Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.946+539.3

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

С. А. Назаров

Аннотация: Найдены и обоснованы асимптотические представления первых серий собственных чисел Λ задачи о трехмерной пластине с малой толщиной h. Серии $\Lambda_2^{(n)} = O(h^2)$ и $\Lambda_0^{(n)} = O(h^0)$ изучены в максимальной общности — произвольные анизотропия и неоднородность упругих свойств. Описано взаимодействие поперечных и продольных колебаний, отвечающих $\Lambda_2^{(n)}$, для пластин несимметричного строения, например, слоистых. При помощи той же асимптотической процедуры воспроизведены модели высокочастотных колебаний изотропных однородных пластин (т. е. $\Lambda_{-2}^{(k,n)} = O(h^{-2})$, $k, n = 1, 2, \dots$), однако обосновать такие асимптотики не удалось. Разрушение формальных асимптотических представлений в последнем случае связывается с краевыми эффектами — появлением в пограничном слое незатухающих быстроосциллирующих волн, проникающих вовнутрь пластины и искажающих асимптотические структуры, принятые в прикладных теориях. Библиогр. 28.

1. Введение. Изучение деформации и колебаний упругих пластин как двумерных объектов имеет давнюю историю. К настоящему времени изначально прикладные теории, полученные на физическом уровне строгости, нашли свое математическое обоснование и развитие (см. [1–6] и др.). Тем не менее некоторые вопросы, важные как в чисто теоретическом плане, так и для инженерной практики, до сих пор не рассмотрены в полной мере. В первую очередь это относится к задачам о собственных колебаниях тонких тел. В настоящей статье, посвященной исследованию собственных чисел краевой задачи теории упругости в тонком трехмерном цилиндре (пластине), получены асимптотические формулы, обнаруживающие стратифицированную структуру спектра и учитывающие взаимодействие продольных и поперечных колебаний, а также обсуждаются краевые эффекты, связанные с явлением пограничного слоя.

Приведем постановку задачи, используя при этом матричную, а не тензорную запись уравнений, более удобную для наших целей. Пусть ω — область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром $\partial\omega$, и $\Omega_h = \omega \times (-h/2, h/2) \subset \mathbb{R}^3$, где $h \in (0, 1]$ — малый параметр. Масштабированием сведем характерный размер области ω к единичному, так что толщина h и декартовы координаты $x = (y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ станут безразмерными. Вектор смещений u интерпретируем как столбец $(u_1, u_2, u_3)^t$ (t — знак транспонирования) и образуем шестимерный столбец деформаций

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \alpha^{-1}\varepsilon_{12}, \varepsilon_{33}, \alpha^{-1}\varepsilon_{23}, \alpha^{-1}\varepsilon_{31})^t, \tag{1}$$

где $\varepsilon_{jk} = 2^{-1}(\partial_j u_k + \partial_k u_j), \partial_j = \partial/\partial x_j$, а множитель $\alpha^{-1} = 2^{1/2}$ введен для того, чтобы совпали естественные нормы столбца $\varepsilon(u)$ и тензора (ε_{jk}) деформаций.

Нетрудно проверить равенство $\varepsilon(u) = D(\nabla_x)^t u$, в котором $\nabla_x = \mathrm{grad}$ и

$$D(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \alpha\xi_2 & 0 & 0 & \alpha\xi_3 \\ 0 & \xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 & \alpha\xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_3 & \alpha\xi_2 & \alpha\xi_1 \end{pmatrix}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^t \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

По формуле $\sigma(u) = A\varepsilon(u)$ (закон Гука) определяется подобный (1) столбец напряжений. Матрица-функция A размером 6×6 является симметрической и положительно определенной и зависит от «быстрой» поперечной $\zeta = h^{-1}z$ и «медленных» продольных $y = (y_1, y_2)^t$ переменных. Как правило, эти зависимости считаются для простоты гладкими (см. комментарии в п. 3).

При помощи указанных обозначений задача о свободных колебаниях пластины Ω_h с жестко защемленной боковой поверхностью $\Gamma_h = \partial\omega \times (-h/2, h/2)$ записывается следующим образом:

$$D(-\nabla_x)A(y, h^{-1}z)D(\nabla_x)^t u(x) = \Lambda\rho(y, h^{-1}z)u(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{3}$$

$$D(\pm e^3)A(y, \pm 1/2)D(\nabla_x)^t u(y, \pm h/2) = 0, \quad y \in \omega, \tag{4}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h. \tag{5}$$

Здесь e^j — орт оси x_j, ρ — плотность упругого материала, положительная и гладко зависящая от y и ζ, а Λ — спектральный параметр ($\Lambda^{1/2}$ — частота колебаний). Краевые условия Неймана (4) означают, что основания $\omega^\pm = \omega \times \{\pm h/2\}$ пластины свободны от напряжений.

Известно, что в силу неравенства Корна (см. [7–10] и др.) собственные числа задачи (3)–(5) являются нормальными и образуют последовательность

$$0 < \Lambda^{(1)} \le \Lambda^{(2)} \le \dots \le \Lambda^{(n)} \le \dots \to +\infty,$$

а соответствующие собственные векторы $u^{(n)}$ можно ортонормировать в пространстве $L_2(\Omega_h)^3$ с весом ρ (верхний индекс указывает количество компонент, но не пишется под знаком нормы). В следующих двух разделах отыскиваются серии собственных чисел, имеющих асимптотики

$$\Lambda = h^2\Lambda_2 + o(h^2), \quad \Lambda = h^0\Lambda_0 + o(1). \tag{6}$$

Они отвечают поперечно-продольным и чисто продольным колебаниям пластины. Отметим, что в случае распадения результирующей задачи (см. замечание 1) возбуждение продольных колебаний на низких частотах (т. е. $\Lambda^{1/2} = O(h^1)$) не происходит или описывается младшими асимптотическими членами. Обоснование асимптотических представлений (6) проводится в п. 4.

В п. 5 реализуется и развивается подход [11, 12] к построению моделей высокочастотных колебаний изотропных и однородных пластин, порождающих бесконечный набор серий собственных чисел

$$\Lambda \sim h^{-2}\Lambda_2 + h^0\Lambda_0. \tag{7}$$

На том же формальном уровне обнаружены новые серии

$$\Lambda \sim h^{-2}\Lambda^2 \pm h^{-1}\Lambda_{-1}, \tag{8}$$

возникающие при определенном соотношении параметров задачи (критическая ситуация) и обусловленные взаимодействием поперечных и продольных колебаний — высокочастотных, так как длина волны сравнима с толщиной пластины, малым параметром h.

Попытка оправдать асимптотики (7) и (8) в п. 6 не привела к успеху. Формальная причина — быстрая осцилляция приближенного решения в поперечном направлении (в случаях (6) зависимость от ζ полиномиальная). Однако при внимательном рассмотрении оказывается, что уже сама постановка краевых условий на границе $\partial\omega$ плоского изображения пластины не столь очевидна, как для низко- и среднечастотных колебаний. Дело в том, что в ситуациях (7) и (8) построение экспоненциального пограничного слоя вблизи боковой поверхности пластины невозможно и его составляющие, быстро осциллирующие в продольных направлениях, разрушают обнаруженные асимптотические структуры. Тем самым двумерные модели, предложенные в [11, 12], остаются без обоснования и, более того, возникает подозрение, что они нуждаются в ревизии.

Отметим, наконец, что множественность серий собственных чисел с различающимся поведением при $h \to 0$ обусловливает усложненную структуру спектра задачи (3)–(5): при упорядочении в указанную выше монотонную последовательность $\{\Lambda^{(n)}\}$ серии перемешиваются (сравни с наблюдениями, сделанными в [13–15]).

Как недавно стало известно автору, похожие исследования спектра изотропных однородных пластин проводятся М. Дож, И. Джорджевичем и А. Рёссле.

2. Случай $\Lambda = O(h^2)$. Переход к быстрой переменной $\zeta = h^{-1}z$ сопровождается расщеплением дифференциальных операторов L и $B^{\pm}$, фигурирующих в (3) и (4),

$$\begin{gathered} L(h, x, \nabla_x) = h^{-2}L^0(y, \zeta, \partial_\zeta) + h^{-1}L^1(y, \zeta, \nabla_y, \partial_\zeta) + h^0 L^2(y, \zeta, \nabla_y), \\ B^{\pm}(h, y, \nabla_x) = h^{-1}B^{0\pm}(y, \partial_\zeta) + h^0 B^{1\pm}(y, \nabla_y). \end{gathered} \tag{9}$$

Используя обозначения $\mathbb{D}_y = D(\nabla_y, 0)$, $\mathbb{D}_1 = D(e^3)$, $\mathbb{D}_\zeta = \mathbb{D}_1\partial_\zeta$, $\partial_\zeta = \partial/\partial\zeta$, имеем

$$\begin{gathered} L^0 = -\mathbb{D}_\zeta A\mathbb{D}_\zeta^t, \quad L^1 = -\mathbb{D}_\zeta A\mathbb{D}_y^t - \mathbb{D}_y A\mathbb{D}_\zeta^t, \quad L^2 = -\mathbb{D}_y A\mathbb{D}_y^t, \\ B^{0\pm} = \pm\mathbb{D}_1 A\mathbb{D}_\zeta^t, \quad B^{1\pm} = \pm\mathbb{D}_1 A\mathbb{D}_y^t. \end{gathered} \tag{10}$$

Выделение главных (относительно h) частей операторов приводит к задаче Неймана для системы обыкновенных дифференциальных (по ζ) уравнений с параметром $y \in \omega$ на отрезке $\Upsilon = (-1/2, 1/2)$:

$$L(y, \zeta, \partial_\zeta)U(y, \zeta) = F(y, \zeta), \quad \zeta \in \Upsilon; \quad B^{\pm}(y, \partial_\zeta)U(y, \pm1/2) = G^{\pm}(y). \tag{11}$$

Информация о *предельной* задаче (11) получается, например, на основе *формальной положительности* [8] оператора системы теории упругости или его *полиномиального свойства* [16]. Во-первых, решение существует лишь при выполнении условий разрешимости

$$(F, e^p)_\Upsilon + G_p^+ + G_p^- = 0, \quad p = 1, 2, 3, \tag{12}$$

где $(\ ,\ )_\Xi$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(\Xi)^m$, скалярном или векторном. Во-вторых, решение определено с точностью до постоянного слагаемого из $\mathbb{R}^3$ (при фиксированном y). В-третьих, решение, нормированное условиями

$$(U, e^p)_\Upsilon = 0, \quad p = 1, 2, 3, \tag{13}$$

становится единственным, наследует гладкость по переменным y от данных задачи и удовлетворяет оценке

$$\|U; H^2(\Upsilon \to H^s(\omega))\| \le c\Big(\|F; L_2(\Upsilon \to H^s(\omega))\| + \sum_{\pm} \|G^{\pm}; H^s(\omega)\|\Big),$$

в которой $s = 0, 1, \dots$ и $H^s(\Upsilon \to \mathscr{B})$ — пространство Соболева абстрактных функций со значениями в банаховом пространстве $\mathscr{B}$ (как обычно, $L_2 = H^0$).

Согласно [17] упоминавшееся полиномиальное свойство системы теории упругости обеспечивает асимптотический анзац

$$u(x) \sim h^{-2}\mathscr{U}^{-2}(y) + h^{-1}\mathscr{U}^{-1}(y,\zeta) + h^0\mathscr{U}^0(y,\zeta) + \dots \tag{14}$$

и его начальные члены

$$\mathscr{U}^{-2}(y) = w_3(y)e^3, \quad \mathscr{U}^{-1}(y,\zeta) = \sum_{i=1}^{2}\{w_i(y) - \zeta\partial_i w_3(y)\}\, e^i. \tag{15}$$

Вектор $w = (w_1, w_2, w_3)^t$ интерпретируется как смещения, осредненные по толщине пластины, причем различие множителей $h^{\cdots}$ при поперечной и продольных составляющих имеет физическую подоплеку: пластину легче изогнуть, чем растянуть. Отличные от [17] доводы к формулам (14), (15) можно найти в [2–4].

Сделав замену спектрального параметра $\Lambda \mapsto \Lambda_2 = h^{-2}\Lambda$, подставим разложения (14), (9) в соотношения (3), (4) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях h. В результате приходим к рекуррентной последовательности задач вида (11)

$$\begin{gathered} L^0\mathscr{U}^j = -L^1\mathscr{U}^{j-1} - L^2\mathscr{U}^{j-2} + \delta_{j,2}\Lambda_2\rho\mathscr{U}^{-2} \equiv F^j \quad \text{на} \quad \Upsilon, \\ B^{0\pm}\mathscr{U}^j = -B^{1\pm}\mathscr{U}^{j-1} \equiv G^{j\pm} \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1/2. \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь $j = -2, \dots, 2$ и $\mathscr{U}^{-3} = \mathscr{U}^{-4} = 0$. Ясно, что при $j = -2$ равенства (16) выполнены. Для того чтобы проверить их при $j = -1$, нужно воспользоваться формулами (10) и соотношением

$$\mathbb{D}_y e^3 = \sum_{i=1}^{2}\mathbb{D}_1 e^i \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{2}(\mathbb{D}_\zeta\zeta)e^i\frac{\partial}{\partial y_i}, \tag{17}$$

вытекающим из определения оператор-матриц, т. е. из формулы (2). При учете (10) и (15) прямые вычисления показывают, что

$$\begin{gathered} F^0(y,\zeta) = \mathbb{D}_\zeta A(y,\zeta)\mathscr{Y}(\zeta)\mathscr{D}(\nabla_y)^t w(y), \\ G^{0\pm}(y) = \mp\mathbb{D}_1 A(y, \pm 1/2)\mathscr{Y}(\pm 1/2)\mathscr{D}(\nabla_y)^t w(y); \end{gathered} \tag{18}$$

причем $\mathscr{D}(\nabla_y)$ и $\mathscr{Y}(\zeta)$ — матрицы размеров 3×6 и 6×6,

$$\mathscr{D}(\nabla_y) = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & \alpha\partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \alpha\partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_1^2 & \partial_2^2 & \alpha^{-1}\partial_1\partial_2 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{Y}(\zeta) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & -\zeta\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{O}_3 & \mathbb{O}_3 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

а $\mathbb{I}_q$ и $\mathbb{O}_q$ — единичная и нулевая матрицы размера $q \times q$. Для $\mathscr{W} \in H^1(\Upsilon)^6$ имеем

$$(\mathbb{D}_\zeta\mathscr{W}, e^j)_\Upsilon + \sum_\pm \mp(e^j)^t\mathbb{D}_1\mathscr{W}(\pm 1/2) = (\mathscr{W}, \mathbb{D}_\zeta^t e^j)_\Upsilon = 0. \tag{20}$$

Следовательно, условия разрешимости (12) задачи (16) при $j = 0$ выполнены, и ее решение представимо в виде

$$\mathscr{U}^0(y,\zeta) = \mathscr{V}(y,\zeta)\mathscr{D}(\nabla_y)^t w(y), \tag{21}$$

где матрица $\mathscr{V}$ размера 3×6 удовлетворяет соотношениям

$$-\mathbb{D}_\zeta A\mathbb{D}_\zeta^t\mathscr{V} = \mathbb{D}_\zeta A\mathscr{Y} \quad \text{на} \quad \Upsilon; \pm\mathbb{D}_1 A\mathbb{D}_\zeta^t\mathscr{V} = \mp\mathbb{D}_1 A\mathscr{Y} \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1/2. \tag{22}$$

Иными словами, столбцы матрицы $\mathscr{V}$ являются решениями задачи (11) со специальными правыми частями. Подчинив эти столбцы условиям ортогональности (13), заключаем, что $\mathscr{V}$ — гладкая матрица-функция.

Рассмотрим теперь задачу (16) при $j = 1$. Интегрируя по частям при использовании формул (17) и (22), (20), обнаруживаем, что для правых частей F^1 и $G^{1\pm}$ выполнено условие (12), $p = 3$. В силу (18) и (21) другие два условия записываются в виде

$$(e^i)^t \mathbb{D}_y \int_{-1/2}^{1/2} A(y,\zeta)\left(\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{V}(y,\zeta) + \mathscr{Y}(\zeta)\right) d\zeta \mathscr{D}(\nabla_y)^t w(y) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{23}$$

В задаче (16), где $j = 2$, впервые появляется спектральный параметр Λ_2. При обработке условий ее разрешимости (12) ограничимся случаем $p = 3$. Именно это условие не было востребовано на предыдущем шаге, и при помощи равенств (20), (17), (16) с $j = 1$ и (18), (21) оно преобразуется в такое:

$$\begin{aligned}
\bar\rho\lambda w_3 &= \left(\mathbb{D}_\zeta A \mathbb{D}_y^t \mathscr{U}^1, e^3\right)_\Upsilon - \sum_\pm \pm (e^3)^t \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_y^t \mathscr{U}^1\big|_{\zeta=\pm 1/2} \\
&\qquad + \int_{-1/2}^{1/2} (e^3)^t \mathbb{D}_y A\left(\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{U}^1 + \mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{U}^0\right) d\zeta \\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{-1/2}^{1/2} (\mathbb{D}_\zeta^t \zeta e^i)^t A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{U}^1 + \mathbb{D}_y^t \mathscr{U}^0)\, d\zeta \\
&= -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i}\Big[\left(\zeta \mathbb{D}_\zeta A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{U}^1 + \mathbb{D}_y^t \mathscr{U}^0), e^i\right)_\Upsilon - \frac{1}{2}\sum_\pm (e^i)^t \mathbb{D}_1 A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{U}^1 + \mathbb{D}_y^t \mathscr{U}^0)\big|_{\zeta=\pm\frac{1}{2}}\Big] \\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\zeta \mathbb{D}_y A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{U}^0 + \mathbb{D}_y^t \mathscr{U}^{-1}), e^i\right)_\Upsilon \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \left\{\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \zeta (e^i)^t \mathbb{D}_y\right\} A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{V} + \mathscr{Y}) d\zeta \mathscr{D}(\nabla_y)^t w(y).
\end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $\bar\rho(y)$ — среднее функции $\Upsilon \ni \zeta \mapsto \rho(y,\zeta)$.

Для того чтобы придать соотношениям (23) и (24) краткую форму, заметим, что в (23) множителем при интеграле служит i-я строка 3×6-матрицы $\mathscr{D}(\nabla_y)\mathscr{Y}(\zeta)^t$, а выражение из фигурных скобок в (24) совпадает с третьей строкой той же матрицы. Таким образом, упомянутые соотношения приобретают вид системы дифференциальных уравнений

$$\mathscr{D}(-\nabla_y)\mathscr{M}(y)\mathscr{D}(\nabla_y)^t w(y) = \Lambda_2 \bar\rho(y) e^3 w_3(y), \quad y \in \omega, \tag{25}$$

а матрица $\mathscr{M}(y)$ размера 6×6 равна интегралу

$$\int_{-1/2}^{1/2} \mathscr{Y}(\zeta)^t A(y,\zeta)\left(\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{V}(y,\zeta) + \mathscr{Y}(\zeta)\right) d\zeta. \tag{26}$$

Вытекающая из (26) и (22) формула

$$\mathscr{M}(y) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{V}(y,\zeta) + \mathscr{Y}(\zeta)\right)^t A(y,\zeta) \left(\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{V}(y,\zeta) + \mathscr{Y}(\zeta)\right) d\zeta$$

означает, что $\mathscr{M}(y)$ — матрица Грама, симметрическая и положительно определенная (столбцы матрицы $\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{V} + \mathscr{Y}$ линейно независимы в $L_2(\Upsilon)^6$). Таким образом, оператор $\mathscr{D}(-\nabla_y)\mathscr{M}\mathscr{D}(\nabla_y)$ наследует от оператора $L(h,x,\nabla_x)$ формальную положительность [8] и полиномиальное свойство [16]. Отсюда вытекает следующее утверждение для системы (25), снабженной в соответствии с (5) условиями Дирихле

$$w(y) = 0, \quad \partial_\nu w_3(y) = 0, \quad y \in \partial\omega, \tag{27}$$

где ∂_ν — производная вдоль внешней нормали к контуру $\partial\omega$.

Лемма 1. *Собственные числа* $\Lambda_2^{(n)}$ *задачи* (25), (27) *образуют последовательность*

$$0 < \Lambda_2^{(1)} \leq \Lambda_2^{(2)} \leq \cdots \leq \Lambda_2^{(n)} \leq \cdots \to +\infty, \tag{28}$$

а соответствующие собственные векторы могут быть ортонормированы в пространстве $L_2(\omega)^3$ *с весом* $(0,0,\bar\rho)^t$.

В первой из асимптотических формул (6) фигурируют именно собственные числа $\Lambda_2^{(n)}$ результирующей задачи (25), (27).

3. Случай $\Lambda = O(1)$. Алгорифм определения результирующей задачи, по существу, такой же, как и в предыдущем разделе. Единственное отличие связано с исчезновением компоненты w_3. Дело в том, что отсутствие множителя h^{-2} в замене спектрального параметра $\Lambda \mapsto \Lambda_0$ привносит в правую часть F^0 задачи (16) с $j = 0$ слагаемое $\Lambda_0 \rho \mathscr{U}^{-2}$ и поэтому условие разрешимости (12), $p = 3$, превращается в равенство $\Lambda_0 \bar\rho w_3 = 0$ или $w_3 = 0$ (поскольку $\bar\rho > 0$ и интересным является случай $\Lambda_0 > 0$). По тем же причинам вектор F^1 в (16), $j = 1$, приобретает слагаемое $\Lambda_0 \rho(e^1 w_1 + e^2 w_2)$, а значит, в (23) добавляется член $\Lambda_0 \bar\rho(y) w_i(y)$. В итоге для случая $\Lambda = O(1)$ получаем такую результирующую задачу:

$$\mathscr{D}'(-\nabla_y)\mathscr{M}'(y)\mathscr{D}'(\nabla_y)^t w'(y) = \Lambda_0 \bar\rho(y) w'(y), \quad y \in \omega; \quad w'(y) = 0, \quad y \in \partial\omega. \tag{29}$$

Здесь $w' = (w_1, w_2)^t$, а $\mathscr{M}'(y)$ и $\mathscr{D}'(\nabla_y)$ — верхние левые блоки размеров 3×3 и 2×3 соответственно. Собственные числа $\Lambda_0^{(n)}$ результирующей задачи (29) присутствуют в правой части второй формулы (6), и для них верно утверждение, подобное лемме 1.

Лемма 2. *Собственные числа* $\Lambda_0^{(n)}$ *задачи* (29) *образуют последовательность*

$$0 < \Lambda_0^{(1)} \leq \Lambda_0^{(2)} \leq \cdots \leq \Lambda_0^{(n)} \leq \cdots \to +\infty, \tag{30}$$

а соответствующие собственные векторы могут быть ортонормированы в пространстве $L_2(\omega)^2$ *с весом* $\bar\rho$.

Обсудим проведенные асимптотические построения. Как станет понятно в п. 4, центральным моментом при обосновании асимптотики в случае $\Lambda = O(h^2)$ оказывается условие ортогональности

$$(F^2, e^3)_\Upsilon + G_3^{2+} + G_3^{2-} = 0, \tag{31}$$

приведшее к соотношению (24), а затем и к третьей строке системы (25). При выводе системы в (29) оно не было востребовано в полном согласии с тем, что оправдание асимптотики $\Lambda = h^0\Lambda_0^{(n)} + \dots$ обходится без ссылок на (31).

Гладкость матрицы A по переменной ζ не является принципиальным ограничением — все формулы без труда приспосабливаются, например, к случаю слоистых пластин, в котором A — кусочно постоянная матрица-функция на Υ. Дело в том, что задачи (16) можно переформулировать как интегральные тождества

$$\begin{aligned}\big(A\mathbb{D}_\zeta^t\mathscr{U}^j, \mathbb{D}_\zeta^t v\big)_\Upsilon = &-\big(\mathbb{D}_y^t A\big[\mathbb{D}_\zeta^t\mathscr{U}^{j-1} + \mathbb{D}_y^t\mathscr{U}^{j-2}\big], v\big)_\Upsilon \\ &- \big(A\mathbb{D}_y^t\mathscr{U}^{j-1}, \mathbb{D}_\zeta^t v\big)_\Upsilon + \delta_{j,2}\Lambda_2(\rho\mathscr{U}^{-2}, v)_\Upsilon \quad \forall v \in H^1(\Upsilon)^3 \qquad (32)\end{aligned}$$

и для обоснования асимптотики применяются именно такие, обобщенные, постановки задач. Из (32) исчезли необходимые при классической формулировке условия сопряжения на поверхностях скачков упругих модулей. Имеется и иной способ избежать присоединения условий сопряжения к (16): достаточно сгладить отображение $\zeta \mapsto A(y,\zeta)$ в δ-окрестностях точек разрыва и в окончательных формулах перейти к пределу при $\delta \to +0$. Несложно убедиться в том, что представление (26) для $\mathscr{M}(y)$ выдерживает подобный предельный переход. К сожалению, этот трюк не работает при оправдании асимптотики, и все равно приходится обращаться к интегральным тождествам (32).

Замечание 1. Если матрица Гука A не зависит от переменной ζ, то задача (22) решается явно:

$$\mathscr{V}(y,\zeta) = T^{-1}A_{(22)}(y)^{-1}A_{(21)}(y)\left(-\zeta\mathbb{I}_3, \left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{24}\right]\mathbb{I}_3\right).$$

Здесь T и $A_{(ik)}$ — матрицы размера 3×3,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(y) = \begin{pmatrix} A_{(11)}(y), & A_{(12)}(y) \\ A_{(21)}(y), & A_{(22)}(y) \end{pmatrix}. \qquad (33)$$

Кроме того, согласно (19) и (26) матрица $\mathscr{M}(y)$ становится блочнодиагональной,

$$\mathscr{M}(y) = \operatorname{diag}\left\{\mathscr{M}'(y), \frac{1}{12}\mathscr{M}'(y)\right\}, \quad \mathscr{M}' = A_{(11)} - A_{(12)}A_{(22)}^{-1}A_{(21)}. \qquad (34)$$

В частном случае однородной изотропной пластины блоки $A_{(11)}, A_{(22)}$, $A_{(21)} = A_{(12)}^t$ матрицы Гука A имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (35)$$

где $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$ — упругие константы Ламе. При этом в силу (34) матрица $\mathscr{M}'$ получается из блока $A_{(11)}$ заменой λ на $\lambda' = 2\lambda\mu(\lambda+2\mu)^{-1}$. •

Если матрица $\mathscr{M}$ блочнодиагональная (см., к примеру, (34)) и результирующая задача (25), (27) распадается на две отдельные задачи о продольной деформации пластины и ее изгибе, то в любом решении w задачи (25), (27) первые две компоненты равны нулю и, значит, собственным числам $\Lambda = O(h^2)$ отвечают в главном изгибные колебания пластины. Собственные числа $\Lambda = O(h^0)$ всегда связаны с продольными колебаниями (в (29) $w_3 = 0$). В частности, для однородной изотропной пластины в левой части (29) располагается двумерный оператор Ламе с константами μ и λ', а в третьей строке системы (25) — (бигармонический) оператор Жермен с приведенной цилиндрической жесткостью $D = \mu(\lambda+\mu)[3(\lambda+2\mu)]^{-1}$.

Для пластин, неоднородных в поперечном направлении, матрица $\mathscr{M}$ может быть заполненной целиком (это случается, например, для слоистых пластин несимметричного строения). В этой ситуации первые компоненты собственных векторов задачи (25), (27), вообще говоря, ненулевые, т. е. для собственных чисел $\Lambda = O(h^2)$ характерны и продольные и поперечные колебания.

4. Обоснование асимптотик (6). Сообщим пару неравенств, используемых в этом пункте.

Лемма 3. *Пусть вектор-функция $u \in H^1(\Omega_h)^3$ удовлетворяет условиям Дирихле (5). Тогда справедливы неравенства*

$$\int\limits_{\Omega_h} \Bigg\{ \sum_{i=1}^{2} \bigg(|\nabla_y u_i|^2 + h^2 d_h^{-2} \bigg(\bigg|\frac{\partial u_i}{\partial z}\bigg|^2 + \bigg|\frac{\partial u_3}{\partial y_i}\bigg|^2 \bigg) + d_h^{-2}|u_i|^2 \bigg) + |\partial_z u_3|^2 + h^2 d_h^{-4}|u_3|^2 \Bigg\} \, dydz \le c\|D^t u; L_2(\Omega_h)\|^2, \tag{36}$$

$$h^{-1}\|u - \bar{u}; L_2(\Omega_h)\| + \|D(\nabla_y, 0)^t(u - \bar{u}_3 e^3); L_2(\Omega_h)\| \le C\|D^t u; L_2(\Omega_h)\|, \tag{37}$$

в которых постоянные c и C не зависят от u и $h \in (0,1]$; $d_h(y) = h + \operatorname{dist}\{y, \partial\omega\}$, $D^t = D(\nabla_x)^t$ и

$$\bar{u}(y) = \frac{1}{h} \int\limits_{-1/2}^{1/2} u(y,z)\, dz.$$

Доказательство весового неравенства Корна (36) приведено в [18] (см. также [2], где получено аналогичное неравенство без весовых множителей $d_h^{\cdot\cdot}$). Проверка соотношения (37) проста и проводится при помощи тех же приемов, что и в [19]. •

Основой для сравнения найденных асимптотических приближений (6) с истинным спектром задачи (3)–(5) служит следующее общее утверждение, почерпнутое из [20].

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и $\mathscr{A}$ — симметрический компактный полуограниченный оператор в $\mathscr{H}$. Пусть еще $U \in \mathscr{H}$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $\|U; \mathscr{H}\| = 1$, $\|\mathscr{A}U - \beta U; \mathscr{H}\| = \delta$. Тогда в δ-окрестности числа β имеется хотя бы одна точка спектра оператора $\mathscr{A}$.*

Займемся собственно оправданием асимптотики, начиная с первого из случаев (6). При $\varkappa \in \mathbb{R}$ под $\mathscr{H}_\varkappa$ понимаем пространство вектор-функций из соболевского класса $H^1(\Omega_h)^3$, удовлетворяющих условию (5) и имеющих норму

$$\|u\|_\varkappa \equiv \|u; \mathscr{H}_\varkappa\| = (\mathbf{I}u\mathbf{I}^2 + \|D^t u; L_2(\Omega_h)\|^2 + h^\varkappa \|\rho u; L_2(\Omega_h)\|^2)^{1/2}, \tag{38}$$

где $\mathbf{I}u\mathbf{I}^2$ — интеграл из левой части (36). С задачей (3)–(5) свяжем оператор $\mathscr{O}_\varkappa$ в $\mathscr{H}_\varkappa$, действующий по формуле

$$\langle \mathscr{O}_\varkappa u, v \rangle_\varkappa = (AD^t u, D^t v)_{\Omega_h} \quad \forall v \in \mathscr{H}_\varkappa$$

(слева стоит скалярное произведение в $\mathscr{H}_\varkappa$; $\|u\|^2_\varkappa = \langle u, u\rangle_\varkappa$). Благодаря провозглашенным свойствам матрицы A и в силу неравенства Корна (36) оператор $\mathscr{O}_\varkappa$ симметрический, положительно определенный и обратимый. То же самое можно сказать и об операторе $\mathscr{O}_\varkappa + h^\varkappa \mathscr{E}_{\varkappa,\rho}$, где $\mathscr{E}_{\varkappa,\rho}$ — симметрический компактный оператор в $\mathscr{H}_\varkappa$, заданный равенством $\langle \mathscr{E}_{\varkappa,\rho} u, v\rangle_\varkappa = (\rho u, v)_{\Omega_h}$. Более того, согласно (38) норма обратного $(\mathscr{O}_\varkappa + h^\varkappa \mathscr{E}_{\varkappa,\rho})^{-1} : \mathscr{H}_\varkappa \to \mathscr{H}_\varkappa$ ограничена постоянной, не зависящей от h. Все перечисленные свойства, разумеется, наследуются операторами $\mathscr{O}_{\varkappa,\rho} = \rho^{-1/2}\mathscr{O}_\varkappa \rho^{-1/2}$ и $\mathscr{O}_{\varkappa,\rho} + h^\varkappa \mathscr{E}_{\varkappa,1}$, действующими в пространстве $\mathscr{H}_{\varkappa,\rho}$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\varkappa,\rho} = \langle \rho^{-1/2}\mathbf{u}, \rho^{-1/2}\mathbf{v}\rangle_\varkappa$ и нормой $\|\mathbf{u}\|_{\varkappa,\rho} = \|\rho^{-1/2}\mathbf{u}\|_\varkappa$.

Спектральную задачу (3)–(5) можно переформулировать как уравнение $\mathscr{O}_{\varkappa,\rho} u_\rho = \Lambda \mathscr{E}_{\varkappa,1} u_\rho$, в котором $u_\rho = \rho^{-1/2} u \in \mathscr{H}_{\varkappa,\rho}$. Последнее уравнение эквивалентно такому:

$$(\Lambda + h^\varkappa)^{-1} u_\rho = (\mathscr{O}_{\varkappa,\rho} + h^\varkappa \mathscr{E}_{\varkappa,1})^{-1} \mathscr{E}_{\varkappa,1} u_\rho \equiv \mathscr{A}_{\varkappa,\rho} u_\rho. \tag{39}$$

Так как $\langle \mathscr{E}_{\varkappa,1}\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\varkappa,\rho} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_h}$, нетрудно убедиться в том, что оператор $\mathscr{A}_{\varkappa,\rho} : \mathscr{H}_{\varkappa,\rho} \to \mathscr{H}_{\varkappa,\rho}$ удовлетворяет условиям леммы 4.

В обсуждаемом случае $\Lambda = O(h^2)$ положим $\varkappa = 2$. В качестве асимптотического приближения к собственному вектору задачи (3)–(5) возьмем сумму

$$\mathscr{U}(x) = h^{-2}\mathscr{U}^{-2}(y) + h^{-1}\mathscr{U}^{-1}(y,\zeta) + h^0 X_h(y)\mathscr{U}^0(y,\zeta), \tag{40}$$

где $\mathscr{U}^{-j}$ определены формулами (15), (21) по собственному вектору $w^{(n)}$ задачи (25), (27), отвечающему собственному числу $\Lambda_2^{(n)}$ из последовательности (28) и нормированному условием $\left\|\bar\rho^{1/2} w_3^{(n)}; L_2(\omega)\right\| = 1$ (лемма 1). В (40) X_h — срезающая функция, равная нулю в h-окрестности контура $\partial\omega$ и единице при $\operatorname{dist}\{y, \partial\omega\} \ge 2h$;

$$\left|\nabla_y^k X_h(y)\right| \le c_k h^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots. \tag{41}$$

Благодаря равенствам (27) и присутствию множителя X_h в (40) $\mathscr{U}$ удовлетворяет условию Дирихле (5), а значит, $\mathscr{U} \in \mathscr{H}_2$ и $\mathscr{U}_\rho \in \mathscr{H}_{2,\rho}$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\|\mathscr{U}\|_2 = \|\mathscr{U}_\rho\|_{2,\rho} \ge c h^{-1/2} > 0. \tag{42}$$

Оценим невязку пары $\left\{\mathscr{U}, h^2\Lambda_2^{(n)}\right\}$ в задаче (3)–(5). В силу (40) и (9) имеем

$$\begin{aligned} L\mathscr{U} - h^2\Lambda_2^{(n)}\rho\mathscr{U} = L(1 - X_h)\mathscr{U}^0 + h^{-4}L^0\mathscr{U}^{-2} + h^{-3}(L^0\mathscr{U}^{-1} + L^1\mathscr{U}^{-2}) \\ + h^{-2}(L^0\mathscr{U}^0 + L^1\mathscr{U}^{-1} + L^2\mathscr{U}^{-2}) + h^{-1}(L^1\mathscr{U}^0 + L^2\mathscr{U}^{-1}) \\ + h^0(L^2\mathscr{U}^0 - \Lambda_2^{(n)}\rho\mathscr{U}^{-2}) - h\Lambda_2^{(n)}\rho(\mathscr{U}^{-1} + hX\mathscr{U}^0), \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} B^\pm\mathscr{U} = B^\pm(1 - X_h)\mathscr{U}^0 + h^{-3}B^{0\pm}\mathscr{U}^{-2} + h^{-2}(B^{0\pm}\mathscr{U}^{-1} + B^{1\pm}\mathscr{U}^{-2}) \\ + h^{-1}(B^{0\pm}\mathscr{U}^0 + B^{1\pm}\mathscr{U}^{-1}) + h^0 B^{1\pm}\mathscr{U}^0. \end{aligned} \tag{44}$$

Множители при h^{-4}, h^{-3}, h^{-2} в (43) и при h^{-3}, h^{-2}, h^{-1} в (44) исчезают в связи с равенствами (16). По той же причине

$$h^{-1}(L^1\mathscr{U}^0 + L^2\mathscr{U}^{-1}) = -h^{-1}L^0\mathscr{U}^1, \quad h^0 B^{1\pm}\mathscr{U}^0 = -h^0 B^{0\pm}\mathscr{U}^1$$

и, кроме того, в согласии с (24) условие (31) принимает вид

$$(L^2\mathscr{U}^0 - \Lambda_2^{(n)}\rho\mathscr{U}^{-2}, e^3)_\Upsilon - (\mathbb{D}_y A \mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{U}^1, e^3)_\Upsilon = 0. \tag{45}$$

Умножим (43) скалярно на $v \in \mathscr{H}_2$ и проинтегрируем по частям («перебрасываются» операторы $D = D(\nabla_x)$ и $\mathbb{D}_\zeta$). Учитывая краевые условия (44), находим, что

$$(AD^t\mathscr{U}, D^t v)_{\Omega_h} - h^2\Lambda_2^{(n)}(\rho\mathscr{U}, v)_{\Omega_h} = (AD^t(1 - X_h)\mathscr{U}^0, D^t v)_{\Omega_h}$$
$$- h^{-1}(A\mathbb{D}_\zeta^t\mathscr{U}^1, \mathbb{D}_\zeta^t v)_{\Omega_h} - (L^2\mathscr{U}^0 + \Lambda_2^{(n)}\rho\mathscr{U}^{-2}, v)_{\Omega_h} + h\Lambda_2^{(n)}(\rho\mathscr{U}^{-1} + h\rho C\mathscr{U}^0, v)_{\Omega_h}$$
$$\equiv I_X - I_1 + I_2 - I_\Lambda. \quad (46)$$

Обработаем слагаемые $I_{\dots}$. Следующие формулы очевидны:

$$I_1 = h^0(A\mathbb{D}_\zeta^t\mathscr{U}^1, \mathbb{D}_z^t v)_{\Omega_h} = (A\mathbb{D}_\zeta^t\mathscr{U}^1, D^t v)_{\Omega_h} - I_0,$$
$$I_0 = (A\mathbb{D}_\zeta^t\mathscr{U}^1, \mathbb{D}_y^t v)_{\Omega_h}, \quad |I_1 + I_0| \le ch^{1/2}\|D^t v; L_2(\Omega_h)\|.$$

Умножим (45) на $h\bar{v}_3(y)$ и проинтегрируем по ω. Вычитая левую часть полученного равенства из I_2 и прибавляя к результату I_0, обнаруживаем, что

$$I_2 + I_0 = \big(A\big(\mathbb{D}_y^t\mathscr{U}^0 + \mathbb{D}_\zeta^t\mathscr{U}^1\big), \mathbb{D}_y^t v\big)_{\Omega_h} - \Lambda_2^{(n)}(\rho w_3, v_3)_{\Omega_h}$$
$$= \big(A\big(\mathbb{D}_y^t\mathscr{U}^0 + \mathbb{D}_\zeta^t\mathscr{U}^1\big), \mathbb{D}_y^t(v - \bar{v}_3 e^3)\big)_{\Omega_h} - \Lambda_2^{(n)}(\rho w_3, v - \bar{v}_3)_{\Omega_h}.$$

Таким образом, в силу (37)

$$|I_2 + I_0| \le ch^{1/2}\|D^t v; L_2(\Omega_h)\| \le ch^{1/2}\|v\|_\varkappa.$$

Наконец,

$$|I_\Lambda| \le ch^{3/2}\|v; L_2(\Omega_h)\| \le Ch^{1/2}\|v\|_\varkappa, \quad |I_X| \le ch^0\|v\|_2. \quad (47)$$

Первая оценка очевидна, а вторая получается с учетом узости носителя вектор-функции $D^t(1 - X_h)\mathscr{U}^0$; кроме того, нужно воспользоваться соотношениями (41) и

$$|\mathscr{U}^0(y, h^{-1}z)| + \big|\mathbb{D}_y^t\mathscr{U}^0(y, h^{-1}z)\big| + h\big|\mathbb{D}_z^t\mathscr{U}^0(y, h^{-1}z)\big| \le C.$$

Итогом указанных выкладок является неравенство $\|f\|_2 \le ch^0$ для правой части формулы

$$\mathscr{O}_2\mathscr{U} - h^2\Lambda_2^{(n)}\mathscr{E}_{2,\rho}\mathscr{U} = f. \quad (48)$$

Переходя от $\mathscr{U}, f$ к $U_\rho = \|\mathscr{U}\|_2^{-1}\mathscr{U}_\rho$, $f_\rho = \rho^{-1/2}f$ и повторяя преобразования, приведшие к (39), превращаем (48) в равенство

$$h^{-2}\big(\Lambda_2^{(n)} + 1\big)^{-1}U_\rho - (\mathscr{O}_{2,\rho} + h^2\mathscr{E}_{2,1})^{-1}\mathscr{E}_{2,1}U_\rho$$
$$= -h^{-2}\big(\Lambda_2^{(n)} + 1\big)^{-1}\|\mathscr{U}\|_2^{-1}(\mathscr{O}_{2,\rho} + h^2\mathscr{E}_{2,1})^{-1}f_\rho \equiv \mathscr{F}_\rho.$$

Так как $\|(\mathscr{O}_2 + h^2\mathscr{E}_{2,\rho})^{-1}; \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2\| \le c$, с учетом (42) имеем

$$\|\mathscr{F}_\rho\|_{2,\rho} = \|\mathscr{F}\|_2 \le ch^{-2}\|\mathscr{U}\|_2^{-1}\|(\mathscr{O}_2 + h^2\mathscr{E}_{2,\rho})^{-1}f\|_2 \le ch^{-3/2}.$$

Следовательно, по лемме 4 существует точка $(\Lambda + h^2)^{-1}$ спектра оператора $\mathscr{A}_{2,\rho}$, для которой

$$\big|(h^2 + \Lambda)^{-1} - h^{-2}\big(1 + \Lambda_2^{(n)}\big)^{-1}\big| \le ch^{-3/2};$$

при этом, разумеется, Λ — собственное число задачи (3)–(5). Итак,

$$\big|\Lambda - h^2\Lambda_2^{(n)}\big| \le ch^{1/2}\big(1 + \Lambda_2^{(n)}\big)|h^2 + \Lambda|.$$

Поэтому $\Lambda \le ch^2$ при малом h и окончательно

$$\big|\Lambda - h^2\Lambda_2^{(n)}\big| \le ch^{5/2}. \quad (49)$$

Сформулируем доказанное, присоединив утверждение, касающееся второго случая из (6) и устанавливающее неравенство

$$\big|\Lambda - \Lambda_0^{(n)}\big| \le ch^{1/2}. \quad (50)$$

Теорема 1. *Пусть число* $\Lambda_2^{(n)}$ (*число* $\Lambda_0^{(n)}$) *является собственным для задачи* (25), (27) (*задачи* (29)) *в области* ω. *Тогда найдется собственное число* Λ *задачи* (3)–(5) *в области* Ω_h, *подчиненное неравенству* (49) (*неравенству* (50)).

Доказательство. Осталось разобраться с собственными числами $\Lambda = O(h^0)$. Считаем, что $\varkappa = 0$, а в качестве асимптотического приближения к собственному вектору по-прежнему берем сумму (40). Так как $\mathscr{U}^{-2} = 0$ и Λ заменяется на $\Lambda_0^{(n)}$, в тождестве (46) выражения из правой части принимают вид

$$I_X = \left(AD^t(1-X_h)\mathscr{U}^0, D^t v\right)_{\Omega_h}, \quad I_\Lambda = \Lambda_0^{(n)}(\rho X_h \mathscr{U}^0, v)_{\Omega_h},$$

$$I_1 = h^{-1}(\widetilde{F}^1, v)_{\Omega_h}, \; I_2 = (L^2\mathscr{U}^0, v)_{\Omega_h}, \quad \widetilde{F}_1 = \mathbb{D}_y^t A(\mathbb{D}_\zeta^t \mathscr{U}^0 + \mathbb{D}_y^t \mathscr{U}^1) - \Lambda_0^{(n)}\mathscr{U}^{-1}.$$

Благодаря присутствию в (38), $\varkappa = 0$, слагаемого $\|\rho u; L_2(\Omega_h)\| \geq c\|u; L_2(\Omega_h)\|$ находим, что $|I_\Lambda| + |I_2| \leq ch^{1/2}\|v\|_0$. Для I_X сохраняется оценка из (47) с мажорантой $ch^0\|v\|_0$. Наконец, вспомним, что система уравнений в (29) является следствием условий ортогональности

$$(F^1, e^i)_\Upsilon + \sum_{\pm}(e^i)^t G^{1\pm} \equiv (\widetilde{F}^1, e^i)_\Upsilon = 0, \quad y \in \omega, \quad i = 1, 2 \tag{51}$$

(если $i = 3$, то (51) выполняется автоматически). Таким образом, в силу (37) получаем

$$|I_1| = h^{-1}|(\widetilde{F}^1, v - \bar{v})_{\Omega_h}| \leq ch^{1/2}\|D^t v; L_2(\Omega_h)\| \leq ch^{1/2}\|v\|_0.$$

Теперь нужный результат достигается повторением рассуждений, предшествовавших формулировке теоремы. •

Приведем еще одно утверждение, установленное, по существу, в [3], где изучались изгибные колебания однородных изотропных пластин. Незначительные изменения в доказательствах из [3], связанные с неоднородностью и анизотропностью, перекрываются оценками, указанными перед теоремой 1.

Теорема 2. *Фиксируем номер* n *собственного числа в упорядоченной спектральной последовательности* $\{\Lambda^{(n)}\}$ *задачи* (3)–(5). *При* $h \to 0$ *произведение* $h^{-2}\Lambda^{(n)}$ *стремится к элементу* $\Lambda_2^{(n)}$ *последовательности* (28).

Если отвлечься от «больших» собственных чисел (7) и (8), то остальной спектр трехмерной задачи (3)–(5) описывается теоремой 2 лишь при наличии плоскости упругой симметрии $\{x : z = 0\}$, которая обеспечивает полное невзаимодействие основных состояний и разделение $\{\Lambda^{(n)}\}$ на две подпоследовательности, отвечающие изгибным и продольным колебаниям. Разумеется, при этом теорему 2 следует дополнить аналогичным утверждением о сходимости элементов второй подпоследовательности к собственным числам из (30). В общем случае разделения спектральной последовательности $\{\Lambda^{(n)}\}$ нет и теоремы о сходимости дают неполное представление об «ограниченной части» спектра задачи (3)–(5).

5. Случай $\Lambda = O(h^{-2})$; формальная асимптотика. Предположим, что пластина Ω_h изотропная и однородная, т. е. матрица Гука A состоит из блоков (35), а функция ρ постоянна. Тогда помимо нулевого у предельной задачи (11) имеются собственные числа

$$\Lambda_{-2}^{(1,k)} = \mu\rho^{-1}\pi^2 k^2, \quad \Lambda_{-2}^{(2,k)} = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1}\pi^2 k^2 \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{52}$$

которые естественно взять в качестве основных асимптотических членов в (7) и (8). С целью найти асимптотические поправки $h^0\Lambda_0^{(p,k)}$ или $h^{-1}\Lambda_{-1}^{(p,k)}$ укажем расщепление

$$L - h^{-2}\Lambda_{-2}\rho\mathbb{I}_3 = -h^{-2}\big(M\partial_\zeta^2 + \rho\Lambda_{-2}\mathbb{I}_3\big) + h^{-1}L^1 + h^0L^0, \tag{53}$$

где $M = \operatorname{diag}\{\mu,\mu,\lambda{+}2\mu\}$, и, следуя [11, 12], повторим процедуру из предыдущих разделов, оперируя с анзацем

$$u(x) \sim h^{-1}\mathscr{U}^{-1}(y,\zeta) + h^0\mathscr{U}^0(y,\zeta) + h^1\mathscr{U}^1(y,\zeta). \tag{54}$$

Сначала рассмотрим собственное число $\Lambda_{-2} = \Lambda_{-2}^{(1,k)}$ и положим

$$\mathscr{U}^{-1}(y,\zeta) = (w_1(y)e^1 + w_2(y)e^2)\cos\{\pi k(\zeta+1/2)\}. \tag{55}$$

Благодаря формулам (53), (9) и (35) у очередного члена асимптотического анзаца (54) первые две компоненты нулевые, а третья компонента $\mathscr{U}_3^0$ удовлетворяет задаче

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\partial_\zeta^2\mathscr{U}_3^0 + \mu\pi^2k^2\mathscr{U}_3^0 = (\lambda+\mu)\pi k\sin\{\pi k(\zeta+1/2)\}\,\nabla_y\cdot w' \quad \text{на} \quad \Upsilon,\\ \pm(\lambda+2\mu)\partial_\zeta\mathscr{U}_3^0 = \mp\lambda\cos\{\pi k(\zeta+1/2)\}\,\nabla_y\cdot w' \quad \text{при} \quad \zeta=\pm1/2.\end{gathered} \tag{56}$$

Эта задача не имеет решения лишь в том случае, если

$$m=\gamma k, \quad \cos\pi k + \cos\pi m = 0, \quad k,m\in\{1,2,\dots\}, \tag{57}$$

причем $\gamma = \mu^{1/2}(\lambda+2\mu)^{-1/2}$. Предположим, что (57) не выполнено; тогда

$$\begin{aligned}\mathscr{U}_3^0(y,\zeta) = \pi^{-1}k^{-1}(&-\sin\{\pi k(\zeta+1/2)\} + a_3\sin\{\gamma\pi k(\zeta+1/2)\}\\ &+b_3\cos\{\gamma\pi k(\zeta+1/2)\})\nabla_y\cdot w'(y),\\ a_3 = 2\gamma, \quad & b_3 = 2\gamma(\cos\gamma\pi k - \cos\pi k)(\sin\gamma\pi k)^{-1}.\end{aligned} \tag{58}$$

Для того чтобы найти $\mathscr{U}^1$, введем асимптотическую поправку $h^0\Lambda_0$ (см. (7)) и получим, что компоненты вектора $\mathscr{U}^1 = \mathscr{U}_1^1e^1 + \mathscr{U}_2^1e^2$ удовлетворяют таким задачам:

$$\begin{gathered}\mu\partial_\zeta^2\mathscr{U}_i^1 + \mu\pi^2k^2\mathscr{U}_i^1 = \{(L'w')_i - \rho\Lambda_0w_i\}\cos\{\pi k(\zeta+1/2)\} - (\lambda+\mu)\partial_i\partial_\zeta\mathscr{U}_3^0 \text{ на } \Upsilon,\\ \pm\mu\partial_\zeta\mathscr{U}_i^1 = \mp\mu\partial_i\mathscr{U}_3^0 \quad \text{при} \quad \zeta=\pm1/2.\end{gathered} \tag{59}$$

Здесь $i=1,2$, $\partial_i = \partial/\partial y_i$ и $L'(\nabla_y) = -\mu\nabla_y\cdot\nabla_y - (\lambda+\mu)\nabla_y\nabla_y\cdot$ — двумерный оператор Ламе (точкой обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$). Условия разрешимости задач (59) принимают вид двумерной системы Ламе

$$-\mu(\nabla_y\cdot\nabla_y)w'(y) - (\lambda_*+\mu)\nabla_y\nabla_y\cdot w'(y) = \rho\Lambda_0w'(y), \quad y\in\omega, \tag{60}$$

с новым коэффициентом $\lambda_* = -\mu + 8\mu\pi^{-1}k^{-1}b_3$ (см. (58)). В согласии с (5) присоединим к (60) условия Дирихле

$$w'(y) = 0, \quad y\in\partial\omega, \tag{61}$$

и образуем *результирующую задачу* для определения неизвестных вектор-функции w' и числа Λ_0 в (55) и (7).

Теперь рассмотрим собственное число $\Lambda_{-2} = \Lambda_{-2}^{(2,m)}$, где $m = 1, 2, \dots$. Главный член анзаца (54) имеет вид

$$\mathscr{U}^{-1}(y,\zeta) = w_3(y)\cos\{\pi m(\zeta + 1/2)\}, \tag{62}$$

а компоненты вектора $\mathscr{U}^0 = \mathscr{U}_1^0 e^1 + \mathscr{U}_2^0 e^2$ определяются из аналогичных (56) задач

$$\mu\partial_\zeta^2 \mathscr{U}_i^0 + (\lambda + 2\mu)\pi^2 m^2 \mathscr{U}_i^0 = (\lambda + \mu)\pi m \sin\{\pi m(\zeta + 1/2)\}\,\partial_i w_3 \quad \text{на} \quad \Upsilon,$$
$$\pm\mu\partial_\zeta \mathscr{U}_i^0 = \mp\mu\cos\{\pi m(\zeta + 1/2)\}\,\partial_i w_3 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1/2,$$

которые неразрешимы только в критической ситуации (57). В противном случае решения задаются формулами

$$\begin{gathered}\mathscr{U}_i^0(y,\zeta) = \pi^{-1}m^{-1}(\sin\{\pi m(\zeta+1/2)\} + a_i\sin\{\gamma^{-1}\pi m(\zeta+1/2)\}\\ +b_i\cos\{\gamma^{-1}\pi m(\zeta+1/2)\})\partial_i w_3,\\ a_i = -2\gamma, \quad b_i = 2\gamma(\cos\pi m - \cos\gamma^{-1}\pi m)(\sin\gamma^{-1}\pi m)^{-1}, \quad i = 1,2.\end{gathered} \tag{63}$$

Условия разрешимости задачи для $\mathscr{U}^1 = \mathscr{U}_3^1 e^3$

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\partial_\zeta^2\mathscr{U}_3^1 + (\lambda+2\mu)\pi^2 m^2\mathscr{U}_3^1 = -(\mu\nabla_y\cdot\nabla_y w_3 + \rho\lambda_0 w_3)\cos\{\pi m(\zeta+1/2)\}\\ -(\lambda+\mu)\partial_\zeta(\partial_1\mathscr{U}_1^0 + \partial_2\mathscr{U}_2^0) \quad \text{на} \quad \Upsilon,\end{aligned}$$

$$\pm(\lambda+2\mu)\partial_\zeta\mathscr{U}_3^1 = \mp\lambda(\partial_1\mathscr{U}_1^0 + \partial_2\mathscr{U}_2^0) \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1/2,$$

преобразуются в скалярное дифференциальное уравнение

$$-D_*\nabla_y\cdot\nabla_y w_3(y) = \rho\Lambda_0 w_3(y), \quad y \in \omega, \tag{64}$$

где $D_* = \lambda + 2\mu + 8\mu\pi^{-1}m^{-1}b_i$ (см. (63)). Это уравнение, дополненное соответствующими условиями Дирихле

$$w_3(y) = 0, \quad y \in \partial\omega, \tag{65}$$

формирует *результирующую задачу* для нахождения неизвестных функции w_3 и числа Λ_0 в (62) и (7).

Замечание 2. Недостаток построенных моделей очевиден: если

$$16\gamma^2(\cos\gamma^{-1}\pi m - \cos\pi m) = \gamma^{-1}\pi m\sin\gamma^{-1}\pi m,$$

то $D_* = 0$ и уравнение (64) вырождается. Схожий изъян имеет и система (60), поскольку она теряет эллиптичность при

$$16\gamma^2(\cos\pi k - \cos\gamma\pi k) = \gamma\pi k\sin\gamma\pi k.$$

Согласно общему алгорифму [21, 17] в этих случаях нужна перестройка асимптотических анзацев. •

Осталось разобраться с критической ситуацией (57), в которой (7) и (54) заменяются формулами (8) и

$$u(x) \sim h^0\mathscr{U}^0(y,\zeta) + h^1\mathscr{U}^1(y,\zeta), \tag{66}$$
$$\mathscr{U}^0(y,\zeta) = (w_1(y)e^1 + w_2(y)e^2)\cos\{\pi k(\zeta+1/2)\} + w_3(y)e^3\cos\{\pi m(\zeta+1/2)\}.$$

При этом из-за кратности собственного числа

$$\Lambda_{-2} = \mu\rho^{-1}\pi^2 k^2 = (\lambda+2\mu)\rho^{-1}\pi^2 m^2$$

условия разрешимости возникают уже на первом шаге — в задаче для $\mathscr{U}^1$. Именно поэтому поправка в асимптотике собственного числа берется равной $h^{-1}\Lambda_{-1}$, а упомянутые условия разрешимости преобразуются в систему

$$\begin{gathered}-8\mu\partial_i w_3(y)=\rho\Lambda_{-1}w_i(y),\quad y\in\omega,\quad i=1,2,\\ 8\mu\nabla_y\cdot w'(y)=\rho\Lambda_{-1}w_3(y),\quad y\in\omega.\end{gathered}\tag{67}$$

Отсюда выводим результирующую краевую задачу

$$-64\mu^2\nabla_y\cdot\nabla_y w_3(y)=\rho^2\Lambda_{-1}^2 w_3(y),\quad y\in\omega;\quad w_3(y)=0,\quad y\in\partial\omega.\tag{68}$$

Так как собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа положительны, компоненты w_1 и w_2 восстанавливаются по решению задачи (68) в соответствии с (67).

Замечание 3. Спектр квадратичного пучка (68) содержит как положительные, так и отрицательные собственные значения $\Lambda_1^{(n)}$ (это отражено в (8) при помощи знака «±»). При потере положительной определенности операторами задач (60), (61) и (64), (65) (например, $D_*<0$) могут возникнуть отрицательные собственные числа $\Lambda_0^{(n)}$. Так как в формулах (7) и (8) $\lambda_{-2}>0$ (см. (52)), их правые части по-прежнему стремятся к $+\infty$ при $h\to+0$. Тем не менее возможное появление «противоположно направленных» асимптотических серий еще более запутывает структуру спектра задачи (3)–(5). •

6. Неувязки с оправданием асимптотик (7) и (8). Попытаемся обосновать формальную процедуру из п. 5. Для определенности рассмотрим анзац (55). Учитывая условия Дирихле (5) введением той же срезки X_h, что и в (40), положим

$$\mathscr{U}(x)=h^{-1}\mathscr{U}^{-1}(y,\zeta)+h^0X_h(y)\mathscr{U}^0(y,\zeta),$$

где $\mathscr{U}^{-1}$ и $\mathscr{U}^0$ — выражения (55), (58) или (62), (63), в которых под w' или w_3 подразумеваются собственные функции задач (60), (61) или (64), (65), отвечающие собственному числу $\Lambda_0^{(n)}$. В соответствии с (7) возьмем $\varkappa=-2$ в (38). Заметим, что

$$\|\mathscr{U}\|_{-2}=\|\mathscr{U}_\rho\|_{-2,\rho}\geq ch^{-3/2}>0,$$

причем изменение показателя степени h (по сравнению с (42)) произошло, в частности, из-за появления в формуле

$$\mathbb{D}^t h^{-1}\mathscr{U}^{-1}=h^{-2}\mathbb{D}^t_\zeta\mathscr{U}^{-1}+h^{-1}\mathbb{D}^t_y\mathscr{U}^{-1}\tag{69}$$

слагаемого $O(h^{-2})$, вызванного множителем $\cos\{\pi k(\zeta+1/2)\}$ в (55) и (62).

Повторим рассуждения из п. 4. Сначала получим аналогичное (48) равенство

$$\mathscr{O}_{-2}\mathscr{U}-\big(h^{-2}\Lambda_{-2}^{(i,k)}+\Lambda_0^{(n)}\big)\mathscr{U}=f,$$

в котором $\|f\|_{-2}\leq ch^0$. Отсюда выведем соотношения

$$\begin{aligned}&\big(h^{-2}\Lambda_{-2}^{(i,k)}+\Lambda_0^{(n)}+h^{-2}\big)^{-1}U_\rho+(\mathscr{O}_{-2,\rho}+h^{-2}\mathscr{E}_{-2,1})^{-1}\mathscr{E}_{-2,1}U_\rho\\ &\qquad=-\big(h^{-2}\Lambda_{-2}^{(i,k)}+\Lambda_0^{(n)}+h^{-2}\big)^{-1}\|\mathscr{U}\|_{-2}^{-1}(\mathscr{O}_{-2,\rho}+h^{-2}\mathscr{E}_{-2,1})^{-1}f_\rho\equiv\mathscr{F}_\rho,\end{aligned}$$

$$\|\mathscr{F}_\rho\|_{-2,\rho}=\|\mathscr{F}\|_{-2}\leq c(h^{-2})^{-1}(h^{-3/2})^{-1}\|f_\rho\|_{-2,\rho}\leq ch^{7/2}.$$

Наконец, обращаясь к лемме 4, находим точку $\Lambda + h^{-2}$ спектра оператора $\mathscr{A}_{-2,\rho}$ (Λ — собственное число задачи (3)–(5)), для которой

$$\begin{aligned}\left|\Lambda - h^{-2}\Lambda_{-2}^{(i,k)} - \Lambda_0^{(n)}\right| \le \|\mathscr{F}_\rho\|_{-2,\rho}|\Lambda + h^{-2}| \left|h^{-2}\Lambda_{-2}^{(i,k)} + \Lambda_0^{(n)} + h^{-2}\right| \\ \le ch^{7/2}h^{-2}h^{-2} = ch^{-1/2}. \quad (70)\end{aligned}$$

Итог малоутешителен — асимптотические поправки $\Lambda_0^{(n)}$, построенные в п. 5, выходят за рамки точности, установленной в (70). Иными словами, удалось получить лишь такой результат: в $ch^{-1/2}$-окрестности точки $h^{-2}\Lambda_{-2}^{(i,k)}$ имеется собственное число исходной задачи (3)–(5). Этот результат можно «растиражировать» при помощи следующего уточнения леммы 4, также содержащегося в [20].

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы* 4 *и* $d > 0$ *— некоторое число. Пусть еще* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_J$ *— ортонормированные в* $\mathscr{H}$ *собственные векторы, отвечающие собственным числам оператора* $\mathscr{A}$ *из отрезка* $[\beta - d, \beta + d]$. *Тогда найдутся такие коэффициенты* $\alpha_1, \dots, \alpha_J$, *что* $|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_J|^2 = 1$ *и*

$$\left\| U - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \mathbf{u}_j; \mathscr{H} \right\| \le \delta d^{-1}. \quad (71)$$

Если теперь фиксировать d и начать перебирать собственные функции w'^n и w_3^n задач (60), (61) и (64), (65), то ввиду представлений (54), (55), (62) и ортогональностей

$$(\rho w'^n, w'^m)_\omega = 0, \quad \left(\rho w_3^n, w_3^m\right)_\omega = 0, \quad n \ne m,$$

в оценке (70) обязаны появляться линейные комбинации с различными наборами коэффициентов $\{\alpha_j^n\}$. Это указывает на множественность точек спектра задачи (3)–(5) в ch-окрестности числа $h^{-2}\Lambda_{-2}^{(i,k)}$.

Все сказанное в равной мере относится и к анзацу (66), за тем исключением, что из-за необходимости умножить на срезку X_h члены $e^1 w_1$ и $e^2 w_2$ (они не аннулируются на $\partial\omega$; см. (68)) оценка (69) приобретает вид

$$\left|\Lambda - h^{-2}\Lambda_{-2} - h^{-1}\Lambda_{-1}^{(n)}\right| \le ch^{-3/2}$$

и соответственно ширина окрестности, содержащей собственные числа Λ, становится равной $O(h^{-3/2})$.

Причины неудачи в оправдании асимптотик (7) и (8) поясняются в следующем разделе. Ухудшение финальной оценки, вызванное присутствием слагаемых $O(h^{-2})$ в подобной (69) формуле, просмотрено в статье автора [22], где в одном из разделов проводится анализ задачи Дирихле для оператора второго порядка в тонкой области и декларируется (без доказательства) возможность вывода нужных оценок. Поэтому обоснованной можно считать лишь асимптотику собственных чисел из первой серии (доказательство в самом деле просто), но асимптотические представления для остальных серий в [22] носят лишь формальный характер.

7. Краевые эффекты. Анализ хода рассуждений в п. 4 демонстрирует, что показатели $5/2$ и $1/2$ степеней параметра h в оценках (49) и (50) обусловлены присутствием выражения I_X в тождестве (46). В свою очередь срезка X_h помещена в приближение (40) для соблюдения условий Дирихле (5). Существует иной способ учета краевых условий на боковой поверхности пластины — построение пограничного слоя (см. [5; 21–26; 27, гл. 6] и др.). На примере изотропной пластины в [5, 25] проверено, что пограничный слой оказывает лишь опосредованное влияние на асимптотику собственных чисел (6): поправки $h^3\Lambda_3^{(n)}$ и $h^1\Lambda_1^{(n)}$ вычисляются по младшим членам гладкого типа. Тем не менее за счет включения в асимптотическое приближение составляющих типа пограничного слоя удается сделать оценки погрешностей оптимальными, т. е. заменить в (49) и (50) множители $h^{5/2}$ и $h^{1/2}$ множителями h^3 и h^1.

Другое предназначение пограничного слоя — формирование краевых условий в результирующей задаче (общие принципы изложены в [21; 27, гл. 16]). Именно, условия Дирихле (27) и подобные условия в (29) вытекают из требования экспоненциального затухания пограничного слоя при удалении от боковой поверхности пластины. В ситуации (6) применимы стандартные конструкции (см. статьи, упомянутые в предыдущем абзаце), однако случаи (7) и (8) нуждаются в отдельном исследовании, поскольку существенные изменения претерпевает сама предельная задача о пограничном слое — ее оператор теряет формальную положительность.

Обсуждаемая предельная задача возникает в результате перезаписи уравнений изотропной теории упругости в криволинейных координатах (s, n, z) и введения двух быстрых переменных $\eta_1 = h^{-1}\nu$ и $\eta_2 = h^{-1}z$ (s — длина дуги на $\partial\omega$, $|\nu| = \operatorname{dist}\{y, \partial\omega\}$ и $\nu > 0$ внутри ω). После формального перехода к $h = 0$ получается смешанная краевая задача в полуполосе $\Pi = \{\eta = (\eta_1, \eta_2) : \eta_1 > 0, |\eta_2| < 1/2\}$, причем в ней *сохраняется спектральный параметр* Λ_{-2} (благодаря множителю h^{-2} в (7) и (8)). Итак, система уравнений

$$\begin{gathered} -\mu(\nabla_\eta \cdot \nabla_\eta)\mathscr{W}_s = \Lambda_{-2}\rho\mathscr{W}_s \quad \text{в} \quad \Pi, \\ -\mu(\nabla_\eta \cdot \nabla_\eta)\mathscr{W}' - (\lambda+\mu)\nabla_\eta\nabla_\eta \cdot \mathscr{W}' = \Lambda_{-2}\rho\mathscr{W}' \quad \text{в} \quad \Pi \end{gathered} \tag{72}$$

снабжается условиями Дирихле на торце $\pi_0 = \{\eta : \eta_1 = 0, |\eta_2| < 1/2\}$ и условиями Неймана на боковых сторонах $\pi_\pm = \{\eta : \eta_1 > 0, \eta_2 = \pm 1/2\}$. В условия на π_0 помещаются невязки, порожденные анзацем (54) или (66) в соотношении (5), а условия на $\pi_\pm$ считаются однородными. В (72) $\mathscr{W}' = (\mathscr{W}_\nu, \mathscr{W}_z)^t$; $\mathscr{W}_s$, $\mathscr{W}_\nu$ и $\mathscr{W}_z$ — компоненты вектора $\mathscr{W}$ в криволинейных координатах, но зависимость от переменной $s \in \partial\omega$ параметрическая.

Множитель Λ_{-2} в (72) совпадает с одним из чисел (52), т. е. реализуется «пороговая» ситуация и постановка классических условий излучения проблематична. Тем не менее можно использовать общие результаты [28, гл. 5], сопоставляющие задаче в Π фредгольмов оператор в *экспоненциальных весовых пространствах с отделенной асимптотикой*. Сообщим сведения, которые можно почерпнуть, например, из той же книги [28].

Решение $\mathscr{W}$ с точностью до экспоненциально малых членов совпадает около бесконечности с линейной комбинацией волн

$$\exp(i\beta_j\eta_1)\Phi^j(\eta_2; \eta_1) = \exp(i\beta_j h^{-1}\nu)\Phi^j(\zeta; h^{-1}\nu); \tag{73}$$

здесь $j = 1, \dots, J$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, а Φ^j — полином переменной η_1 (если Φ^j не зависит от η_1, то (73) — осциллирующая волна; в противном случае она полиномиальная). Величины β_j, Φ^j и J зависят от Λ_{-2}, причем J — четное число, скачкообразно увеличивающееся при росте Λ_{-2} — приращения происходят на порогах (52), характеризующихся полиномиальными волнами. При $\Lambda_{-2} \in [0, \mu^{-1}\rho^{-1}\pi^2)$ имеем $J = 8$ (удвоенная размерность линеала жестких смещений полуполосы Π или дифференциальный порядок системы (25) при $\Lambda_{-2} = 0$; см. [17]), но уже на первом пороге $\Lambda_{-2} = \mu^{-1}\rho^{-1}\pi^2$ оказывается, что $J > 8$. Следовательно, согласно [28, гл. 5] решение $\mathscr{W}$ затухает при $\eta_2 \to \infty$ лишь при выполнении $J/2 > 4$ условий ортогональности (разрешимости). В соответствии с общей схемой [21] экспоненциальный характер пограничного слоя обеспечивается постановкой такого же количества краевых условий в результирующей задаче, что невозможно (при заботе о корректности) ни для одной из систем (60), (64) и (67), за исключением, быть может, частных случаев, оговоренных в замечании 2.

Подведем итог нашим рассуждениям.

Единственным объяснением появления условий Дирихле в (61), (65) и (68) служило подобие исходным краевым условиям (5) на Γ_h, не имеющее асимптотической подоплеки. Аргументация, основанная на уничтожении главного члена невязки того или иного анзаца, в рассматриваемом случае $\Lambda = O(h^{-2})$ несостоятельна, поскольку «пограничный слой» может содержать полиномиальные (растущие) волны, перемешивающие порядки невязок.

Основной вывод состоит в невозможности обеспечить натуральное свойство пограничного слоя — его затухание. В решении $\mathscr{W}$, предназначенном для описания этого явления, присутствует нетривиальная комбинация волн (73), которые, быстро осциллируя в направлении ν, проникают вовнутрь пластины и искажают асимптотические конструкции, указанные в п. 5. Иными словами, остается открытым даже вопрос о построении асимптотик высокочастотных колебаний пластин.

Упомянем еще одно обстоятельство. Благодаря условиям Дирихле на торце π_0 полуполосы Π однородная смешанная краевая задача для системы (72) не имеет решений $\mathscr{W} \in H^1(\Pi)^3$ при любом Λ_{-2} (для уравнения Гельмгольца, которому удовлетворяет компонента $\mathscr{W}_s$, этот факт широко известен, но его доказательство легко приспосабливается к двумерной системе теории упругости). Вместе с тем при смене краевых условий (5) на боковой поверхности Γ_h названные решения, экспоненциально затухающие на бесконечности, могут появиться и породить серии собственных значений, которым отвечают собственные функции, локализованные вблизи Γ_h. Подобная структура асимптотики была обнаружена в [21], а в [22; 27, гл. 17] приведены конкретные примеры для скалярных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morgenstern D.* Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie // Arch. Rational Mech. Anal. 1959. V. 4, N 2. P. 145–152.
2. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, № 5. С. 914–924.
3. *Ciarlet P. G., Kesavan S.* Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1981. V. 26. P. 145–172.
4. *Destuynder P.* Comparaison entre les modèles tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en élasticité // RAIRO Anal. Numér. 1981. V. 15. P. 331–369.
5. *Зорин И. С., Назаров С. А.* Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 4. С. 642–650.
6. *Destuynder P., Gruais I.* Error estimation for the linear three-dimensional elastic plate model // Asymptotic Methods for Elastic Structures. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1995. P. 75–88.
7. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
8. *Nečas J.* Nečas J. Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques. Paris: Masson, 1967.
9. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

10. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.
11. *Бердичевский В. Л.* Высокочастотные длинноволновые колебания пластин // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236, № 6. С. 1319–1322.
12. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.
13. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотическая структура спектра в задаче о гармонических колебаниях ступицы с тяжелыми спицами // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 1. С. 13–15.
14. *Mel'nyk T. A., Nazarov S. A.* Asymptotic structure of the spectrum of the Neumann problem in a thin comb-like domain // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1994. V. 319. P. 1343–1348.
15. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа «густого гребешка» // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. Т. 19. С. 138–173.
16. *Назаров С. А.* Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы // Проблемы мат. анализа. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1997. Т. 16. С. 167–192.
17. *Назаров С. А.* Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 5. С. 1–92.
18. *Назаров С. А.* Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестн. СПбГУ. 1992. № 8. С. 19–24.
19. *Nazarov S. A.* Korn's inequalities for junctions of spatial bodies and thin rods // Math. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 20, N 3. P. 219–243.
20. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 3–80.
21. *Назаров С. А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестн. Ленингр. ун-та. 1982. № 7. С. 65–68.
22. *Назаров С. А.* Асимптотика собственных чисел задачи Дирихле в тонкой области // Изв. вузов. Математика. 1987. № 11. С. 23–33.
23. *Friedrichs K. O., Dressler R. F.* A boundary-layer theory for elastic plates // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14, N 1. P. 1–33.
24. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
25. *Зорин И. С., Назаров С. А.* Двучленная асимптотика решения задачи о продольной деформации пластины, защемленной по краю // Вычислит. механика деформируемого твердого тела. 1992. № 2. С. 10–21.
26. *Dauge M., Gruais I.* Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encastrée // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. V. 321, N 3. P. 375–380.
27. *Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A.* Asymptotiche Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verl., 1991. Bd 2.
28. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991. (Расширенный английский перевод: Nazarov S. A., Plamenevsky B. A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994.).

Статья поступила 10 февраля 1999 г.

г. Санкт-Петербург
Санкт-Петербургский гос. университет, Научно-исследовательский институт математики и механики им. акад. В. И. Смирнова,
Библиотечная пл. 2, Санкт-Петербург — Петродворец 198904
serna@snark.ipme.ru