*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2000. Том 41, № 4*

*УДК 519.4+513.88*

# ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

**В. Б. Левенштам**

**Аннотация:** Метод усреднения обоснован для квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка с быстро осциллирующими коэффициентами при старших производных в случае задачи Коши. Библиогр. 13.

Вопрос о применении метода усреднения к параболическим уравнениям со стационарной главной частью (т. е. с коэффициентами при старших производных, зависящими лишь от пространственных переменных) изучен в работах [1–6] довольно подробно. Для уравнений с нестационарной быстро осциллирующей главной частью он исследован, по-видимому, недостаточно. Некоторые результаты опубликованы в работах [7–12].

Исследования, касающиеся собственно задачи Коши, содержатся в работах $[1, 2, 7, 9]$. В $[1, 2]$ рассмотрены уравнения второго порядка со стационарной главной частью, линейные относительно всех производных; в [7] методами теории вероятностей изучены линейные уравнения второго порядка с нестационарной главной частью. В работах $[1, 2, 7]$ установлена асимптотическая близость решений исходной и усредненной задач в метрике $C$ (в [2] в метрике $C$ с весом). В [9] разработаны методы, позволившие изучить линейные параболические уравнения дивергентного вида любого порядка и установить близость в $L_2$ решений и их производных по пространственным переменным до половинного порядка. При этом в коэффициентах уравнений [9] большие параметры могут быть сомножителями не только у временной, но и у пространственных переменных.

В настоящей работе исследуется задача Коши для квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка $2k$ с любым числом $m$ пространственных переменных. Доказана разрешимость возмущенной задачи при достаточно больших значениях асимптотического параметра $\omega$ на том временном интервале $t \in [0, T]$, на котором разрешима усредненная задача. Обоснована асимптотическая близость решений исходной и усредненной задач, а также их производных по пространственным переменным до порядка $2k$ включительно в гёльдеровых нормах, когда начальная функция и ее производные до порядка $2k$ удовлетворяют условию Гёльдера.

В частном случае линейных задач с начальными условиями из $C^{\gamma_0}(\mathbb{R}^m)$ установлена асимптотическая близость решений возмущенной и усредненной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96–01–01417, 98–01–00135).

задач по норме $C^{\gamma_1/2k}([0,T], C^{\gamma_1}(\mathbb{R}^m))$, $\gamma_0 > \gamma_1 > 0$ (определения пространств см. в п. 1).

Рассмотрен также случай, когда при некотором $s$, $0 < s \leqslant 2k$, возмущенное уравнение линейно относительно производных $D_x^\alpha u$, $s \leqslant |\alpha| \leqslant 2k$, а начальная функция принадлежит пространству $C^{s-1+\gamma_0}(\mathbb{R}^m)$. Доказана глобальная разрешимость возмущенной задачи при больших значениях $\omega$, и установлена асимптотическая близость решений исходной и усредненной задач по норме $C^{\gamma_1/2k}([0,T], C^{s-1+\gamma_1}(\mathbb{R}^m))$.

**1.** Пусть $k$ и $m$ — натуральные числа. В этом пункте рассмотрим задачу Коши для линейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha| \leqslant 2k} a_\alpha(x,t,\omega t) D^\alpha u + f(x,t,\omega t), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ — произвольная точка в вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^m$, $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i$, время $t$ принадлежит $[0,T]$, $T = \mathrm{const} > 0$, $\omega$ — большой асимптотический параметр. Функции $a_\alpha(x,t,\tau)$ и $f(x,t,\tau)$ в уравнении (1) определены, непрерывны по совокупности переменных и равномерно ограничены при $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,\infty]$. Пусть, кроме того, для некоторого $\gamma \in (0,1]$ эти функции удовлетворяют по переменным $x$, $t$ условию Гёльдера с показателем $\gamma$ и константой, не зависящей от аргументов $x$, $t$, $\tau$. Предположим, что выполнено *условие равномерной параболичности* для уравнения (1), т. е. для любого вещественного вектора $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ имеет место неравенство

$$(-1)^{k+1} \operatorname{Re} \sum_{|\alpha| = 2k} a_\alpha(x,t,\tau) \sigma^\alpha \geqslant \delta |\sigma|^{2k},$$

где $\sigma^\alpha = \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_m^{\alpha_m}$, $|\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_m^2}$ и постоянная параболичности $\delta > 0$ не зависит от $x$, $t$, $\tau$, $\sigma$. Пусть функции $a_\alpha$ и $f$ таковы, что существуют их средние $A_\alpha$ и $F$, определяемые соотношением

$$P(x,t) = \lim_{N \to \infty} N^{-1} \int\limits_0^N p(x,t,\tau)\, d\tau,$$

где $p = a_\alpha$, $f$, причем сходимость к пределу равномерна относительно $(x,t) \in \mathbb{R}^m \times [0,T]$.

Рассмотрим усредненную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{|\alpha| \leqslant 2k} A_\alpha(x,t) D^\alpha v + F(x,t), \tag{3}$$

$$v(x,0) = \varphi(x). \tag{4}$$

*Решением задачи* (1), (2) ((3), (4)) будем называть функцию $u(x,t)$ ($v(x,t)$), которая непрерывна и равномерно ограничена по совокупности переменных $(x,t) \in \mathbb{R}^m \times [0,T]$, имеет непрерывные производные $\partial u/\partial t$, $D^\alpha u$, ($\partial v/\partial t, D^\alpha v$), $|\alpha| \leqslant 2k$ при $(x,t) \in \mathbb{R}^m \times (0,T]$, а также удовлетворяет уравнению (1) ((3)) при $(x,t) \in \mathbb{R}^m \times (0,T)$ и начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$ ($v(x,0) = \varphi(x)$).

Пусть $r$ — произвольное положительное число, $[r]$ — целая часть $r$. Через $C^r = C^r(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство $[r]$ раз непрерывно дифференцируемых в $\mathbb{R}^m$ функций, удовлетворяющих при целых $r$ условию

$$\|u\|_{C^r} = \sum_{|\alpha|\leqslant r} \sup_{x\in\mathbb{R}^m} |D^\alpha u(x)| < \infty,$$

а при нецелых $r$ условию

$$\|u\|_{C^r} = \|u\|_{C^{[r]}} + \sum_{|\alpha|=[r]} \sup_{x'\neq x''} |D^\alpha u(x'') - D^\alpha u(x')|\,|x''-x'|^{[r]-r} < \infty.$$

Через $C^\delta([T_1,T_2],C^r)$, где $r\geqslant 0$, $\delta\in[0,1)$, обозначим банахово пространство непрерывных в $\mathbb{R}^{m+1}$ функций $u(x,t)$, имеющих непрерывные производные по $x$ до порядка $[r]$ включительно и удовлетворяющих при $\delta=0$ условию

$$\|u\|_{C^0([T_1,T_2],C^r)} = \sup_{t\in[T_1,T_2]} \|u(\cdot,t)\|_{C^r} < \infty,$$

а при $\delta\in(0,1)$ условию

$$\|u\|_{C^\delta([T_1,T_2],C^r)} = \|u\|_{C^0([T_1,T_2],C^r)} + \sup_{(x,t'')\neq(x,t')} \sum_{|\alpha|=[r]} |D^\alpha u(x,t'') - D^\alpha u(x,t')|\,|t''-t'|^{-\delta} < \infty.$$

Вместо $C^0([T_1,T_2],B)$ будем, как правило, писать $C([T_1,T_2],B)$, а вместо $C^0(\mathbb{R}^m):=C^0$ будем писать $C$.

**Теорема 1.** *Пусть $\varphi\in C^{\gamma_0}$, $\gamma_0\in(0,1]$. Тогда при любом $\delta_0\in(0,\min(\gamma,\gamma_0))$ для решений $u_\omega$, $v$ задач* (1), (2) *и* (3), (4) *соответственно справедливо соотношение*

$$\lim_{\omega\to\infty} \|u_\omega - v\|_{C^{\delta_0/2k}([0,T],C^{\delta_0})} = 0.$$

По поводу доказательства теоремы 1 см. п. 9.

**2.** Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x,\delta^{2k-1}u,t,\omega t)D^\alpha u + f(x,\delta^{2k-1}u,t,\omega t), \tag{5}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad t\in[0,T], \quad T=\mathrm{const}>0. \tag{6}$$

Здесь через $\delta^{2k-1}u$ обозначена вектор-функция $\bigl(u, \frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x_n^{2k-1}}\bigr)$, составленная из всевозможных частных производных функции $u$ по $x_1,x_2,\dots,x_m$ до порядка $2k-1$ включительно. Обозначим через $p=\sum\limits_{i=0}^{2k-1}\frac{(m+i-1)!}{i!(m-1)!}$ количество таких производных. Пусть $M$ — произвольное ограниченное множество в комплексном пространстве $\mathbb{C}^p$. Будем предполагать, что функции $a_\alpha(x,e,t,\tau)$, $f(x,e,t,\tau)$ в уравнении (5) и их производные $\frac{\partial a_\alpha}{\partial e_i}(x,e,t,\tau)$, $\frac{\partial f}{\partial e_i}(x,e,t,\tau)$ по компонентам вектора $e\in\mathbb{C}^p$ определены, непрерывны по совокупности переменных и равномерно ограничены при $x\in\mathbb{R}^m$, $e\in M$, $t\in[0,T]$, $\tau\in[0,\infty)$. Пусть, кроме того, для некоторого $\gamma\in(0,1]$ функции $a_\alpha(x,e,t,\tau)$, $f(x,e,t,\tau)$, $\frac{\partial}{\partial e_i}a_\alpha(x,e,t,\tau)$ и $\frac{\partial}{\partial e_i}f(x,e,t,\tau)$ удовлетворяют по переменным $x$, $t$ условию Гёльдера с показателем $\gamma$ и константой $C=C(M)$, не зависящей от аргументов $x\in\mathbb{R}^m$, $e\in M$, $t\in[0,T]$, $\tau\in[0,\infty]$, а функции $\frac{\partial a_\alpha}{\partial e_i}(x,e,t,\tau)$ и $\frac{\partial f}{\partial e_i}(x,e,t,\tau)$ удовлетворяют еще равномерно относительно $x$, $t$, $\tau$ условию Липшица по $e$:

$$|p(x,e'',t,\tau) - p(x,e',t,\tau)| \leqslant L|e''-e'|,$$

где $p=\frac{\partial a_\alpha}{\partial e_i}$ или $\frac{\partial f}{\partial e_i}$, $x\in\mathbb{R}^m$, $t\in[0,T]$, $\tau\in[0,\infty)$, $e',e''\in M$, $L=L(M)$ — постоянная.

Предположим, что выполнено условие равномерной параболичности для уравнения (5) (см. определение в п. 1).

Рассмотрим усредненную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha(x, \delta^{2k-1}v, t, \omega t) D^\alpha v + F(x, \delta^{2k-1}v, t), \tag{7}$$

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

*Решением задачи* (5), (6) ((7), (8)) при $t \in [0,T]$, $T > 0$, назовем функцию $u(x,t)$ ($v(x,t)$), которая вместе с производными $D^\alpha u$ ($D^\alpha v$), $|\alpha| \leqslant 2k-1$, непрерывна и ограничена по совокупности переменных $(x,t) \in \mathbb{R}^m \times [0,T]$, а также удовлетворяет уравнению (5) ((7)) при $(x,t) \in \mathbb{R}^m \times (0,T]$ и начальному условию (6) ((8)).

Предположим, что $\varphi \in C^{2k+\gamma_0}$, $\gamma_0 \in (0,1]$; задача (7), (8) разрешима на участке времени $t \in [0,T]$ и функция $v$ принадлежит $C([0,T], C^{2k-1+\gamma_1})$ (последнее предположение естественно, так как по крайней мере при достаточно малом $T > 0$ оно имеет место в силу теоремы 6.3 из [13, гл. 3] при любом $\gamma_1 \in (0, \min(\gamma, \gamma_0))$).

Заметим, что из последнего предположения ввиду известных оценок [13] следует неравенство

$$\|v\|_{C^{\gamma_1/2k}([0,T], C^{2k+\gamma_1})} < \infty. \tag{9}$$

**Теорема 2.** *Существует такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ задача* (5), (6) *однозначно разрешима на участке $t \in [0,T]$, причем для любого $\delta_0 \in (0, \min(\gamma, \gamma_0))$ выполняется соотношение*

$$\lim_{\omega \to \infty} \|u_\omega - v\|_{C^{\delta_0/2k}([0,T], C^{2k+\delta_0})} = 0,$$

*где $u_\omega$ и $v$ — решения задач* (5), (6) *и* (7), (8) *соответственно.*

Доказательство теоремы 2 содержится в пп. 4–6.

**3.** В этом пункте сформулируем результат, описывающий в определенном смысле промежуточную по отношению к теоремам 1 и 2 ситуацию.

Предположим, что уравнение (5) линейно относительно производных $D^\alpha u$, $s \leqslant |\alpha| \leqslant 2k$, где $0 < s \leqslant 2k$. Перепишем в этом случае задачу (5), (6) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{s \leqslant |\alpha| \leqslant 2k} a_\alpha(x, \delta^{s-1}u, t, \omega t) D^\alpha u + f(x, \delta^{s-1}u, t, \omega t), \tag{10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad t \in [0,T], \quad T = \mathrm{const} > 0. \tag{11}$$

Обозначим через $p_1 = \sum\limits_{i=0}^{s-1} \frac{(m+i-1)!}{i!(m-1)!}$ количество частных производных функции $u$ по $x_1, x_2, \dots, x_m$ до порядка $s-1$ включительно. Пусть $M$ — произвольное ограниченное множество в $\mathbb{C}^{p_1}$. Будем предполагать, что функции $a_\alpha(x,e,t,\tau)$, $f(x,e,t,\tau)$ в уравнении (10) и их производные $\frac{\partial a_\alpha}{\partial e_i}(x,e,t,\tau)$, $\frac{\partial f}{\partial e_i}(x,e,t,\tau)$ по компонентам вектора $e \in \mathbb{C}^{p_1}$ определены, непрерывны по совокупности переменных и равномерно ограничены при $x \in \mathbb{R}^m$, $e \in M$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,\infty]$. Кроме того, функции $a_\alpha$, $f$, $\partial a_\alpha/\partial e_i$ и $\partial f/\partial e_i$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\gamma \in (0,1]$ по переменным $x$, $t$ и константой $c(M)$, не зависящей от $x \in \mathbb{R}^m$, $e \in M$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,\infty]$, а функции $\partial a_\alpha/\partial e_i$ и $\partial f/\partial e_i$ кроме того удовлетворяют равномерно относительно $x$, $t$, $\tau$ условию Липшица по $e$:

$$|p(x,e'',t,\tau) - p(x,e',t,\tau)| \leqslant L|e''-e'|,$$

где $p = \partial a_\alpha/\partial e_i$ или $\partial f/\partial e_i$, $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,\infty]$, $e', e'' \in M$, $L = L(M) = \mathrm{const}$.

Для уравнения (10) предполагается выполненным условие равномерной параболичности
$$(-1)^{k+1} \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x,e,t,\tau)\sigma^\alpha \geqslant \delta|\sigma|^{2k},$$
где постоянная $\delta = \delta(M) > 0$ не зависит от $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,\infty]$, $e \in M$ и вещественных векторов $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$. Пусть равномерно относительно $(x,e,t) \in \mathbb{R}^m \times M \times [0,T]$ существуют пределы, выражающие средние $A_\alpha$ и $F$ функций $a_\alpha$ и $f$ по $\tau$ (см. п. 2), $\varphi \in C^{s-1+\gamma_0}$, $\gamma_0 \in (0,1]$ и усредненная задача
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{s \leqslant |\alpha| \leqslant 2k} A_\alpha(x, \delta^{s-1}v, t)D^\alpha v + F(x, \delta^{s-1}v, t), \tag{12}$$
$$v(x,0) = \varphi(x) \tag{13}$$
разрешима на участке времени $t \in [0,T]$ (определение решения см. в п. 1.), причем для любого $\gamma_1 \in (0, \min(\gamma,\gamma_0))$ выполняется оценка
$$\|v\|_{C([0,T],C^{s-1+\gamma_0})} < \infty$$
(это условие выполняется по крайней мере при достаточно малом $T > 0$, см. [13] или лемму 5 ниже).

**Теорема 3.** *Существует такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ задача* (5), (6) *однозначно разрешима на участке $t \in [0,T]$, причем при $\delta_0 \in (0, \min(\gamma,\gamma_0))$ выполняется соотношение*
$$\lim_{\omega\to\infty} \|u_\omega - v\|_{C^{\delta_0/2k}([0,T],C^{s-1+\delta_0})} = 0,$$
*где $u_\omega$ и $v$ — решения задач* (10), (11) *и* (12), (13) *соответственно.*

Доказательство теоремы 3 содержится в пп. 7, 8.

Замечание 1. В силу отмеченных в работе [12] оценок (1.20), (1.21) и простого мультипликативного неравенства указанные в формулировках теорем 1–3 предельные соотношения достаточно доказать для пространств $C([0,T],C^{\delta_0})$, $C([0,T],C^{2k+\delta_0})$ и $C([0,T],C^{s-1+\delta_0})$ соответственно.

**4.** Ниже для определенности будем считать, что $\gamma \leqslant \gamma_0$. Следуя [13], фундаментальное решение $Z(t,\tau,x,\xi)$ уравнения (1) представим в виде суммы
$$Z(t,\tau,x,\xi) = G(t,\tau,x-\xi,\xi) + W(t,\tau,x,\xi), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \ x,\xi \in \mathbb{R}^m, \tag{14}$$
где функция $G(t,\tau,x,y)$ является фундаментальным решением уравнения с параметром $y \in \mathbb{R}^m$:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(y,t,\omega t)D^\alpha u.$$
Справедливы оценки
$$|D^\alpha G(t,\tau,x,y)| \leqslant c_\alpha (t-\tau)^{-\frac{m+|\alpha|}{2k}} \exp[-c\rho(t-\tau,x)], \tag{15}$$
$$|D^\alpha W(t,\tau,x,\xi)| \leqslant c_\alpha (t-\tau)^{-\frac{m+|\alpha|-\gamma}{2k}} \exp[-c\rho(t-\tau,x-\xi)], \tag{16}$$
где $|\alpha| \leqslant 2k$, $\rho(t,x) = \sum\limits_{i=1}^m \big(\frac{|x_i|}{t^{1/2k}}\big)^{\frac{2k}{2k-1}}$, а $c$ и $c_\alpha$ — не зависящие от $\omega$ константы.

Для уравнений (и даже для параболических по Петровскому систем) без параметра $\omega$ такие оценки хорошо известны [13, гл. I; § 3, п. 2, (2), (16′)]. Существование не зависящих от $\omega$ констант $c$ и $c_\alpha$ в нашем случае нетрудно установить, анализируя вывод указанных оценок для одного уравнения, представленный в [13, гл. I, вводный параграф, пп. 2, 5, 7]. Для полноты изложения наметим этот вывод, уделяя основное внимание анализу констант в оценках.

Имеем [13, с. 17, формула (13); с. 34, последняя формула]

$$G(t,\tau,x,y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \exp i(x,\sigma) Q(t,\tau,\sigma)\, d\sigma, \tag{17}$$

где

$$Q(t,\tau,s) = \exp\left[(-1)^k \int\limits_\tau^t \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(y,\tau,\omega\tau) s^\alpha\, d\tau\right],$$

$s = \sigma + i\gamma$, $\sigma,\gamma \in \mathbb{R}^m$. Учитывая условие параболичности и рассматривая два случая [13, с. 35]: 1) $|\gamma| < \eta|\sigma|$, 2) $|\gamma| > \eta|\sigma|$ при достаточно малом $\eta > 0$, легко устанавливаем оценку

$$|Q(t,\tau,s)| \leqslant \exp\{(-\delta_1|\sigma|^{2k} + F|\gamma|^{2k})(t-\tau)\}, \tag{18}$$

где положительные постоянные $\delta_1$, $F$ зависят лишь от постоянной параболичности $\delta$ и от максимума модулей коэффициентов $a_\alpha(x,t,\tau)$, $|\alpha| = 2k$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,\infty)$ и, следовательно, не зависят от $\omega > 0$. Из (17), (18) на основании интегральной теоремы Коши следует представление [13]

$$\begin{aligned} G(t,\tau,x,y) &= [2\pi(t-\tau)^{1/2k}]^{-m} \\ &\times \int\limits_{\mathbb{R}^m} \exp[i(x(t-\tau)^{-1/2k}, \sigma+i\gamma)] Q(t,\tau,(\sigma+i\gamma)(t-\tau)^{-1/2k})\, d\sigma \end{aligned} \tag{19}$$

при любом $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_m) \in \mathbb{R}^m$. Из (18), (19) вытекает оценка

$$|G(t,\tau,x,y)| \leqslant [2\pi(t-\tau)^{1/2k}]^{-m} \exp\{-(x(t-\tau)^{-1/2k},\gamma) + F|\gamma|^{2k}\} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \exp(-\delta_1|\sigma|^{2k})\, d\sigma.$$

Полагая [13, с. 35]

$$\gamma_s = \gamma_0 (\operatorname{sgn} x_s)^{\frac{2k}{2k-1}} (x_s(t-\tau)^{-1/2k})^{\frac{1}{2k-1}}, \quad s = 1,2,\dots,m,$$

с достаточно малым $\gamma_0 > 0$, получим оценку (15) при $\alpha = 0$. Для остальных $|\alpha| \leqslant 2k$ неравенства (15) устанавливаются аналогично с помощью дифференцирования соотношения (19) по $x$.

Перейдем к оценкам (16). Слагаемое $W(t,\tau,x,\xi)$ в представлении фундаментального решения $Z(t,\tau,x,\xi)$ (14) имеет вид [13]

$$W(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^m} G(t,\beta,x-y,y)\varphi(\beta,\tau,y,\xi)\, dy,$$

где функция $\varphi(t,\tau,x,\xi)$ в силу равенства

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|\alpha|\leqslant 2k} a_\alpha(x,t,\omega t) D^\alpha\right] Z = 0$$

удовлетворяет уравнению

$$\varphi(t,\tau,x,\xi) = -K(t,\tau,x,\xi) - \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(t,\beta,x,y)\varphi(\beta,\tau,y,\xi)\, dy, \tag{20}$$

$$K(t,\tau,x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2k} [a_\alpha(\xi,t,\omega t) - a_\alpha(x,t,\omega t)] D^\alpha G - \sum_{|\alpha|<2k} a_\alpha(\xi,t,\omega t) D^\alpha G.$$

Из оценок (15) и последнего представления следует неравенство

$$|K(t,\tau,x,\xi)| \leqslant A(t-\tau)^{-\frac{m+2k-\gamma}{2k}} \exp[-c\rho(t-\tau,x-\xi)], \tag{21}$$

где постоянная $A$ зависит лишь от тех же величин, что и константы $c$, $c_\alpha$ в оценках (15), и от постоянных Гёльдера по $x$ функций $a_\alpha(x,t,\tau)$, $|\alpha| = 2k$, $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,\infty)$. Решение $\varphi$ уравнения (20), как установлено в [13], существует и имеет вид

$$\varphi(t,\tau,x,\xi) = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s K_s(t,\tau,x,\xi), \quad K_1(t,\tau,x,\xi) = K(t,\tau,x,\xi),$$

$$K_n(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(t,\beta,x,y)K_{n-1}(\beta,\tau,y,\xi)\,d\xi.$$

Оценки $|K(t,\tau,x,\xi)|$ в [13 с. 35–36, 75–76] опираются лишь на неравенство (21). В результате устанавливается оценка

$$|\varphi(t,\tau,x,\xi)| \leqslant B(t-\tau)^{-\frac{2k+m-\gamma}{2k}} \exp[-c\rho(t-\tau,x-\xi)], \tag{22}$$

где постоянная $B > 0$ зависит лишь от констант $A$ и $c$ (в выкладках [13] вместо $G_0$ везде нужно подразумевать нашу функцию $G$).

Повторением выкладок [13, с. 78–80] устанавливается также оценка

$$\begin{gathered}|\varphi(t,\tau,x',\xi) - \varphi(t,\tau,x,\xi)| \leqslant C|x'-x|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-\frac{m+2k-\gamma_2}{2k}} \\ \times \max\{\exp[c\rho(t-\tau,x-\xi)], \exp[-c\rho(t-\tau,x'-\xi)]\}, \quad 0<\gamma_1<\gamma, \quad \gamma_2 = \gamma-\gamma_1,\end{gathered} \tag{23}$$

где постоянная $C$ зависит от констант $c$, $c_\alpha$ в оценках (15) и от постоянных Гёльдера по $x$ функций $a_\alpha(x,t,\tau)$, $|\alpha| \leqslant 2k$ при $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,\infty)$.

Оценки (16) с не зависящими от $\omega > 0$ постоянными $c$, $c_\alpha$ выводятся теперь с учетом неравенств (22), (23) посредством выкладок (15), (16′) [13, с. 80–92].

**Лемма 1.** *Пусть $\delta_0 \in (0,\gamma)$ и $r$ — произвольное положительное число. Тогда существуют такие положительные числа $T_1 = T_1(r)$ и $a_1 = a_1(r)$, что для любого $s \in [0,T)$ и любой функции $\varphi$, для которой $\|\varphi\|_{C^{2k+\gamma_0}} \leqslant r$, задача Коши для уравнения (5) с начальным условием $u(x,s) = \varphi(x)$ имеет при $\omega > 0$ единственное решение на участке $t \in [s, s+T_0] = [s, s+T_1] \cap [0,T]$ и для него справедлива оценка*

$$\|u_\omega\|_{C([s,s+T_0],C^{2k+\delta_0})} \leqslant a_1.$$

Доказательство. В задаче (5), (6) сделаем замену переменных $u(x,t) = p(x,t) + \varphi(x)$. Придем к задаче

$$L_p(p) = \hat{f}(p,t,\omega t), \tag{24}$$

$$p(x,0) = 0, \tag{25}$$

где

$$L_p := \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} \hat{a}_\alpha(p,t,\omega t)D^\alpha,$$

$$\hat{f}(p,t,\tau) := f(x,\delta^{2k-1}(p+\varphi),t,\tau) + \sum_{|\alpha|=2k} \hat{a}_\alpha(p,t,\tau)D^\alpha\varphi(x),$$

$$\hat{a}_\alpha(p,t,\tau) := a_\alpha(x,\delta^{2k-1}(p+\varphi),t,\tau),$$

причем функции $\hat{a}_\alpha(x,e,t,\tau)$ и $\hat{f}(x,e,t,\tau)$ обладают свойствами, сформулированными в п. 2 для $a_\alpha$ и $f$.

Для произвольного $p \in C([0,T], C^{2k-1+\gamma})$ определим фундаментальное решение [13] $Z(t,\tau,x,\xi) = Z_p(t,\tau,x,\xi) = G_p(t,\tau,x-\xi,\xi) + W_p(t,\tau,x,\xi)$ уравнения $L_p(u) = 0$. Введем два обозначения: $\Delta_{h,x} f(x,t) := f(x+h,t) - f(x,t)$, $h \in \mathbb{R}^m$,

$$v_1(t,x,\varphi) := \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(t,\tau,x,\xi)\psi(\xi,\tau)\,d\xi, \quad \psi \in C\left([0,T], C^\gamma\right), \quad 0 \leqslant t_0 < t \leqslant T.$$

При $\|p\|_{C([0,T],C^{2k-1+\gamma})} \leqslant a_0 < \infty$ и $\omega > 0$ справедливы следующие оценки:

$$|D^\alpha Z_p(t,\tau,x,\xi)| \leqslant c_0(t-\tau)^{-\frac{m+|\alpha|}{2k}} \exp[-c_1\rho(t-\tau, x-\xi)], \tag{26}$$

$$|\Delta_{h,x} D^\alpha Z_p(t,\tau,x,\xi)| \leqslant c_0(t-\tau)^{-\frac{m+|\alpha|+\gamma'}{2k}} |h|^{\gamma'} \times \max\{\exp[-c_1\rho(t-\tau,x-\xi)], \exp[-c_1\rho(t-\tau,x+h-\xi)]\}, \tag{27}$$

$$|D^\alpha W_p(t,\delta,x,\xi)| \leqslant c_0(t-\tau)^{-\frac{m+|\alpha|-\gamma}{2k}} \exp[-c_1\rho(t-\tau,x-\xi)], \tag{28}$$

$$|D^\alpha v_1(t,x,\psi)| \leqslant c_0(t-t_0)^{-\frac{2k-|\alpha|+\gamma}{2k}} \|\psi\|_{C([0,T],C^\gamma)}, \tag{29}$$

$$|\Delta_{h,x} D^\alpha v_1| \leqslant c|h|^{\gamma'}(t-t_0)^{\frac{2k-|\alpha|+\gamma-\gamma'}{2k}} \|\psi\|_{C([0,T],C^\gamma)}, \tag{30}$$

где $c_0$, $c_1$, $\gamma'$ — не зависящие от $t$, $t_0$, $\tau$, $x$, $\xi$, $\psi$, $h$, $\rho$, $\omega$ постоянные, причем $\gamma' = \gamma$ при $|\alpha| < 2k$ и $0 \leqslant \gamma' < \gamma$ при $|\alpha| = 2k$.

Оценки (26), (28) вытекают из соотношений (14)–(16). Неравенства (27), (29), (30), как и (26), (28), при фиксированных значениях параметра $\omega$ содержатся в [13]. Справедливость этих неравенств в нашей ситуации следует из простого анализа их вывода в [13].

Из результатов монографии [13] следует, что задача (14), (15) в классе решений из $C([s, s+T_0], C^{2k+\delta_0})$ эквивалентна интегральному уравнению

$$p = \int\limits_{s}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(t,\tau,x,\xi)\hat{f}(p,t,\omega t)\,d\xi := \mathscr{P}(p), \quad t \in [s, s+T_0].$$

Для доказательства леммы 1 достаточно показать, что существует такое число $T_1 = T_1(r) > 0$, что оператор $\mathscr{P}$ является сжимающим в шаре $S_{T_0} := \{p : \|p\|_{C([s,s+T_0],C^{2k+\delta_0})} \leqslant 1\}$, где $[s, s+T_0] = [s, s+T_1] \cap [0,T]$.

Вначале согласно соотношению (30) выберем $T_1 > 0$ так, что шар $S_{T_0}$ будет инвариантным относительно оператора $\mathscr{P}$.

Пусть теперь $p_1, p_2 \in S_{T_1}$, $w_i = \mathscr{P}(p_i)$, $i = 1,2$, $w = w_2 - w_1$. Оценим разность $w = \mathscr{P}(p_2) - \mathscr{P}(p_1)$. Воспользуемся соотношениями

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} \hat{a}_\alpha(p_2,t,\omega t) D^\alpha w = \sum_{|\alpha|=2k} [\hat{a}_\alpha(p_2,t,\omega t) - \hat{a}_\alpha(p_1,t,\omega t)] \times D^\alpha w_1 + \hat{f}(p_2,t,\omega t) - \hat{f}(p_1,t,\omega t) := B(p_1,p_2), \tag{31}$$

$$w(x,s) = 0. \tag{32}$$

Так как $w_1$ является решением задачи

$$L_{p_1}(w_1) = \hat{f}(p_1,t,\omega t), \quad w_1(x,s) = 0,$$

для некоторого $\delta_1 \in (\delta_0, \gamma)$ с помощью (30) получаем оценку $\|w_1\|_{C([s,s+T_0],C^{2k+\delta_1})} \leqslant c_0$, вслед за которой выводим неравенство

$$\|B(p_1,p_2)\|_{C([s,s+T_0],C^{\delta_1})} \leqslant c_1\|p_2 - p_1\|_{C([s,s+T_0],C^{2k})}, \tag{33}$$

где постоянные $c_0$, $c_1$ не зависят от $p_1$, $p_2$, $t$, $\omega$.

Переходя от задачи (31), (32) к интегральному уравнению и учитывая соотношение (33), с помощью оценки (30) придем к неравенству

$$\|\mathscr{P}(p_2)-\mathscr{P}(p_1)\|_{C([s,s+T_0],C^{2k+\delta_0})} \leqslant c(T_1)\|p_2-p_1\|_{C([s,s+T_0],C^{2k+\delta_0})},$$

где постоянная $c(T_1)$ не зависит от $p_1$, $p_2$, $\omega$ и $\lim\limits_{T_1\to 0} c(T_1)=0$.

Выберем $T_1$ таким, что $c(T_1)<1$. Тогда $P$ в шаре $S_{T_0}$ является оператором сжатия. Лемма 1 доказана.

**5.** Разность $w=u-v$ решений задач (5), (6) и (7), (8) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} L_u(w) &:= \frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x,\delta^{2k-1}u,t,\omega t)D^\alpha w \\ &\quad - \sum_{|\alpha|=2k}\sum_{0\leqslant i\leqslant p} b_{\alpha i}(u,x,t,\omega)D^{\beta i}w - \sum_{0\leqslant i\leqslant p} c_i(u,x,t,\omega)D^{\beta i}w \\ &\quad = \sum_{|\alpha|=2k}\{a_\alpha[x,(\delta^{2k-1}v)(x,t),t,\omega t] - A_\alpha[x,(\delta^{2k-1}v)(x,t),t]\} \\ &\times (D^\alpha v)(x,t) + f[x,(\delta^{2k-1}v)(x,t),t,\omega t] - F[x,(\delta^{2k-1}v)(x,t),t] := \Phi(x,t,\omega t), \end{aligned} \tag{34}$$

$$w(x,0)=0. \tag{35}$$

Здесь $p$ — определенное в п. 2 число,

$$\begin{aligned} \sum_{0\leqslant i\leqslant p} b_{\alpha i}D^{\beta i}w &:= [a_\alpha(x,\delta^{2k-1}u,t,\omega t) - a_\alpha(x,\delta^{2k-1}v,t,\omega t)]D^\alpha v \\ &= \sum_{0\leqslant i\leqslant p}\left[D^\alpha v\int_0^1 \frac{\partial a_\alpha(x,\dots,\theta D^{\beta i}u+(1-\theta)D^{\beta i}v,\dots,t,\omega t)}{\partial e_i}\,d\theta\right] D^{\beta i}w, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{0\leqslant i\leqslant p} c_i D^{\beta i}w &:= f(x,\delta^{2k-1}u,t,\omega t) - f(x,\delta^{2k-1}v,t,\omega t) \\ &= \sum_{0\leqslant i\leqslant p}\left[\int_0^1 \frac{\partial f(x,\dots,\theta D^{\beta i}u+(1-\theta)D^{\beta i}v,\dots,t,\omega t)}{\partial e_i}\,d\theta\right] D^{\beta i}w, \end{aligned}$$

$\beta_i$ — порядок производной, отвечающей компоненте $e_i$ вектора $e$ при естественном соответствии между вектором $e=(e_0,\dots,e_i,\dots)$ и вектор-функцией $\delta^{2k-1}u$ $=(u,\dots,D^{\beta i}u,\dots)$, $|\beta_i|\leqslant 2k-1$.

В силу леммы 1 существует такое число $T_0>0$, что задача (5), (6) на участке $t\in[0,T_0]$ имеет решение, причем $\|u\|_{C([0,T_0],C^{2k+\delta_0})(\mathbb{R}^m)}\leqslant c_0$, где $c_0$ не зависит от $\omega$. Из этой оценки следует существование фундаментального решения $Z_u(t,\tau,x,\xi)$ уравнения $L_u(w)=0$.

Перейдем от задачи (34), (35) к интегральному уравнению

$$w(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^m} Z_u(t,\tau,x,\xi)\Phi(\xi,\tau,\omega\tau)\,d\xi := [I_\omega(u,v)](x,t).$$

**Лемма 2.** *Пусть $0\leqslant\delta_0<\gamma$ и $k_0>0$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\omega_0=\omega_0(k_0)$, что для всех $p$, удовлетворяющих неравенству*

$$\|p\|_{C([0,T_0],C^{2k-1+\gamma})}\leqslant k_0, \tag{36}$$

*справедливо соотношение*

$$\|I_\omega(p,v)\|_{C([0,T_0],C^{2k+\delta_0})} < \varepsilon, \quad \omega \geqslant \omega_0.$$

Лемма 2 вытекает из следующих двух утверждений.

**Лемма 3.** *Пусть выполнено условие* (36). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\sigma_0 = \sigma_0(k_0)$, *что при всех* $\omega > 0$ *и* $\sigma \in [0,\sigma_0]$ *выполняются оценки*

$$\|I_\omega(p,v)\|_{C([0,\sigma],C^{2k+\delta_0})} < \varepsilon,$$

$$\left\| \int\limits_{t-\sigma_0}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(t,\tau,x,\xi)\Phi(\xi,\tau,\omega\tau)\,d\xi \right\|_{C([\sigma_0,T_0],C^{2k+\delta_0})} < \varepsilon,$$

$$\left\| \int\limits_{0}^{\sigma} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(t,\tau,x,\xi)\Phi(\xi,\tau,\omega\tau)\,d\xi \right\|_{C([\sigma_0,T_0],C^{2k+\delta_0})} < \varepsilon.$$

Лемма 3 вытекает из неравенств (27) и (30).

**Лемма 4.** *Пусть выполнено условие* (36) *и* $\sigma_0$ *то же, что и в лемме* 3. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\omega_0 = \omega_0(k_0) > 0$, *что при* $\omega > \omega_0$ *справедлива оценка*

$$\left\| \int\limits_{\sigma_0}^{t-\sigma_0} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(t,\tau,x,\xi)\Phi(\xi,\tau,\omega\tau)\,d\xi \right\|_{C([2\sigma_0,T_0],C^{2k+\delta_0})} < \varepsilon.$$

Доказательство. Разобьем промежуток интегрирования $(\sigma_0, t-\sigma_0]$ на $\ell$ равных частей, где $\ell$ — натуральное число, которое подберем ниже:

$$(\sigma_0, t-\sigma_0] = \bigcup_{i=0}^{\ell-1} (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad \tau_{i+1} - \tau_i = \frac{t-2\sigma_0}{\ell}.$$

Воспользуемся представлением

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\sigma_0}^{t-\sigma_0} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(t,\tau,x,\xi)\Phi(\xi,\tau,\omega\tau)\,d\xi
&= \sum_{i=0}^{\ell-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(t,\tau,x,\xi)[\Phi(\xi,\tau,\omega\tau) - \Phi(\xi,\tau_i,\omega\tau)]\,d\xi \\
&+ \sum_{i=0}^{\ell-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} [Z_p(t,\tau,x,\xi) - Z_p(t,\tau_i,x,\xi)]\Phi(\xi,\tau_i,\omega\tau)\,d\xi \\
&+ \sum_{i=0}^{\ell-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(t,\tau_i,x,\xi)\Phi(\xi,\tau_i,\omega\tau)\,d\xi := \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \quad (37)
\end{aligned}$$

Из оценки (9) и предположений п. 2 следует, что для достаточно малого $\gamma' \in (0,1)$ и любых $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T_0$ выполняется равномерная относительно $\tau \in [0,\infty)$ оценка

$$\|\Phi(x,t_2,\tau) - \Phi(x,t_1,\tau)\|_C < c|t_2 - t_1|^{\gamma'}, \quad c = \mathrm{const}\,.$$

Из этой оценки и неравенства (27) вытекают следующие соотношения:

$$\left\| D^\alpha \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(t,\tau,x,\xi)[\Phi(\xi,\tau_{i+1},\omega\tau) - \Phi(\xi,\tau_i,\omega\tau)]\, d\xi \right\|_{C^{\delta_0}(\mathbb{R}^m)}$$
$$\leqslant c_1(\tau_{i+1}-\tau_i)^{\gamma'} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (t-\tau)^{\frac{|\alpha|+\delta_0}{2k}}\, d\tau \leqslant \frac{c_1}{\sigma_0^{\frac{|\alpha|+\delta_0}{2k}}}(\tau_{i+1}-\tau_i)^{\gamma'+1},$$

$c = \mathrm{const}$, $|\alpha| \leqslant 2k$. Исходя из этого, подберем такое число $\ell_1 > 0$, что для всех $\ell \geqslant \ell_1$ при всех $\omega > 0$ выполняется неравенство

$$\|\Sigma_1\|_{C([0,T_0],C^{2k+\delta_0})} < \varepsilon/3. \tag{38}$$

Прежде чем оценивать слагаемое $\Sigma_2$, установим один вспомогательный результат.

Обозначим через $U_\omega(t,\tau)$ $(C \to C)$ оператор сдвига по траекториям уравнения

$$L_p(u) = 0, \tag{39}$$

определенный соотношением

$$[U_\omega(t,\tau)]\psi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(t,\tau,x,\xi)\psi(\xi)\, d\xi, \quad \psi \in C.$$

Пусть $\psi \in C^{2k+\gamma'}$, $\gamma' \in (0,1)$. Тогда при $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < t \leqslant T$ и $\omega > 0$ справедлива оценка

$$\|[U_\omega(t,\tau_2) - U_\omega(t,\tau_1)]\psi\|_{C^{2k+\delta_1}} \leqslant c(\tau_2-\tau_1)(t-\tau_2)^{-\frac{2k+\delta_1}{2k}}\|\psi\|_{C^{2k+\gamma'}}, \tag{40}$$

где $0 \leqslant \delta_1 < \gamma$ и $c$ — не зависящая от $p$, $\omega$, $\tau_1$, $\tau_2$, $t$ и $\psi$ постоянная. Докажем ее.

В силу единственности решения задачи Коши имеет место соотношение

$$U_\omega(t,\delta_1)\psi = U_\omega(t,\tau_2)U_\omega(\tau_2,\tau_1)\psi, \quad t > \tau_2 > \tau_1,$$

из которого следует представление

$$[U_\omega(t,\tau_2) - U_\omega(t,\tau_1)]\psi = U_\omega(t,\tau_2)[1 - U_\omega(\tau_2,\tau_1)]\psi. \tag{41}$$

Докажем, что существует такая постоянная $c$, при которой справедливо неравенство

$$\|[1 - U_\omega(\tau_2,\tau_1)]\psi\|_C \leqslant c(\tau_2-\tau_1)\|\psi\|_{C^{2k+\gamma'}}. \tag{42}$$

Для этого обозначим через $u(x,t,\tau_1)$ решение уравнения (39), удовлетворяющее начальному условию $u(x,\tau_1,\tau_1) = \psi(x)$. Очевидно,

$$[1 - U_\omega(\tau_2,\tau_1)]\psi(x) = \int\limits_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t,\tau_1)\, dt$$
$$= \int\limits_{\tau_2}^{\tau_1} \Big[\sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x,\delta^{2k-1}u,t,\omega t)D^\alpha u + \sum_{|\alpha|=2k}\sum_{0\leqslant i\leqslant p} b_{\alpha i}(u,x,t,\omega)D^{\beta i}u$$
$$+ \sum_{0\leqslant i\leqslant p} c_i(u,x,t,\omega)D^{\beta i}u\Big]\, dt. \tag{43}$$

Сделав в уравнении (39) замену $w = u + \psi$ и воспользовавшись неравенством (19), получим оценку

$$\|u(x,t,\tau_1)\|_{C^{2k}} \leqslant c\|\psi\|_{C^{2k+\gamma'}}, \quad \gamma' \in (0,1), \tag{44}$$

где $c$ не зависит от $t \geqslant \tau_1$, $\psi$.

Из (43), (44) следует неравенство (42). Оценка (40) вытекает из представления (41) и соотношений (27), (42).

Перейдем непосредственно к оценке $\Sigma_2$.

Для непрерывной в $\mathbb{R}^m$ функции $f$ и $r > 0$ через $(f)_r$ будем обозначать усреднение по Стеклову функции $f$ с радиусом усреднения $r$. Нетрудно видеть, что семейство заданных в $\mathbb{R}^m$ функций $\hat{\Phi}_{\tau,\omega}(x) := \Phi(x, \tau, \omega\tau)$, где $\tau \in [0, T_0]$, $\omega > 0$ — параметры, равностепенно непрерывно в $\mathbb{R}^m$. Отсюда легко получаем оценку

$$\|\hat{\Phi}_{\tau,\omega}(x) - (\hat{\Phi}_{\tau,\omega})_r(x)\|_C \leqslant c(r), \tag{45}$$

где $c(r)$ не зависит от $\tau$, $\omega$ и $\lim\limits_{r\to 0} c(r) = 0$.

Теперь воспользуемся представлением

$$\Sigma_2 = \sum_{i=0}^{\ell-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} [Z_p(t,\tau,x,\xi) - Z_p(t,\tau_i,x,\xi)](\Phi)_r(\xi,\tau_i,\omega\tau)\,d\xi$$
$$+ \sum_{i=0}^{\ell-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} [Z_p(t,\tau,x,\xi) - Z_p(t,\tau_i,x,\xi)][\Phi(\xi,\tau_i,\omega\tau) - (\Phi)_r(\xi,\tau_i,\omega\tau)]\,d\xi$$
$$:= \Sigma_{2,1} + \Sigma_{2,2}. \tag{46}$$

Вначале, учитывая (45), выберем $r$ столь малым, что равномерно относительно $t$, $\omega$, $\ell$ справедливо неравенство

$$\|\Sigma_{2,2}\|_{C^{2m+\delta_0}} < \varepsilon/6. \tag{47}$$

После этого выберем достаточно большим $\ell_2$, так что согласно (40), при $\ell \leqslant \ell_2$

$$\|\Sigma_{2,1}\|_{C^{2m+\delta_0}} < \varepsilon/6. \tag{48}$$

Ниже будем считать, что число $\ell$ промежутков в разбиении $(\sigma_0, t - 2\sigma_0)$ равно $\max(\ell_1, \ell_2)$.

Для завершения доказательства леммы осталось выбрать такое $\omega_0 = \omega_0(k_0, \sigma_0) > 0$, что при $\omega > \omega_0$

$$\|\Sigma_3\|_{C([2\sigma_0,T_0],C^{2k+\delta_0})} < \varepsilon/3. \tag{49}$$

Этого добиваемся, воспользовавшись представлением

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi(\xi,\tau_i,\omega\tau)\,d\tau = \tau_{i+1}\left[\frac{1}{\omega\tau_{i+1}} \int\limits_0^{\omega\tau_{i+1}} \Phi(\xi,\tau_i,\tau)\,d\tau\right] - \tau_i\left[\frac{1}{\omega\tau_i}\int\limits_0^{\omega\tau_i} \Phi(\xi,\tau_i,\tau)\,d\tau\right],$$

с учетом того, что среднее $\Phi(x,t,\tau)$ по $\tau$ равно 0. Из соотношений (37), (38), (46)–(49) следует заключение леммы 4.

**6.** Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 2.

Из условия (9) и оценки (30) легко вытекает соотношение

$$\|v\|_{C([0,T],C^{2k+\delta_0})} = c^* < \infty, \quad \delta_0 \in (0,\gamma_0). \tag{50}$$

В силу леммы 2 для любого фиксированного $0 < \varepsilon < 1$ найдем такое $\omega^* > 0$, что при $\omega > \omega^*$ для произвольного $T_0 \in (0,T]$ и любой функции $p$, удовлетворяющей условию

$$\|p\|_{C([0,T],C^{2k+\gamma})} \leqslant c^* + 1, \tag{51}$$

выполняется оценка

$$\|I(p,v)\|_{C([0,T_0],C^{2k+\delta_0})} < \varepsilon. \tag{52}$$

Согласно лемме 1 задача (5), (6) при $\omega > 0$ разрешима на некотором временном участке $[0, T_0]$, и при этом ее решение удовлетворяет условию

$$u \in C([0, T_0], C^{2k+\delta_0}). \tag{53}$$

Зафиксируем произвольное $\omega > \omega^*$. Докажем, что решение $u$ существует на участке $t \in (0, T]$ и соотношение (53) выполняется при $T_0 = T$. Предположим противное. Пусть $T^* \in (0, T]$ — такое число, что полуинтервал $[0, T^*)$ является максимальным полуинтервалом существования решения $u$ задачи (5), (6), для которого имеет место соотношение (53). Тогда для любой последовательности чисел $T_i \to T^*$ справедливо соотношение

$$\lim_{T_i \to T^*} \|u\|_{C([0,T_i], C^{2k+\delta_0})} = \infty. \tag{54}$$

Действительно, иначе в силу оценки (30) $\sup\limits_i \|u(x, T_i)\|_{C^{2k+\delta_1}} < c_0$, где $\delta_1 \in (\delta_0, \gamma)$, $c_0 = \mathrm{const} < \infty$. А тогда согласно лемме 1 соотношение (53) выполняется либо при $T_0 > T^*$ (если $T^* < T$), либо при $T_0 = T$.

Рассмотрим множество функций $\varphi_i(\tau) = \|u\|_{C([0,\tau], C^{2k+\delta_0})}$, $\tau \in [0, T_i]$, где полагаем $\varphi_i(0) = \|u(x, 0)\|_{C^{2k+\delta_0}} = \|\psi\|_{C^{2k+\delta_0}}$. Из соотношения (54) следует существование такого номера $i = i_0$, при котором $\varphi_{i_0}(T_{i_0}) > c^* + \varepsilon$. Поскольку $v(x, 0) = u(x, 0) = \psi$, из оценки (50) получаем соотношение $\varphi_{i_0}(0) \leqslant c^*$. Из двух последних неравенств и непрерывности и монотонности функции $\varphi_{i_0}(\tau)$, $\tau \in [0, T_{i_0}]$, вытекает существование такого числа $T_1 \in [0, T^*)$, для которого имеет место равенство

$$\|u\|_{C([0,T_1], C^{2k+\delta_0})} = c^* + \varepsilon. \tag{55}$$

Отсюда с учетом неравенств (51), (52) и (50) выводим оценку

$$\|u\|_{C([0,T_1], C^{2k+\delta_0})} \leqslant \|v\| + \|u - v\| = \|v\| + \|I(u, v)\| < c^* + \varepsilon,$$

которая противоречит неравенству (55). Итак, доказано, что при $\omega > \omega^*$ соотношение (53) справедливо при $T_0 = T$.

Попутно доказано неравенство $\sup\limits_{\omega > \omega^*} \|u\|_{C([0,T], C^{2m+\delta_0})} < c^* + 1$. Из него согласно (51), (52) вытекает оценка $\|u - v\|_{C([0,T], C^{2m+\delta_0})} = \|I(u, v)\| < \varepsilon$. Теорема 2 доказана.

**7.** Доказательство теоремы 3 проводится в целом по той же схеме, что и доказательство теоремы 2. Различие же в доказательствах связано с тем, что старшие производные решений задач (10), (11) и (12), (13) могут неограниченно расти при $t \to 0$. В пп. 7, 8 мы излагаем основные моменты доказательства теоремы 3.

**Лемма 5.** *Пусть $\delta_0 \in (0, \gamma)$ и $r$ — произвольное положительное число. Тогда существуют такие положительные числа $T_1 = T_1(r)$ и $a_1 = a_1(r)$, что для любого $\tau \in [0, T]$ и любой функции $\psi$, для которой $\|\psi\|_{C^{s-1+\gamma_0}} \leqslant r$, задача Коши для уравнения* (10) *с начальным условием*

$$u(x, \tau) = \psi(x) \tag{56}$$

*при $\omega > 0$ имеет единственное решение $u_\omega$ на участке $t \in [\tau, \tau + T_0] = [\tau, \tau + T_1] \cap [0, T]$, и справедлива оценка*

$$\|u_\omega\|_{C([\tau, \tau+T_0], C^{s-1+\delta_0})} \leqslant a_1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\mathring{v} \in C([\tau, T], C^{s-1+\gamma_0})$ такую, что $\mathring{v}(x, \tau) = \psi(x)$, $\mathring{v} \in C([\tau, T], C^{2k})$ и при $0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_0$ для любых $0 < \tau < t \leqslant T$

выполнена оценка

$$\|D^\alpha \mathring{v}(x,t)\|_{C^{\gamma_1}} \leqslant c_\alpha (t-\tau)^{-\frac{|\alpha|-s+1-\gamma_0+\gamma_1}{2k}} \|\psi\|_{C^{s-1+\gamma_0}}, \quad s \leqslant |\alpha| \leqslant 2k, \ c_\alpha = \mathrm{const}\,. \tag{57}$$

В качестве $\mathring{v}$ можно, например, взять решение задачи Коши

$$\frac{\partial \mathring{v}}{\partial t} = (-1)^{k+1}\Delta^k \mathring{v}, \quad \mathring{v}(x,\tau) = \psi(x).$$

С помощью замены переменных $u = w + \mathring{v}$ перейдем от задачи Коши (10), (56) к следующей задаче:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{s\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} \hat{a}_\alpha(x, \delta^{s-1}w, t, \omega t) D^\alpha w + \hat{f}(x, \delta^{s-1}w, t, \omega t), \tag{58}$$

$$w(x,0) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{59}$$

где $\hat{a}_\alpha(x, \delta^{s-1}w, t, \tau) = a_\alpha(x, \delta^{s-1}(w+\mathring{v}), t, \tau)$,

$$\hat{f}(x, \delta^{s-1}w, t, \tau) = f(x, \delta^{s-1}(w+\mathring{v}), t, \tau) - \sum_{s\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} a_\alpha(x, \delta^{s-1}(w+\mathring{v}), t, \tau) D^\alpha \mathring{v}.$$

Лемму 5, очевидно, достаточно доказать для задачи (58), (59). Эта задача Коши в классе решений из $C([\tau, \tau+T_0], C^{2k+\delta_0})$ эквивалентна интегральному уравнению

$$w = \int_\tau^t d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^m} Z_w(t, \tau_1, x, \xi) \hat{f}(\xi, \delta^{s-1}w, \tau_1, \omega\tau_1)\, d\xi := Q(w), \quad t \in [\tau, T_0+\tau],$$

где $Z_w(t,\tau_1,x,\xi)$ — фундаментальное решение уравнения

$$L_w(u) := \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{s\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} \hat{a}_\alpha(x, \delta^{s-1}w, t, \omega t) D^\alpha u = 0, \quad w \in C([\tau, \tau+T_0], C^{s-1+\gamma_0}). \tag{60}$$

Как и при доказательстве леммы 1, покажем, что существует такое число $T_1 = T_1(r) > 0$, что оператор $Q$ является сжимающим в шаре $S_{T_0} := \{w : \|w\|_{C([\tau,\tau+T_0], C^{s-1+\gamma_0})} \leqslant 1\}$, где $[\tau, \tau+T_0] = [\tau, \tau+T_1] \cap [0,T]$. В силу предположений п. 3 и неравенств (57) для любых $w \in S_{T_0}$, где $0 < T_0 \leqslant T$, имеет место оценка

$$\|\hat{f}(x, (\delta^{s-1}w)(x,t), t, \omega t)\|_{C^{\gamma_1}} \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{2k-s+1-\gamma_0+\gamma_1}{2k}},$$

где $c = c(r) = \mathrm{const}$. Отсюда с помощью неравенств (26), (27) выводим соотношения

$$\big\|Q(w)\big\|_{C([\tau,\tau+T_0], C^{s-1+\gamma_0})} \leqslant c_1 \int_\tau^t (t-\tau_1)^{-\frac{s-1+\delta_0}{2k}} (\tau_1-\tau)^{-\frac{2k-s+1-\gamma_0}{2k}}\, d\tau_1 \leqslant c_2 T_0^{\frac{\gamma_0-\delta_0}{2k}},$$

$c_1, c_2 = \mathrm{const}$. Величину $T_1 = T_1(r)$ будем считать столь малой, что имеет место неравенство

$$c_2 T_0^{\frac{\gamma_0-\delta_0}{2k}} \leqslant 1. \tag{61}$$

Тогда шар $S_{T_0}$ инвариантен относительно оператора $Q$.

Пусть теперь $w_1, w_2 \in S_{T_1}$, $p_i = Q(w_i)$, $i = 1,2$, $p = p_2 - p_1$. Оценим разность $p = Q(w_2) - Q(w_1)$. Для этого воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{s\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} \hat{a}_\alpha(x, \delta^{s-1}w_2, t, \omega t) D^\alpha p$$

$$= \sum_{s\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} [\hat{a}_\alpha(x, \delta^{s-1}w_2, t, \omega t) - \hat{a}_\alpha(x, \delta^{s-1}w_1, t, \omega t)], \quad (62)$$

$$D^\alpha p_1 + \hat{f}(x, \delta^{s-1}w_2, t, \omega t) - \hat{f}(x, \delta^{s-1}w_1, t, \omega t) := R(w_1, w_2), \quad t \in [\tau, \tau + T_0].$$

Оценим функцию $p_1$, которая является решением задачи Коши

$$L_{w_1}(p_1) = \hat{f}(x, \delta^{s-1}w_1, t, \omega t), \quad p_1(x, 0) = 0, \quad (63)$$

где правая часть $\hat{f}$ уравнения при всех $w \in S_{T_0}$, $\omega > 0$ и $\tau < t \leqslant T_0 + \tau$ удовлетворяет оценке

$$\|\hat{f}(x, \delta^{s-1}w, t, \omega t)\|_{C^{\gamma_1}} \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{2k-s+1-\gamma_0+\gamma_1}{2k}}, \quad c = \mathrm{const}\,. \quad (64)$$

Представим, как указано в п. 4, функцию $Z_w$ в виде суммы

$$Z_w(t, \tau, x, \xi) = G_w(t, \tau, x - \xi, \xi) + W_w(t, \tau, x, \xi), \quad (65)$$

где $G_w(t, \tau, x, y)$ — фундаментальное решение главной части уравнения (60) с замороженными коэффициентами $x = y$. Отметим два известных [13] соотношения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} G_w(t, \tau, x - \xi, y)\, d\xi = 1, \quad (66)$$

$$|G_w(t, \tau, x, y_2) - G_w(t, \tau, x, y_1)| \leqslant c_1|y_2 - y_1|^\gamma \exp[c_2\rho(t - \tau, x)], \quad c_1, c_2 = \mathrm{const}\,. \quad (67)$$

Согласно (63), (66) справедливо равенство

$$D^\alpha p_1(x, t) = \int\limits_\tau^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} D^\alpha [G_w(t, \tau, x - \xi, \xi) - G_w(t, \tau, x - \xi, y)]|_{y=x}$$

$$\times \hat{f}[\xi, (\delta^{s-1}w_1)(\xi, \tau), \tau, \omega\tau]\, d\xi + \int\limits_\tau^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} D^\alpha G_w(t, \tau, x - \xi, y)|_{y=x}$$

$$\times \{\hat{f}[\xi, (\delta^{s-1}w_1)(\xi, \tau), \tau, \omega\tau] - \hat{f}[x, (\delta^{s-1}w_1)(x, \tau), \tau, \omega\tau]\}\, d\xi$$

$$+ \int\limits_\tau^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} D^\alpha W_w(t, \tau, x, \xi) \hat{f}[\xi, (\delta^{s-1}w_1)(\xi, \tau), \tau, \omega\tau]\, d\xi, \quad s \leqslant |\alpha| \leqslant 2k,$$

из которого с помощью оценок (67), (64) и (28) выводим соотношения

$$\|(D^\alpha p_1)(t)\|_C \leqslant a_2 \int\limits_\tau^t (t - \tau_1)^{-\frac{|\alpha|-\gamma_1}{2k}} (\tau_1 - \tau)^{-\frac{2k-s+1-\gamma_0+\gamma_1}{2k}}\, d\tau_1$$

$$= c(t-\tau)^{\frac{s-1-|\alpha|+\gamma_0}{2k}} B\left(\frac{s-1+\gamma_0-\gamma_1}{2k}, \frac{2k-|\alpha|+\gamma_1}{2k}\right),$$

где $1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2k$, $c = \mathrm{const}$, $B(p, q)$ — бета-функция. Отсюда вытекает оценка

$$\|R(w_1, w_2)\|_C \leqslant c(t - \tau)^{\frac{s-1+\gamma_0}{2k} - 1} \|w_2 - w_1\|_{C([\tau, \tau+T_0], C^{s-1})}, \quad c = \mathrm{const}\,. \quad (68)$$

Из уравнения (52) следует представление

$$p(x, t) = \int\limits_\tau^t d\tau_1 \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_{w_2}(t, \tau_1, x, \xi) R(w_1, w_2)\, d\xi. \quad (69)$$

Из соотношений (68), (69) и (27) получаем оценку

$$\|p(\cdot,t)\|_{C^{s-1+\delta_0}} \leqslant c_3 T_0^{\frac{\gamma_0-\delta_0}{2k}} \|w_2 - w_1\|_{C([\tau,\tau+T_0],C^{s-1+\delta_0})},$$

где $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T_0$, $c_3 = \mathrm{const}$. Теперь ясно, что если число $T_0 \in [0,T]$ удовлетворяет неравенству (61), а также неравенству $c_3 T_0^{\frac{\gamma_0-\delta_0}{2k}} < 1$, то оператор $Q$ в шаре $S_{T_0}$ является сжимающим. Лемма 5 доказана.

**8.** В силу леммы 5 существует такое число $T_0 > 0$, что задача (10), (11) при $\omega > 0$ разрешима на участке $t \in [0, T_0]$, причем для решения $u$ справедлива оценка $\|u\|_{C([0,T_0],C^{s-1+\delta_0})} \leqslant c_0$, где константа $c_0$ не зависит от $\omega$. Разность $w = u - v$ решений задач (10), (11) и (12), (13) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} L_u(w) := \frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{s\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} a_\alpha(x,\delta^{s-1}u,t,\omega t) D^\alpha w \\ - \sum_{s\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} \sum_{0\leqslant i\leqslant p_1} b_{\alpha_i}(u,x,t,\omega) D^{\beta_i} w - \sum_{0\leqslant i\leqslant p_1} c_i(u,x,t,\omega) D^{\beta_i} w \\ = \sum_{s\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} \{a_\alpha[x,(\delta^{s-1}v)(x,t),t,\omega t] - A_\alpha[x,(\delta^{s-1}v)(x,t),t]\}(D^\alpha v)(x,t) \\ + f[x,(\delta^{s-1}v)(x,t),t,\omega t] - F[x,(\delta^{s-1}v)(x,t),t] := \Phi(x,t,\omega t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0, \end{aligned} \tag{70}$$

$$w(x,0) = 0. \tag{71}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sum_{0\leqslant i\leqslant p_1} b_{\alpha_i} D^{\beta_i} w := [a_\alpha(x,\delta^{s-1}u,t,\omega t) - a_\alpha(x,\delta^{s-1}v,t,\omega t)] D^\alpha v \\ = \sum_{0\leqslant i\leqslant p_1} \left[ D^\alpha v \int_0^1 \frac{\partial a_\alpha(x,\ldots,\theta D^{\beta_i}u + (1-\theta) D^{\beta_i} v,\ldots,t,\omega t)}{\partial e_i}\, d\theta \right] D^{\beta_i} w, \end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned} \sum_{0\leqslant i\leqslant p} c_i D^{\beta_i} w := f(x,\delta^{s-1}u,t,\omega t) - f(x,\delta^{s-1}v,t,\omega t) \\ = \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \left[ \int_0^1 \frac{\partial f(x,\ldots,\theta D^{\beta_i}u + (1-\theta) D^{\beta_i} v,\ldots,t,\omega t)}{\partial e_i}\, d\theta \right] D^{\beta_i} w. \end{aligned} \tag{73}$$

Обозначим для краткости через $w_p(x,t)$, $t \in [0,T_0]$ решение задачи (70), (71), в которой функция $u$ заменена на $p \in C([0,T_0],C^{s-1+\delta_0})$. Так же, как теорема 2 выводится из леммы 2 (см. п. 6), теорема 3 вытекает из следующего утверждения.

**Лемма 6.** *Пусть $0 \leqslant \delta_0 < \gamma_0$ и $k_0 > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\omega_0 = \omega_0(k_0)$, что $\|w_p(x,t)\|_{C([0,T_0],C^{s-1+\delta_0})} < \varepsilon$ для всех $p$, удовлетворяющих неравенству $\|p\|_{C([0,T_0],C^{s-1+\delta_0})} \leqslant k_0$.*

Доказательство. Вначале получим грубую оценку функции $w_p$, предварительно представив ее в виде

$$w_p(x,\tau) = \int_0^\tau d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^m} \mathring{Z}_p(x,\xi,\tau,\tau_1)\psi_p(\xi,\tau_1,\omega\tau_1)\, d\xi, \tag{74}$$

где $\overset{\circ}{Z}_p$ — фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{s\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} a_\alpha(x,\delta^{s-1}p,t,\omega t)D^\alpha w = 0,$$

$$\psi_p(x,t,\omega t) = \sum_{s\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} \{a_\alpha[(x,(\delta^{s-1}p)(x,t),t,\omega t] - a_\alpha[x,(\delta^{s-1}v)(x,t),t,\omega t]\}(D^\alpha v) \\ + f[x,(\delta^{s-1}v)(x,t),t,\omega t] - f[x,(\delta^{s-1}v)(x,t),t,\omega t] + \Phi(x,t,\omega t).$$

Повторяя соответствующие рассуждения предыдущего пункта, устанавливаем оценку задачи (12), (13):

$$\|D^\alpha v\|_C \leqslant c_1 t^{\frac{s-1-|\alpha|+\gamma_0}{2k}}, \quad 1\leqslant|\alpha|\leqslant 2k, \quad c_1 = \mathrm{const}\,.$$

Отсюда следует неравенство

$$\|\Phi_p(x,t,\omega t)\|_C \leqslant c_2 t^{\frac{s-1-2k+\gamma_0}{2k}}, \quad c_2 = \mathrm{const}\,. \tag{75}$$

Из соотношений (74), (75) и (26), (27) выводим оценку

$$\|w_p(x,\tau)\|_{C^{s-1+\delta_0}} \leqslant a\tau^{\frac{\gamma_0-\delta_0}{2k}}, \quad a = \mathrm{const}\,. \tag{76}$$

Подберем теперь значение $\tau\in(0,T_0]$, для которого справедливо неравенство

$$\|w_p(x,t)\|_{C([0,\tau],C^{s-1+\gamma_0})} < \varepsilon. \tag{77}$$

При $t\in[\tau,T_0]$ функцию $w_p(x,t)$ представим в виде

$$w_p(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(x,\xi,t,\tau)w_p(\xi,\tau)\,d\xi + \int\limits_\tau^t d\tau_1 \int\limits_{\mathbb{R}^m} Z_p(x,\xi,t,\tau_1), \tag{78}$$

$$\Phi(\xi,\tau_1,\omega\tau_1)\,d\xi := I_1 + I_2,$$

где $Z_p(x,\xi,t,\tau)$, $t>\tau$, — фундаментальное решение уравнения $L_p(w)=0$. Слагаемое $I_1$ будем рассматривать как решение последнего уравнения с начальным условием $w_p(x,t)|_{t=\tau} = w_p(x,\tau)$. Действуя по аналогии с началом доказательства леммы 5, с помощью соответствующей замены переменных сведем эту задачу к задаче Коши для неоднородного уравнения с нулевым начальным условием. С помощью неравенства типа (57) оценим правую часть уравнения, после чего на основании соотношений (26), (27) придем к оценке

$$\|I_1\|_{C^{s-1+\delta_0}} \leqslant b(t-\tau)^{\frac{\gamma_0-\delta_0}{2k}}\|w_p(x,\tau)\|_{C^{s-1+\gamma_0}} \leqslant ab(T_0\tau)^{\frac{\gamma_0-\delta_0}{2k}}, \quad b = \mathrm{const}\,.$$

Зафиксируем значение $\tau\in(0,T_0]$, при котором наряду с (77) выполняется и неравенство $ab(T_0\tau)^{\frac{\gamma_0-\delta_0}{2k}} < \varepsilon/2$, т. е.

$$\|I_1\|_{C([\tau,T_0],C^{s-1+\delta_0})} < \varepsilon/2. \tag{79}$$

После этого на основании леммы 2 подберем столь большое число $\omega_0>0$, что при $\omega>\omega_0$ справедлива оценка

$$\|I_2\|_{C([\tau,T_0],C^{s-1+\delta_0})} < \varepsilon/2. \tag{80}$$

Лемма 5 следует из соотношений (77)–(80).

Теорема 3 доказана.

**9.** Теорема 1 доказывается по той же схеме, что и теорема 3, но значительно короче и проще.

Прежде всего для решения $v$ усредненной задачи (3), (4) устанавливается оценка

$$\|D^\alpha v(x,t)\|_C \leqslant ct^{\frac{-|\alpha|+\gamma_0}{2k}}, \quad |\alpha| \leqslant 2k, \quad c = \mathrm{const}\,. \tag{81}$$

Затем рассматривается задача Коши для разности $w = u - v$ решений задач (1), (2) и (3), (4):

$$Lw := \frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{|\alpha|\leqslant 2k} a_\alpha(x,t,\omega t) D^\alpha w$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant 2k} [a_\alpha(x,t,\omega t) - A_\alpha(x,t)] D^\alpha v + f(x,t,\omega t) - F(x,t) := \Phi(x,t,\omega t),\ w(x,0) = 0.$$

Ее решение представимо в виде

$$w(x,t) = \int_0^\tau d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^m} Z_p(t,\tau_1,x,\xi)\Phi(\xi,\tau_1,\omega\tau_1)\,d\xi + \int_\tau^t d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^m} \cdots := I_1 + I_2,\ 0 < \tau < t, \tag{82}$$

где $Z(t,\tau,x,\xi)$ — фундаментальное решение уравнения $Lw = 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ с помощью неравенств (26), (27) и (81) определяется такое $\tau > 0$, что при всех $\omega > 0$ справедлива оценка

$$\|I_1\|_{C([0,\tau],C^{\delta_0})} < \varepsilon/2. \tag{83}$$

Зафиксировав $\tau$ и используя схему доказательства леммы 2, найдем такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ имеет место оценка

$$\|I_2\|_{C([\tau,T_0],C^{\delta_0})} < \varepsilon/2. \tag{84}$$

Теорема 1 теперь следует из соотношений (82)–(84).

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Эйдельман С. Д.* О применении принципа усреднения к квазилинейным параболическим системам второго порядка // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 3. С. 302–307.
2. *Эйдельман С. Д., Сирченко З. Ф.* О применимости принципа усреднения к решениям задачи Коши для параболических уравнений из классов неограниченных функций // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. Киев, 1975. С. 189–197.
3. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 1. С. 53–61.
4. *Симоненко И. Б.* Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1989.
5. *Левенштам В. Б.* Метод осреднения и бифуркация ограниченных решений абстрактных параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 5. С. 1058–1063.
6. *Левенштам В. Б.* Метод погранслоя и эффективное построение старших приближений метода осреднения // Изв. вузов. Математика. 1978. № 3. С. 48–55.
7. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8, № 1. С. 3–25.
8. *Жиков В. В.* Принцип усреднения для параболических уравнений с переменной главной частью // Докл. АН СССР. 1973. Т. 208, № 1. С. 32–35.
9. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение параболических операторов с почти периодическими коэффициентами // Мат. сб. 1982. Т. 117, № 1. С. 69–85.
10. *Куньч Р. Н.* Усреднение по времени для нелинейных параболических операторов // Укр. мат. журн. 1989. Т. 41, № 11. С. 1483–1487.

**11.** *Левенштам В. Б.* Экспоненциальная дихотомия и метод усреднения для параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 6. С. 1316–1319.

**12.** *Левенштам В. Б.* Усреднение квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью. Экспоненциальная дихотомия // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, № 4. С. 813–851.

**13.** *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964.

*Статья поступила 20 декабря 1995 г.,*
*окончательный вариант — 7 сентября 1999 г.*

*г. Ростов-на-Дону*
*Ростовский гос. университет, механико-математический факультет*