место для произвольного γ, $0 < \gamma \le 1$.

В соответствии с общим определением множество $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$, γ-достаточно для $[\rho, g)$, если для любого $\alpha \in [0, \gamma)$ существуют $\delta \in [0, 1)$ и $C_\alpha < \infty$ такие, что

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|y(z)|}{\exp \delta |z|^{\rho} g(\arg z)} \le C_\alpha \sup_{k \ge 1} \frac{|y(\lambda_k)|}{\exp \alpha |\lambda_k|^{\rho} g(\arg \lambda_k)} \quad \forall y \in [\rho, g). \tag{11}$$

Условие (11), как легко видеть, равносильно тому, что поляра

$$\left[\left(\frac{E_\rho(\lambda_k z)}{\exp \alpha |\lambda_k|^{\rho} g(\arg \lambda_k)} \right)_{k=1}^{\infty} \right]^{\circ}$$

является ограниченным в $[\rho, g)$ множеством для всякого $\alpha \in [0, \gamma)$, где $E_\rho(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(1 + \frac{n}{\rho})$ — функция Миттаг-Леффлера, а двойственность между $H(G)$ и $[\rho, g)$ задается с помощью обобщенного преобразования Фурье — Бореля: $\varphi \in H(G)' \to \varphi_z(E_\rho(\lambda z)) = y(\lambda) \in [\rho, g)$. По теореме 1 из [6] последнее условие равносильно следующему: для любых $\alpha \in [0, \gamma)$, $f \in H(G)$ существуют $C_{\alpha,f} < \infty$, $b_{k,n} = b_{k,n}(\alpha, f)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{s_n} b_{k,n} \frac{E_\rho(\lambda_k z)}{\exp \alpha |\lambda_k|^{\rho} g(\arg \lambda_k)} \underset{n \to \infty}{\overset{(G)}{\longrightarrow}} f(z), \quad \sup_{n \ge 1} \sum_{k=1}^{s_n} |b_{k,n}| \le C_{\alpha,f},$$

где символ $\overset{(G)}{\to}$ означает равномерную сходимость на каждом компакте G. Положив $c_{k,n} = b_{k,n} / \exp \alpha |\lambda_k|^{\rho} g(\arg \lambda_k)$, $1 \le k \le s_n$, $n = 1, 2, \dots$, получим следующий результат.

Предложение 1. *Пусть G — ограниченная, содержащая начало координат ρ-выпуклая область в $\mathbb{C}$ с ρ-опорной функцией $g(-\theta)$. Множество $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ является γ-достаточным для $[\rho, g)$ тогда и только тогда, когда для любых $\alpha \in [0,\gamma)$, $f \in H(G)$ существуют $C_{\alpha,f} < \infty$, $c_{k,n} = c_{k,n}(\alpha, f)$ такие, что*

$$\sum_{k=1}^{s_n} c_{k,n} E_\rho(\lambda_k z) \xrightarrow[n\to\infty]{(G)} f(z), \quad \sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{s_n} |c_{k,n}| \exp \alpha |\lambda_k|^\rho g(\arg \lambda_k) \leq C_{\alpha,f}. \tag{12}$$

Чтобы получить некоторые следствия из условия (12), воспользуемся частным случаем одного результата из [7, теорема 2.4.1].

Лемма 5. *Пусть H — локально выпуклое пространство, $Y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов H, слабо сходящаяся к нулю. Если для каждой абсолютно суммируемой последовательности $c = (c_k)_{k=1}^{\infty}$ ($c \in l_1$) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k y_k$ слабо сходится в H, то всякий элемент x из замкнутой абсолютно выпуклой оболочки $\overline{\operatorname{aconv} Y}$ множества Y можно представить в виде ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k y_k$ $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k| \leq 1\right)$, слабо сходящегося к x.*

Следствие. *Если H — полное локально выпуклое пространство и $y_k \to 0$, $k \to \infty$, слабо в H, то для любого $x \in \overline{\operatorname{aconv} Y}$*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \leq 1,$$

ряд сходится абсолютно в H.

Доказательство следствия. Так как $y_k \to 0$, $k \to \infty$, слабо в H, то Y — слабо ограниченная последовательность в H. Следовательно, Y ограничена в H, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k y_k$ сходится абсолютно в H для каждой $c = (c_k)_{k=1}^{\infty} \in l_1$. В силу полноты H последний ряд сходится (и тем более слабо) в H. По лемме 5 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k y_k$ для любого $x \in \overline{\operatorname{aconv} Y}$ (ряд сходится к x слабо в H и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k| \leq 1$). Поскольку этот ряд сходится абсолютно в H, он сходится в H (очевидно, к x).

Напомним, что *абсолютно представляющей системой* [2] в локально выпуклом пространстве E называется последовательность $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ ненулевых элементов E такая, что всякий элемент x из E можно разложить в ряд $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, абсолютно сходящийся в E.

Следующий результат устанавливает связь между γ-достаточными множествами и абсолютно представляющими системами.

Предложение 2. *Пусть G и $g(-\theta)$ те же, что в предложении 1. Пусть, далее, $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \to \infty$, $k \to \infty$ и $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ — γ-достаточное множество для $[\rho, g)$. Тогда $(E_\rho(\lambda_k z))_{k=1}^{\infty}$ — абсолютно представляющая система в пространстве $(H(G), \tau_{\alpha G})$ для любого $\alpha < \gamma$.*

Доказательство. Обозначим через τ_j топологию равномерной сходимости внутри $\gamma_j G$, $\gamma_j \uparrow \gamma$. Пусть для любого $j \geq 1$

$$y_{k,j} = \frac{E_\rho(\lambda_k z)}{\exp \gamma_j |\lambda_k|^\rho g(\arg \lambda_k)}, \quad Y_j = (y_{k,j})_{k=1}^{\infty}.$$

Зафиксируем $j \geq 1$ и применим следствие леммы 5 к $H = H(\gamma_j G)$, $Y = Y_{j+1}$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,j} y_{k,j+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{k,j}| \leq 1,$$

для любого $x \in \overline{\operatorname{aconv} Y_{j+1}}$ (ряд сходится абсолютно в $H(\gamma_j G)$). Пусть теперь выполнено условие (12) и $f \in H(G)$. Тогда существует $C_{j,f} < \infty$ такое, что $f \in C_{j,f} \overline{\operatorname{aconv} Y_{j+1}}$. Следовательно,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,j} \frac{E_\rho(\lambda_k z)}{\exp \gamma_{j+1} |\lambda_k|^\rho g(\arg \lambda_k)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{k,j}| \leq C_{j,f}.$$

Итак, для любых $j \geq 1$, $f \in H(G)$ существует $C_{j,f} < \infty$, для которого

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,j} E_\rho(\lambda_k z), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k,j}| \exp \gamma_{j+1} |\lambda_k|^\rho g(\arg \lambda_k) \leq C_{j,f}.$$

Предложение доказано.

Неясно, будет ли в условиях предложения 2 справедлива импликация (Λ — γ-достаточное множество для $[\rho, g)$) $\Rightarrow$ ($(E_\rho(\lambda_k z))_{k=1}^{\infty}$ — абсолютно представляющая система в пространстве $(H(G), \tau_{\gamma G})$). Легко, однако, показать, что обратная импликация, вообще говоря, неверна. Выберем с этой целью последовательность Λ так, чтобы $(E_\rho(\lambda_k z))_{k=1}^{\infty}$ была абсолютно представляющей системой в $H(\gamma G)$, но не была полной в $H(G)$. Для этого достаточно [2, гл. III, § 1, теорема 7] взять в качестве Λ множество всех простых нулей целой функции $L(\lambda)$, отличной от тождественного нуля, при условии, что других нулей у $L(\lambda)$ нет, $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост, ее индикатор (при порядке ρ) равняется $\gamma g(\theta)$ и

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left[\frac{1}{|\lambda_n|^\rho} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} + \gamma g(\arg \lambda_n) \right] \leq 0.$$

Тогда $(E_\rho(\lambda_k z))_{k=1}^{\infty}$ — абсолютно представляющая система в $(H(G), \tau_{\gamma G})$, но Λ не является γ-достаточным для $[\rho, g)$ множеством, так как в противном случае по предложению 1 система $(E_\rho(\lambda_k z))_{k=1}^{\infty}$ была бы полна в $H(G)$. Отсюда следует, что обращение предложения 2 неверно.

Обозначим символом $\mathscr{M}(\Lambda)$ множество всех отличных от тождественного нуля целых функций $f(z)$ таких, что $f(\lambda_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Предложение 2 позволяет получить некоторую оценку снизу для всякой функции $f(z) \in \mathscr{M}(\Lambda)$ в ситуации, когда Λ — γ-достаточное для $[\rho, g)$ множество. В этом случае $(E_\rho(\lambda_k z))_{k=1}^{\infty}$ — абсолютно представляющая система в $(H(G), \tau_{\alpha G})$ $\forall \alpha < \gamma$, и поэтому (см., например, [2, гл. III, § 1, лемма 1]) в области αG для любого $\alpha < \gamma$ имеется абсолютное нетривиальное разложение нуля по системе $(E_\rho(\lambda_k z))_{k=1}^{\infty}$. Но тогда, обозначив

$$M_f(r) = \sup\{|f(z)| : z \in C_r\}, \quad C_r = \{z : |z|^\rho g(\arg z) = r^\rho\},$$

$\delta = \min\{g(\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$, такими же рассуждениями, как в [2, гл. III, § 1, п. 4], получаем, что

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} \geq \delta\alpha$$

для любого $\alpha < \gamma$.

Таким образом, из предложения 2 вытекает

Следствие. *Пусть g — положительная 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая функция при каком-либо $\rho > 0$, и пусть $\delta = \min\{g(\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$. Пусть множество $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ γ-достаточно для $[\rho, g)$. Пусть целая функция f такова, что*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} < \delta\gamma$$

и $f(\lambda_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $f(z) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schneider D. M.* Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 197. P. 161–180.
2. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 1. С. 73–126.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 3. С. 539–565.
4. *Абанин А. В.* О некоторых признаках слабой достаточности // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 4. С. 442–454.
5. *Коробейник Ю. Ф.* Максимальные и γ-достаточные множества. Приложения к целым функциям. I // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1990. Вып. 54. С. 42–59.
6. *Шерстюков В. Б.* Об одном классе полных систем // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. 1997. Т. 2. С. 38–40.
7. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.

Статья поступила 5 мая 1999 г.

г. Таганрог Ростовской обл.
Ростовский гос. университет