Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 519.48

РЕКУРСИВНАЯ НЕОТДЕЛИМОСТЬ МНОЖЕСТВА ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННЫХ И МНОЖЕСТВА КОНЕЧНО ОПРОВЕРЖИМЫХ ФОРМУЛ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ МНОГООБРАЗИЙ

В. И. Урсу

Аннотация: Установлено одно соответствие между тернарными кольцами с единицей и 2-ступенно нильпотентными коммутативными лупами некоторого класса коммутативных луп с тремя фиксированными элементами. Указанное соответствие позволяет получить ряд многообразий, у которых рекурсивно неотделимы множества формул, тождественно истинных и конечно опровержимых. К ним относится, например, любое неассоциативное многообразие коммутативных луп Муфанг, любое немедиальное многообразие дистрибутивных квазигрупп и любое немедиальное многообразие CH-квазигрупп. Библиогр. 10.

Под формулой будем понимать всякую закрытую формулу прикладного исчисления предикатов данного класса $\mathscr{K}$ алгебраических систем. Формула $\mathfrak{U}$ называется *тождественно истинной* на классе $\mathscr{K}$, если она принадлежит элементарной теории $\mathscr{K}$, и *конечно опровержимой* на $\mathscr{K}$, если $\neg\mathfrak{U}$ истинно на некоторой конечной алгебраической системе из $\mathscr{K}$. В работе А. И. Мальцева [1] установлено некоторое соответствие между кольцами и группами и на его основе в [2] доказана неразрешимость элементарной теории класса всех конечных групп. Однако в [3] доказывается более сильное утверждение, а именно: множества тождественно истинных и конечно опровержимых формул рекурсивно неотделимы на классе всех групп. Видимо, в связи с этим А. Тарским был поднят вопрос: имеет ли любое многообразие групп, собственно содержащее все абелевы группы, неразрешимую элементарную теорию. Положительный ответ на этот вопрос в случае многообразий, содержащих конечную некоммутативную группу, был получен Ю. Л. Ершовым [4], который высказал гипотезу, что любое некоммутативное многообразие групп имеет неразрешимую элементарную теорию. Гипотеза Ю. Л. Ершова, как известно, была доказана А. П. Замятиным [5]. Цель этой статьи — рассмотреть аналогичные вопросы в классе коммутативных луп Муфанг.

В работе установлено одно соответствие между тернарными кольцами с единицей и 2-ступенно нильпотентными коммутативными лупами, принадлежащими некоторому особенному конечно аксиоматизируемому классу. При этом соответствии классу тернарных колец с единицей простой характеристики p отвечает конечно аксиоматизируемый подкласс класса всех 2-ступенно нильпотентных коммутативных луп, удовлетворяющих тождеству $x^p = 1$. Как и в [1], указан эффективный способ, позволяющий для каждой замкнутой формулы, относящейся к тернарным кольцам с единицей, получить формулу для коммутативных луп такую, что истинность первой формулы на тернарном кольце равносильна истинности второй формулы на соответствующей коммутативной лупе. С помощью установленного соответствия доказана рекурсивная неотделимость множеств формул, тождественно истинных и конечно опровержимых на классе всех 2-ступенно нильпотентных коммутативных луп с тождествами $[xy, z, t] = [x, z, t][y, z, t]$, $x^p = 1$ (p — фиксированное простое число). Далее доказаны заключительные важные предложения о том, что множества формул, тождественно истинных и конечно опровержимых на произвольном неассоциативном (соответственно немедиальном) многообразии коммутативных луп Муфанг (соответственно дистрибутивных квазигрупп или CH-квазигруппы), рекурсивно неотделимы. Тем самым в указанных классах квазигрупп получаем решение общей задачи, родственной упомянутой задаче А. Тарского. Данный результат позволяет получить также ряд многообразий, для которых указанные множества рекурсивно неотделимы. К ним относятся, например, многообразия всех n-ступенно медиально-нильпотентных TS-квазигрупп и всех n-ступенно медиально-нильпотентных квазигрупп Штейнера при $n \geq 2$.

I. Под *тернарным кольцом* будем подразумевать алгебру с тернарной (, ,), бинарной + и унарной − операциями, удовлетворяющую тождествам

$$\begin{gathered} x + (y + z) = (x + y) + z, \quad (-x) + (x + y) = y, \quad x + y = y + x, \\ (x + y, z, t) = (x, z, t) + (y, z, t), \\ (x, y + z, t) = (x, y, t) + (x, z, t), \\ (x, y, z + t) = (x, y, z) + (x, y, t). \end{gathered} \tag{1}$$

Тернарным кольцом с единицей называется алгебра, сигнатура которой состоит из предметного символа e и функциональных тернарного, бинарного, унарного символов, причем на алгебре должны выполняться тождества (1) и тождества

$$(x, e, e) = (e, x, e) = (e, e, x) = x. \tag{2}$$

Пусть T — тернарное кольцо с единицей e, в котором выполняется тождество

$$(x, y, z) = (x, (y, z, e), e). \tag{3}$$

Заменяя тернарную операцию бинарной, определяемой формулой $x \cdot y = (x, y, e)$, обратим T в кольцо с единицей, при этом $(x, y, z) = x \cdot (y \cdot z)$. Обратно, в произвольном тернарном кольце с единицей (характеристики p), заменяя операцию умножения $x \cdot y$ тернарной операцией (x, y, z), определяемой формулой $(x, y, z) = x \cdot (y \cdot z)$, получим тернарное кольцо с единицей (характеристики p), в котором выполняется тождество (3). Поэтому класс $\mathscr{K}$, состоящий из всех тернарных (конечных) колец простой характеристики p с единицей, удовлетворяющих тождеству (3), полиномиально эквивалентен классу (конечных) колец характеристики p с единицей. А. И. Мальцев [3] доказал, что множества формул, тождественно истинных и конечно опровержимых на классе всех колец простой характеристики с единицей, рекурсивно неотделимы. Отсюда следует, что для класса $\mathscr{K}$ и, так как он конечно аксиоматизируем, для любого его надкласса указанные множества рекурсивно неотделимы.

Лупой с единицей 1 называется алгебра L с операциями умножения и правого и левого делений $\cdot, /, \backslash$, в которой для любых элементов x, y из L справедливы соотношения

$$x/x = y \backslash y = 1, \quad x/y \cdot y = y \cdot y \backslash x = (xy)/y = y \backslash (yx) = x.$$

Коммутативные нильпотентные лупы характеризуются выполнением в них определенных тождеств. Так, лупа L коммутативна, если для всех ее элементов

x, y выполняется равенство $xy = yx$. Так как из $x/y = z$ следует $x = zy = yz$, откуда $y \setminus x = z$, то коммутативную лупу L можно рассматривать с двумя операциями: умножением $\cdot$ и делением $/$. Коммутативная лупа L называется n-ступенно нильпотентной, если для всех x, y, z, $x_1, x_2, \dots, x_{2(n-1)}$ из L имеем

$$[\dots[[x, y, z], x_1, x_2], \dots, x_{2(n-1)}] = 1,$$

где $[x, y, z]$ — ассоциатор элементов x, y, z, определяемый следующим образом: $[x, y, z] = (xy \cdot z)/(x \cdot yz)$.

Легко заметить, что всякий элемент x из коммутативной лупы L с единицей 1 имеет обратный элемент, т. е. такой элемент x^{-1}, что $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$. Обратный элемент x^{-1} к элементу x из L совпадает с $1/x$, и если y — элемент из L такой, что y вместе с x порождают ассоциативную подлупу, то $y/x = yx^{-1}$. Также заметим, что если L нильпотентна ступени 2, то для любых элементов x, y, z из L выполняются соотношения

$$[x, y, z] = [x, z, y][y, x, z], \tag{4}$$

$$[x, y, z] = [x, y, z]^{-1}. \tag{5}$$

Действительно, согласно определению ассоциатора имеем

$$\begin{aligned}(x \cdot yz)[x, y, z] = xy \cdot z = yx \cdot z = (y \cdot xz)[y, x, z]\\ = (xz \cdot y)[y, x, z] = (x \cdot yz)[x, z, y][y, x, z],\end{aligned}$$

$$(x \cdot yz)[x, y, z] = xy \cdot z = z \cdot yx = (zy \cdot x)/[z, y, x] = (x \cdot yz)[z, y, x]^{-1},$$

откуда следуют (4) и (5).

2. Пусть T — произвольное тернарное кольцо. В множество $\varphi(T)$ четверок (a, b, c, d) элементов T вводим операции умножения и деления следующими формулами:

$$(a, b, c, d)(x, y, z, t) = (a + x, b + y, c + z, d + t + (x - a, y, c) - (x - a, b, z)), \tag{6}$$

$$(a, b, c, d)/(x, y, z, t) = (a - x, b - y, c - z, d - t + (a - 2x, y, c) - (a - 2x, b, z)). \tag{7}$$

Легко проверяется, что $\varphi(T)$ относительно указанных операций является коммутативной лупой, в которой единица является четверкой $(0, 0, 0, 0)$ и

$$(a, b, c, d)^{-1} = (-a, -b, -c - d).$$

Поскольку в тернарном кольце T истинны тождества

$$(0, y, z) = (x, 0, z) = (x, y, 0) = 0,$$

из формул (6) и (7) следует, что элементы вида $(0, 0, 0, d)$ — центральные элементы в лупе $\varphi(T)$, а из формулы

$$\begin{aligned}&((a, b, c, d)(m, n, p, q) \cdot (x, y, z, t))/((a, b, c, d) \cdot (m, n, p, q)(x, y, z, t))\\ &\quad = (0, 0, 0, (a, n, z) - (a, y, p) + 2(m, b, z) - 2(m, y, c) + (x, b, p) - (x, n, c))\end{aligned} \tag{8}$$

вытекает, что ассоциатор элементов (a, b, c, d), (m, n, p, q), (x, y, z, t) принадлежит центру лупы $\varphi(T)$ и, значит, коммутативная лупа $\varphi(T)$ нильпотентна ступени 2.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

2.1. *Алгебра $\varphi(T)$ является нильпотентной коммутативной лупой ступени* 2.

Далее предполагаем, что все рассматриваемые тернарные кольца T имеют единицу. Через φ будем обозначать отображение, ставящее указанным образом в соответствие каждому тернарному кольцу T построенную коммутативную лупу. Тогда в соответствующей коммутативной лупе $\varphi(T)$ естественно выделяются элементы $e_1 = (e,0,0,0)$, $e_2 = (0,e,0,0)$, $e_3 = (0,0,e,0)$ и $\varphi(T)$ будем рассматривать как лупу с выделенными тремя элементами, т. е. как алгебру сигнатуры $\langle \cdot, /, e_1, e_2, e_3\rangle$. Эту алгебру иногда для краткости будем называть обогащенной лупой. Теперь φ будем рассматривать как отображение, ставящее в соответствие каждому тернарному кольцу T с единицей e обогащенную коммутативную лупу $\varphi(T)$ с выделенными элементами

$$e_1 = (e,0,0,0), \quad e_2 = (0,e,0,0), \quad e_3 = (0,0,e,0).$$

2.2. *Обогащенные коммутативные лупы $L = \varphi(T)$ обладают следующими свойствами*:

1°) *коммутативная лупа L 2-ступенно нильпотентна, иначе говоря, элементы L удовлетворяют тождеству*

$$[x,y,z]u \cdot v = [x,y,z] \cdot uv;$$

2°) *в L выполняется тождество*

$$[x \cdot y, z, t] = [x,z,t][y,z,t]; \tag{9}$$

3°) *в L выполняются квазитождества*

$$\begin{gathered} x^3 = 1 \to [x,y,z] = [y,z,x], \\ e_1x \cdot e_3 = e_1 \cdot xe_3 \ \ \& \ \ e_1e_2 \cdot x = e_1 \cdot e_2x \ \ \& \ \ e_1e_2 \cdot y = e_1 \cdot e_2y \\ \& \ \ ye_2 \cdot e_3 = y \cdot e_2e_3 \ \ \& \ \ ze_2 \cdot e_3 = z \cdot e_2e_3 \\ \& \ \ e_1z \cdot e_3 = e_1 \cdot ze_3 \to [x,y,z] = [y,z,x]; \end{gathered}$$

4°) *совокупности L_1, L_2, L_3 элементов L, ассоциативных соответственно с e_2 и e_3, e_1 и e_3, e_1 и e_2, являются абелевыми группами*

5°) *подлупы $L_2 \cap L_3$, $L_1 \cap L_3$, $L_1 \cap L_2$ ассоциативны внутри L, т. е. любые два элемента, принадлежащие одной из этих луп, ассоциативны с любым элементом из L*;

6°) *пересечение $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ — центр Z коммутативной лупы L*;

7°) *для каждого триплета элементов z_1, z_2, z_3 центра Z лупы L существует элемент x из L, удовлетворяющий соотношениям*

$$[x,e_2,e_3] = z_1, \quad [e_1,x,e_3] = z_2, \quad [e_1,e_2,x] = z_3; \tag{10}$$

8°) *существуют гомоморфизмы λ_1, λ_2, λ_3 из центра Z в $L_2 \cap L_3$, $L_1 \cap L_3$, $L_1 \cap L_2$ соответственно такие, что $\lambda_1(f) = e_1$, $\lambda_2(f) = e_2$, $\lambda_3(f) = e_3$ и*

$$[\lambda_1(z),e_2,e_3] = z, \quad [e_1,\lambda_2(z),e_3] = z, \quad [e_1,e_2,\lambda_3(z)] = z, \tag{11}$$

где $f = [e_1,e_2,e_3]$.

Действительно, непосредственные вычисления показывают, что согласно формуле (8) в L выполняются все тождества из 2°, первое квазитождество из 3° и следующие равенства:

$$\begin{gathered} \{(0,\beta,\gamma,\delta) : \beta,\gamma,\delta \in T\} = \{x \in L : xe_2 \cdot e_3 = x \cdot e_2e_3\} = L_1, \\ \{(\alpha,0,\gamma,\delta) : \alpha,\gamma,\delta \in T\} = \{y \in L : e_1y \cdot e_3 = e_1 \cdot ye_3\} = L_2, \\ \{(\alpha,\beta,0,\delta) : \alpha,\beta,\delta \in T\} = \{z \in L : e_1e_2 \cdot z = e_1 \cdot e_2z\} = L_3. \end{gathered}$$

Согласно этому очевидно, что остальные квазитождества из 3° и условия 4°, 5°, 6° выполняются в L. Если

$$z_1 = (0,0,0,\delta_1), \quad z_2 = (0,0,0,\delta_2), \quad z_3 = (0,0,0,\delta_3),$$

то $x = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, 0)$ — решение системы (10). В качестве искомых гомоморфизмов, удовлетворяющих условию 8°, можно взять такие: $\lambda_1(z) = (\delta,0,0,0)$, $\lambda_2(z) = (0,\delta,0,0)$, $\lambda_3(z) = (0,0,\delta,0)$, где $z = (0,0,0,\delta)$.

Следует заметить, что в классе всех коммутативных 2-ступенно нильпотентных луп тождества (4), (5) вместе с (9) влекут тождества

$$\begin{gathered}
[x,yz,t] = [x,y,t][x,z,t], \quad [x,y,zt] = [x,y,z][x,y,t], \\
[x/y,z,t] = [x,y,t]/[y,z,t] = [x,y,t][y,z,t]^{-1}, \\
[x,y/z,t] = [x,y,t]/[x,z,t] = [x,y,t][x,z,t]^{-1}, \\
[x,y,z/t] = [x,y,z]/[x,y,t] = [x,y,z][x,y,t]^{-1}.
\end{gathered} \tag{12}$$

3. Класс обогащенных коммутативных луп, удовлетворяющих условиям 1°–7°, обозначим через $\mathfrak{L}_7$. Так как эти условия записываются в виде формул узкого исчисления предикатов, $\mathfrak{L}_7$ является конечно аксиоматизируемым классом. Пусть L — $\mathfrak{L}_7$-лупа с операциями умножения $\cdot$, деления $/$ и выделенными элементами e_1, e_2, e_3. Для элементов z_1, z_2, z_3 центра Z коммутативной лупы L вводим новые операции: бинарные $+$, $-$ и тернарную $(\ ,\ ,\ )$, полагая

$$z_1 + z_2 = z_1 z_2, \quad z_1 - z_2 = z_1/z_2, \tag{13}$$

$$(z_1, z_2, z_3) = [x_1, x_2, x_3], \tag{14}$$

где x_1, x_2, x_3 — элементы L, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}
z_1 = [x_1, e_2, e_3], \quad e_1e_2 \cdot x_1 = e_1 \cdot e_2x_1, \quad e_1x_1 \cdot e_3 = e_1 \cdot xe_3, \\
z_2 = [e_1, x_2, e_3], \quad e_1e_2 \cdot x_2 = e_1 \cdot x_2e_2, \quad x_2e_2 \cdot e_3 = x_2 \cdot e_2e_3, \\
z_3 = [e_1, e_2, x_3], \quad x_3e_2 \cdot e_3 = x_3 \cdot e_2e_3, \quad e_1x_3 \cdot e_3 = e_1 \cdot x_3e_3.
\end{gathered} \tag{15}$$

3.1. *Z относительно операций $+$, $-$, $(\ ,\ ,\ )$ является тернарным кольцом с единицей $e = [e_1, e_2, e_3]$.*

Действительно, согласно условию 7° элементы x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие требованиям (15), существуют. Пусть y_1, y_2, y_3 — какое-либо другое решение для (15). С учетом (9) и (12) из равенств

$$[x_1, e_2, e_3] = [y_1, e_2, e_3], \quad [e_1, x_1, e_3] = [e_1, y_1, e_3], \quad [e_1, e_2, x_1] = [e_1, e_2, y_1]$$

следует, что

$$\begin{gathered}
(x_1/y_1)e_2 \cdot e_3 = (x_1/y_1) \cdot e_2e_3, \quad e_1(x_1/y_1) \cdot e_3 = e_1 \cdot (x_1/y_1)e_3, \\
e_1e_2 \cdot (x_1/y_1) = e_1 \cdot e_2(x_1/y_1),
\end{gathered}$$

т. е. элемент x_1/y_1 принадлежит пересечениям луп L_1, L_2, L_3, поэтому в силу 6° $x_1/y_1 \in Z$ или $x_1 \in Zy_1$. Аналогично показывается, что $x_2/y_2 \in Z$, $x_3/y_3 \in Z$ или $x_2 \in Zy_2$, $x_3 \in Zy_3$. Но тогда $[x_1, x_2, x_3] = [y_1, y_2, y_3]$. Таким образом, операция $(\ ,\ ,\ )$ всегда выполнима и однозначна.

Сложение в Z совпадает с умножением, и поэтому Z относительно операций $+$, $-$ является абелевой группой. Прямыми вычислениями легко проверяются и соотношения $(x,e,e)=(e,x,e)=(e,e,x)=x$. Для доказательства соотношений дистрибутивности

$$(u+u',v,w)=(u,v,w)+(u',v,w),$$
$$(u,v+v',w)=(u,v,w)+(u,v',w), \tag{16}$$
$$(u,v,w+w')=(u,v,w)+(u,v,w')$$

положим

$$u=[x,e_2,e_3],\ u'=[x',e_2,e_3] \quad (x,x'\in L_1\cap L_3),$$
$$v=[y,e_1,e_3] \quad (y\in L_1\cap L_2), \quad w=[z,e_1,e_2] \quad (z\in L_2\cap L_3).$$

В силу (9)

$$[xx',e_2,e_3]=[x,e_2,e_3][x',e_2,e_3]=u+u',$$

откуда

$$(u+u',v,w)=[xx',y,z]=[x,y,z][x',y,z]=(u,v,w)+(u',v,w).$$

Аналогично устанавливаются второе и третье соотношения (16).

Отображение, ставящее каждой обогащенной $\mathfrak{L}_7$-лупе L в соответствие определенное указанным выше способом тернарное кольцо T, будем обозначать символом ψ. Из предыдущих результатов следует, что для любого тернарного кольца T с единицей верно соотношение $\psi(\varphi(T))\overset{\sim}{=}T$. Мы покажем, что верно также следующее дополнительное утверждение.

3.2. *Для любой коммутативной лупы с условиями* 1°–8° *имеет место соотношение* $\varphi(\psi(L))\overset{\sim}{=}L$.

Действительно, введем в центре Z лупы L операции $+$ и $(\ ,\ ,\ )$ по формулам (13), (14) и для тернарного кольца Z построим лупу $H=\varphi(Z)$, образованную четверками элементов Z. Нам нужно найти изоморфизм H на L.

По условию существуют гомоморфизмы λ_1, λ_2, λ_3 из центра Z в подлупы $L_2\cap L_3$, $L_1\cap L_3$, $L_1\cap L_2$ лупы L, обладающие свойствами 8°. Каждой четверке $h=(h_1,h_2,h_3,h_4)$ ставим в соответствие элемент $\tau(h)=\lambda_2(h_2)\lambda_3(h_3)\cdot\lambda_1(h_1)$ лупы L.

Отображение τ — гомоморфизм H в L. В самом деле, пусть $h=\big(h_1',h_2',h_3',h_4'\big)$, $k=\big(k_1',k_2',k_3',k_4'\big)$ — произвольные элементы из H, и пусть $\lambda_i\big(h_i'\big)=h_i$, $\lambda_i\big(k_i'\big)=k_i$, где $i=1,2,3$. Учитывая, что согласно (9), (12) и 5°

$$[h_2h_3,h_1,k_2k_3k_1]h_4'k_4'=[h_2,h_1,k_3][h_3,h_1,k_2]h_4'k_4'=t,$$

согласно 5° $[k_2k_3,k_1,h_1]=1$, согласно (9), (12) и 5° $k_2k_3\cdot h_2h_3=h_2k_2\cdot h_3k_3$ и согласно (4), (5), (9), (12), 3° и 4° имеем

$$\begin{aligned}
\tau(h)\cdot\tau(k)&=(h_2h_3\cdot h_1)(k_2k_3\cdot k_1)h_4'k_4'\\
&=(h_2h_3\cdot(h_1\cdot(k_2k_3\cdot k_1)))[h_2h_3,h_1,k_2k_3k_1]h_4'k_4'\\
&=(h_2h_3\cdot(k_2k_3\cdot k_1)h_1)t=(h_2h_3\cdot(k_2k_3\cdot k_1h_1))[k_2k_3,k_1,h_1]t\\
&=(h_2h_3\cdot(k_2k_3\cdot h_1k_1))t=(h_1k_1\cdot k_2k_3)\cdot h_2h_3))t=(h_1k_1\cdot(k_2k_3\cdot h_2h_3))[h_1k_1,k_2k_3,h_2h_3]t\\
&=(h_1k_1\cdot(h_2k_2\cdot h_3k_3))[h_1k_1,k_2k_3,h_2h_3]t=(h_2k_2\cdot h_3k_3)\cdot h_1k_1)[h_1k_1,k_2k_3,h_2h_3]t\\
&=((h_2k_2\cdot h_3k_3)\cdot h_1k_1)[h_1,k_3,h_2][h_2,h_1,k_3][h_1,k_2,h_3][h_3,h_1,k_2]\\
&\quad\cdot[k_1,k_2,h_3][k_1,k_3,h_2]h_4'k_4'\\
&=((h_2k_2\cdot h_3k_3)\cdot h_1k_1)[h_1,h_2,k_3][h_1,h_3,k_2]\cdot[k_1,k_2,h_3][k_1,k_3,h_2]h_4'k_4'\\
&=((h_2k_2\cdot h_3k_3)\cdot h_1k_1)[h_1,h_2,k_3][k_1,h_2,k_3]^{-1}([h_1,k_2,h_3][k_1,k_2,h_3]^{-1})^{-1}h_4'k_4'.
\end{aligned}$$

С учетом (11) и 4° имеем

$$\begin{aligned}
h'_1 &= [h_1, e_2, e_3], \quad e_1e_2 \cdot h_1 = e_1 \cdot e_2h_1, \quad e_1h_1 \cdot e_3 = e_1 \cdot h_1e_3,\\
h'_2 &= [e_1, h_2, e_3], \quad e_1e_2 \cdot h_2 = e_1 \cdot e_2h_2, \quad h_2e_2 \cdot e_3 = h_2 \cdot e_2e_3,\\
h'_3 &= [e_1, e_2, h_3], \quad e_1h_3 \cdot e_3 = e_1 \cdot h_3e_3, \quad h_3e_2 \cdot e_3 = h_3 \cdot e_2e_3,\\
k'_1 &= [k_1, e_2, e_3], \quad e_1e_2 \cdot k_1 = e_1 \cdot e_2k_1, \quad e_1k_1 \cdot e_3 = e_1 \cdot k_1e_3,\\
k'_2 &= [e_1, k_2, e_3], \quad e_1e_2 \cdot k_2 = e_1 \cdot e_2k_2, \quad ke_2 \cdot e_3 = k_2 \cdot e_2e_3,\\
k'_3 &= [e_1, e_2, k_3], \quad e_1k_3 \cdot e_3 = e_1 \cdot k_3e_3, \quad k_3e_2 \cdot e_3 = k_3 \cdot e_2e_3,
\end{aligned}$$

откуда в силу (14) и (15) получаем

$$\begin{gathered}
\left(h'_1, h'_2, k'_3\right) = [h_1, h_2, k_3], \quad \left(k'_1, h'_2, k'_3\right) = [k_1, h_2, k_3],\\
\left(h'_1, k'_2, h'_3\right) = [h_1, k_2, h_3], \quad \left(k'_1, k'_2, h'_3\right) = [k_1, h_2, h_3], \quad \left(k'_1, k'_2, h'_3\right) = [k_1, h_2, k_3].
\end{gathered}$$

Поэтому $\tau(h)\tau(k)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\tau(h)\tau(k) &= ((h_2k_2 \cdot h_3k_3) \cdot h_1k_1)\\
&\qquad \cdot [h_1, h_2, k_3][k_1, h_2, k_3]^{-1}([h_1, k_2, h_3][k_1, k_2, h_3]^{-1})^{-1}h'_4k'_4\\
&= \left(\left(\lambda_2\left(h'_2+k'_2\right)\cdot\lambda_3\left(h'_3+k'_3\right)\right)\cdot\lambda_1\left(h'_1+k'_1\right)\right)\left(\left(h'_1-k'_1, h'_2, k'_3\right)-\left(h'_1-k'_1, k'_2, h'_3\right)+h'_4+k'_4\right),
\end{aligned}$$

но

$$hk = \left(h'_1 + k'_1, h'_2 + k'_2, h'_3 + k'_3, h'_4 + k'_4 + \left(k'_1 - h'_1, k'_2, h'_3\right) - \left(k'_1 - h'_1, h'_2, k'_3\right)\right),$$

откуда $\tau(h)\tau(k) = \tau(hk)$. Теперь если $h/k = t$, то $h = tk$ и $\tau(h) = \tau(h)\tau(k)$, тем самым $\tau(t) = \tau(h)/\tau(k)$ или $\tau(h/k) = \tau(h)/\tau(k)$.

В коммутативной лупе H выделенными элементами являются

$$e^*_1 = (f, 1, 1, 1), \quad e^*_2 = (1, f, 1, 1), \quad e^*_3 = (1, 1, f, 1),$$

где 1 — единица лупы L. Согласно 8°

$$\begin{gathered}
\tau\left(e^*_1\right) = \lambda_2(1)\lambda_3(1) \cdot \lambda_1(f) = \lambda_1(f) = e_1,\\
\tau\left(e^*_2\right)\lambda_2(f)\lambda_3(1) \cdot \lambda_1(1) = \lambda_2(f) = e_2,\\
\tau\left(e^*_3\right) = \lambda_2(1)\lambda_3(f) \cdot \lambda_1(1) = \lambda_3(f) = e_3.
\end{gathered}$$

Таким образом, τ является обогащенным гомоморфизмом из H в L. Найдем ядро τ. Пусть $\tau(h) = e$, где $h = \left(h'_1, h'_2, h'_3, h'_4\right)$. Тогда $\lambda_1\left(h'_1\right) = 1/\left(\lambda_2\left(h'_2\right)\lambda_3\left(h'_3\right)h'_4\right)$ и в силу 8°, (9), (12) и 5°

$$\begin{aligned}
h'_1 &= \left[\lambda_1\left(h'_1\right), e_2, e_3\right] = \left[1/\left(\lambda_2\left(h'_2\right)\lambda_3 h'_4, e_2, e_3\right]\\
&= \left[\lambda_2\left(h'_2\right)\lambda_3\left(h'_3\right)h'_4, e_2, e_3\right]^{-1} = \left[\lambda_2\left(h'_2\right), e_2, e_3\right]^{-1}\left[\lambda_3\left(h'_3\right), e_2, e_3\right]^{-1} = 1.
\end{aligned}$$

Аналогично получим $h'_2 = 1$, $h'_3 = 1$, откуда следует, что и $h'_4 = 1$. Значит, h — единица из H, и ядро τ единичное.

Остается показать, что τ — отображение H на всю лупу L. Пусть $g \in L$. Положим

$$\begin{gathered}
[g, e_2, e_3] = g_1, \quad [e_1, g, e_3] = g_2, \quad [e_1, e_2, g] = g_3,\\
\lambda_1(g_1) = h_1, \quad \lambda_2(g_2) = h_2, \quad \lambda_3(g_3) = h_3, \quad g_4 = (g/((\lambda_2(g_2)\lambda_3(g_3))/\lambda_1(g_1)).
\end{gathered} \tag{17}$$

Если удастся показать, что g_4 лежит в центре L, то тем самым будет доказано, что четверка $[g_1, g_2, g_3, g_4]$ отображением τ переводится в g и, следовательно, τ отображает H на L.

В силу 8° имеем

$$g_1 = [\lambda_1(g_1), e_2, e_3], \quad g_2 = [e_1, \lambda_2(g_2), e_3], \quad g_3 = [e_1, e_2, \lambda_3(g_3)].$$

Пользуясь этими равенствами и равенствами (12) и (17), получим

$$\begin{gathered}[g/\lambda_1(g_1), e_2, e_3] = [g, e_2, e_3]/[\lambda_1(g_1), e_2, e_3] = 1,\\ [e_1, g/\lambda_2(g_2), e_3] = [e_1, g, e_3]/[e_1, \lambda_2(g_2), e_3],\\ [e_1, e_2, g/\lambda_3(g_3)] = [e_1, e_2, g]/[e_1, e_2, \lambda_3(g_3)].\end{gathered}$$

Тогда согласно (9), (12) и 5° имеем

$$\begin{aligned}&[g_4, e_2, e_3] = [(g/(\lambda_2(g_2)\lambda_3(g_3))/\lambda_1(g_1), e_2, e_3] = [g/\lambda_1(g_1), e_2, e_3] = 1,\\ &[e_1, g_4, e_3] = [e_1, (g/(\lambda_2(g_2)\lambda_3(g_3))/\lambda_1(g_1), e_3] = [e_1, g/\lambda_2(g_2), e_3] = 1,\\ &[e_1, e_2, g_4] = [e_1, e_2, (g/(\lambda_2(g_2)\lambda_3(g_3))/\lambda_1(g_3)] = [e_1, e_2, g/\lambda_3(g_3)] = 1,\end{aligned}$$

т. е. $g_4 \in L_1$, $g_4 \in L_2$, $g_4 \in L_3$. Таким образом, $g \in L_1 \cap L_2 \cap L_3$, и поэтому в силу 6° $g_4 \in Z$, что и требовалось доказать.

Итак, ввиду пп. 2.1, 2.2, 3.1, 3.2 доказана

Теорема 1. *Отображение φ является взаимно однозначным отображением класса $\mathfrak{L}$ всех тернарных колец на класс $\mathfrak{L}_8$ всех обогащенных 2-ступенно нильпотентных коммутативных луп, удовлетворяющих требованиям 2°–8°.*

4. Далее укажем несколько более узких классов коммутативных луп, оставляющих в силе теорему 1 и допускающих простую характеристику. Будем говорить, что элемент a лупы L имеет порядок p, если a порождает в L подлупу мощности p. Под p-лупами будем подразумевать лупы, в которых каждый элемент имеет порядок p.

Теорема 2. *Для любого простого числа p отображение φ является взаимно однозначным соответствием между тернарными кольцами характеристики p с единицей и 2-ступенно нильпотентными обогащенными коммутативными p-лупами, удовлетворяющими условиям 2°–7°.*

Доказательство. Пусть T — тернарное кольцо характеристики p с единицей e, $L = \varphi(T)$ — соответствующая коммутативная лупа, $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ — элемент L. Тогда $g^p = (pg_1, pg_2, pg_3, pg_4) = (0, 0, 0, 0) = 1$, т. е. L — p-лупа. Обратное очевидно. Остается показать, что каждая p-лупа L с условиями 1°–7° удовлетворяет условию 8°. Соответствия

$$\begin{gathered}x \to [x, e_2, e_3] \quad (x \in L_2 \cap L_3), \quad y \to [e_1, y, e_3] \quad (y \in L_1 \cap L_3),\\ z \to [e_1, e_2, z] \quad (z \in L_1 \cap L_2)\end{gathered} \tag{18}$$

представляют собой гомоморфизмы соответственно из $L_2 \cap L_3$, $L_1 \cap L_3$, $L_1 \cap L_2$ на центр Z коммутативной лупы L. Но Z — абелева p-группа и поэтому ее можно рассматривать как линейное пространство над простым полем P характеристики p. Выберем в Z базис $\{z_i\}$ над P, и пусть u_i — какой-либо прообраз z_i в $L_2 \cap L_3$ относительно соответствующего отображения из (18). Очевидно, можно предполагать, что $z_0 = e = [e_1, e_2, e_3]$, и пусть $u_0 = e_1$. Если теперь $z = \sum n_i z_i (n_i \in P)$ — какой-либо элемент z, то полагаем по определению $\lambda_i(z) = \sum n_i u_i$. Аналогично строим $\lambda_2(z)$, $\lambda_3(z)$. Так как $z_i = [u_i, e_2, e_3]$, то

$$[\lambda_1(z), e_2, e_3] = [\sum n_i u_i, e_2, e_3] = \sum n_i [u_i, e_2, e_3] = \sum n_i z_i = z$$

и аналогично $[e_1, \lambda_2(z), e_3] = z$, $[e_1, e_2, \lambda_3(z)] = z$, что и требовалось.

Лупа, в которой выполняется тождество (Муфанг) $xy \cdot zx = x(yz)x$, называется *лупой Муфанг* [6]. Нетрудно заметить, что все обогащенные коммутативные $\mathfrak{L}_7$-лупы с тождеством $x^3 = 1$ являются лупами Муфанг. Действительно, согласно определению ассоциатора между элементами любой из $\mathfrak{L}_7$-луп выполняется соотношение

$$xy \cdot zx = x(y \cdot zx)[x, y, zx] = x(yz \cdot x)[y, z, x]^{-1}[x, y, zx]. \tag{19}$$

С учетом (9) и первого квазитождества из 3° имеем

$$[y, z, x]^{-1}[x, y, zx] = [x, y, z]^{-1}[x, y, z][x, y, x] = [x, y, x].$$

Но в силу (5) $[x, y, x] = [x, y, x]^{-1}$, т. е. $[x, y, x]^2 = 1$, а это влечет $[x, y, x] = 1$. Тогда из (19) получаем тождество Муфанг.

Следовательно, вместе с теоремой 2 справедлива также

Теорема 3. *Отображение φ является взаимно однозначным соответствием между тернарными кольцами характеристики 3 с единицей и обогащенными 2-ступенно нильпотентными коммутативными лупами Муфанг с тождеством $x^3 = 1$, обладающими свойствами 4°–7°.*

5. Здесь нам понадобятся некоторые утверждения из [7], для формулировки которых напомним следующие понятия.

Непересекающиеся множества A и B натуральных чисел называется *рекурсивно неотделимыми*, если не существует таких непересекающихся рекурсивных множеств A_1, B_1, что $A_1 \supseteq A$ и $B_1 \supseteq B$.

Множества формул U и V называются *рекурсивно неотделимыми*, если множество $\mathrm{Nom}\, U$ номеров формул из U и множество $\mathrm{Nom}\, V$ номеров формул из V рекурсивно неотделимы.

Пусть каждой формуле $\mathfrak{U}$ сигнатуры σ ставится в соответствие формула $\hat{\psi}(\mathfrak{U})$ сигнатуры σ_1. Положим

$$\psi_1(n) = \begin{cases} \mathrm{Nom}\, \hat{\psi}, & \text{если } n = \mathrm{Nom}\, \mathfrak{U} \text{ для некоторого } \mathfrak{U} \text{ сигнатуры } \sigma; \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Говорят, что соответствие $\hat{\psi}$ *эффективно*, если функция ψ_1 является общерекурсивной.

Пусть K — некоторый класс моделей сигнатуры σ. Через $T(K)$, $F(K)$ обозначим множества всех тождественно истинных и конечно опровержимых формул на K. Как замечено в [7], из рекурсивной неотделимости множества тождественно истинных $F(K)$ и конечно опровержимых $T(K)$ формул сигнатуры σ класса K следует неразрешимость как теории $T(K)$, так и теории $T(K_{\mathrm{fin}})$ класса K_{fin} всех конечных моделей из K.

Сформулируем в виде леммы следующие утверждения из [7].

Лемма 4 [7]. *Пусть класс K моделей сигнатуры σ обладает тем свойством, что множества $T(K)$ тождественно истинных формул и $F(K_{\mathrm{fin}})$ конечно опровержимых формул на K рекурсивно неотделимы. Пусть каждой формуле $\mathfrak{U}$ сигнатуры σ эффективно ставится в соответствие формула $\hat{\psi}(\mathfrak{U})$ сигнатуры σ_1. Если K_1 — класс сигнатуры σ_1 и*

$$\neg\mathfrak{U} \notin T(K) \to \neg\hat{\psi}(\mathfrak{U}) \notin T(K_1), \quad \neg\mathfrak{U} \notin F(K_{\mathrm{fin}}) \to \neg\hat{\psi}(\mathfrak{U}) \notin F(K_{1\,\mathrm{fin}}),$$

то множества $T(K_1)$ и $F(K_{1\,\mathrm{fin}})$ рекурсивно неотделимы.

Лемма 5 [7]**.** *Если множества тождественно истинных и конечно опровержимых формул конечно аксиоматизируемого класса K рекурсивно неотделимы, то эти множества рекурсивно неотделимы и для каждого надкласса K_1 класса K.*

Для каждого простого p через $\mathfrak{N}_2^p$ будем обозначать класс всех 2-ступенно нильпотентных коммутативных луп с тождествами $[xy,z,t] = [x,z,t][y,z,t]$, $x^p = 1$. Методом сведения (см. [7]), который основывается на леммах 4 и 5, докажем следующее утверждение.

Теорема 6. *Множества тождественно истинных формул и конечно опровержимых формул на классе $\mathfrak{N}_2^p$ всех 2-ступенно нильпотентных коммутативных луп с тождествами $[xy,z,t] = [x,z,t][y,z,t]$, $x^p = 1$ (p — фиксированное простое число) рекурсивно неотделимы.*

Доказательство. Пусть T — класс всех тернарных колец характеристики p с одной фиксированной единицей, $\sigma = \langle +, -, (\ ,\ ,)\rangle$ — сигнатура теории K. Каждой формуле $\mathfrak{U} = (Q_1x_1)\dots(Q_mx_m)\mathfrak{U}_0(x_1,\dots,x_m)$, где $Q_i = \forall$ или $\exists$, сигнатуры σ поставим в соответствие формулу $\hat{\psi}(\mathfrak{U})$ сигнатуры $\langle \cdot, /\rangle$, которая утверждает, что существуют такие элементы e_1, e_2, e_3, что если рассмотреть множество Z тех элементов x, которые удовлетворяют условию $\forall u \forall v(xu\cdot v = x\cdot uv)$, и определить на нем операции $+$, $-$ и $(\ ,\ ,)$ соотношениями (13)–(15), то множество Z вместе с новыми операциями образует тернарное кольцо с единицей характеристики p, на котором формула $\mathfrak{U}$ истинна.

Формула $\hat{\psi}(\mathfrak{U})$ строится следующим образом. Пусть $\mathfrak{G}$ — предложение сигнатуры σ, аксиоматизирующее теорию класса T, а $\mathfrak{D}(e_1,e_2,e_3)$ — формула

$$\begin{gathered}(\forall x_1\forall x_2\forall x_3\forall y_1\forall y_2\forall y_3)([x_1,e_2,e_3] = [y_1,e_2,e_3]\ \&\ e_1e_2\cdot x_1 = e_1e_2\cdot x_1\\ \&\ e_1x_1\cdot e_3 = e_1\cdot x_1e_3\ \&\ e_1e_2\cdot y_1 = e_1\cdot e_2y_1\ \&\ e_1y_1\cdot e_3 = e_1\cdot y_1e_3\\ \&\ [e_1,x_2,e_3] = [e_1,y_2,e_3]\ \&\ e_1e_2\cdot x_2 = e_1e_2\cdot x_2 = e_1\cdot e_2x_2\ \&\ x_2e_2\cdot e_3 = x_2\cdot e_2e_3\\ \&\ e_1e_2\cdot y_2 = e_1\cdot e_2y_2\ \&\ y_2e_2\cdot e_3 = y_2\cdot e_2e_3\ \&\ [e_1,e_2,x_3] = [e_1,e_2,y_3]\\ \&\ x_3e_2\cdot e_3 = x_3\cdot e_2e_3\ \&\ e_1x_3\cdot e_3 = e_1\cdot x_3e_3\ \&\ y_3e_2\cdot e_3 = y_3\cdot e_2e_3\\ \&\ e_1y_3\cdot e_3 = e_1\cdot y_3e_3 \Longrightarrow [x_1,x_2,x_3] = [y_1,y_2,y_3]).\end{gathered}$$

Можно считать, что формула $\mathfrak{U}$ (соответственно $\mathfrak{G}_0$) имеет предваренный вид, бескванторная часть $\mathfrak{U}_0$ ($\mathfrak{G}_0$) этой формулы представляется в виде

$$\bigvee_{i=1}^{k} \mathop{\&}_{j=1}^{l_i} \mathfrak{U}_{i,j}^{-},$$

где $\mathfrak{U}_{ij}^{-}$ является либо $\mathfrak{U}_{ij}$, либо $\neg\mathfrak{U}_{ij}$ и каждое $\mathfrak{U}_{ij}$ ($i = 1,\dots,k$, $j = 1,\dots,l_i$) — выражение вида $x+y = z$, $x-y = z$, $(x,y,z) = t$ либо $x = y$, где x, y, z, t — предметные переменные.

Пусть $\mathfrak{U}^r$ и $\mathfrak{G}^r$ — специализации соответственно формул $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{G}$ при помощи предиката $r(x)$. В формулах $\mathfrak{U}^r$ и $\mathfrak{G}^r$ заменим каждое вхождение $r(x)$ вхождением формулы $(\forall u)(\forall v)(x\cdot uv = xu\cdot v)$, каждое вхождение $x+y = z$ вхождением $xy = z$, каждое вхождение $x-y = z$ вхождением $x/y = z$ и каждое вхождение $(x,y,z) = t$ вхождением формулы

$$\begin{gathered}(\exists u)(\exists v)(\exists w)(t = [u,v,w]\ \&\ x = [u,e_2,e_3]\ \&\ e_1e_2\cdot u = e_1\cdot e_2u\ \&\ e_1u\cdot e_3\\ = e_1\cdot ue_3\ \&\ y = [e_1,v,e_3]\ \&\ e_1e_2\cdot v = e_1\cdot e_2v\ \&\ ve_2\cdot e_3 = v\cdot e_2e_3\ \&\ z\\ = [e_1,e_2,w]\ \&\ we_2\cdot e_3 = w\cdot e_2e_3\ \&\ e_1w\cdot e_3 = e_1\cdot we_3).\end{gathered}$$

Полученные формулы обозначим через $\mathfrak{U}_1(e_1, e_2, e_3)$ и $\mathfrak{G}_1(e_1, e_2, e_3)$ соответственно. Через $\hat{\psi}(\mathfrak{U})$ обозначим формулу

$$(\exists e_1)(\exists e_2)(e_3)(\mathfrak{U}_1(e_1, e_2, e_3) \ \& \ \mathfrak{G}_1(e_1, e_2, e_3) \ \& \ \mathfrak{D}(e_1, e_2, e_3)).$$

Проверим выполнимость условий леммы 4. Пусть K — тернарное кольцо характеристики p с фиксированной единицей, на котором предложение $\mathfrak{U}$ истинно. Рассмотрим коммутативную лупу $\varphi(K)$. Из п. 3 следует, что на лупе $\varphi(K)$ истинна формула $\hat{\psi}(\mathfrak{U})$. Если кольцо K конечно, то коммутативная лупа $\varphi(K)$ тоже конечна. Наоборот, если формула $\hat{\psi}(\mathfrak{U})$ истинна на некоторой коммутативной лупе класса $\mathfrak{N}_2^p$, то по определению $\hat{\psi}(\mathfrak{U})$ на центре Z лупы L, как было показано в п. 3, можно определить операции $+$, $-$, $(\ ,\ ,\ )$ так, что множество Z вместе с этими операциями образует тернарное кольцо характеристики p с единицей, на котором предложение $\mathfrak{U}$ истинно. Следовательно, формула $\mathfrak{U}$ истинна на некотором тернарном кольце характеристики p с единицей, которое конечно, если L конечна. Теорема доказана.

Согласно теореме Муфанг [6] каждые два элемента любой лупы Муфанг порождают ассоциативную подлупу, поэтому ввиду замечания из п. 1 в этих лупах выполняется тождественное соотношение $x/y = x \cdot y^{-1}$. Далее будем рассматривать коммутативные лупы Муфанг в сигнатуре $\langle \cdot, {}^{-1} \rangle$.

Лемма 7. *Пусть коммутативные лупы Муфанг L с дополнительными(ой) подстановочными(ой) унарными(ой) операциями(ей) α, β (соответственно γ) являются относительно свободной алгеброй со свободными образующими $x_1, \dots,$ x_n. Если в алгебре L выполняются тождества $(xy)\alpha = (x)\alpha \cdot (y)\alpha$, $(x \cdot (x)\alpha)y \cdot z = (x \cdot (x)\alpha) \cdot yz$, $(xy)\beta = (x)\beta \cdot (y)\beta$, $(x^2 \cdot (x^{-1})\beta)y \cdot z = (x^2 \cdot (x^{-1})\beta \cdot yz$, $((x)\alpha)\beta = ((x)\beta)\alpha$ (соответственно $((x)\gamma)\gamma = x$, $(x \cdot (x)\gamma)y \cdot z = (x \cdot (x)\gamma \cdot yz$, $x \cdot (x)\gamma = (1)\gamma)$, где 1 — единица в L), то множество $M = \{(x \cdot (x)\alpha) \cdot (y^2 \cdot (y^{-1})\beta)z^3 : x, y, z \in L\}$ (соответственно $M = \{((1)\gamma)^k \cdot x^3 : x \in L,\ k = 0, {}^{\pm}1, {}^{\pm}2, \dots\}$) является подалгеброй центра лупы L и $M \cap L' = 1$.*

Доказательство. Согласно лемме 5.7 из [6] отображение $x \to x^3$ является центральным эндоморфизмом лупы L. Отсюда и из условия леммы вытекает, что при любом $x \in L$ элементы x^3, $x \cdot (x)\alpha$, $x^2 \cdot (x^{-1})\beta$ (соответственно $((1)\gamma)^k$) содержатся в центре $Z(L)$ лупы L, значит, $M \subseteq Z(L)$. Теперь легко проверяется, что M является подалгеброй в алгебре L, т. е. замкнута относительно операций $\cdot$, ${}^{-1}$, α и β (соответственно γ).

Пусть $w \in M$. Тогда имеем $w = (u \cdot (u)\alpha) \cdot (v^2 \cdot (v^{-1})\beta)t^3$ (соответственно $w = ((1)\gamma)^k \cdot t^3)$, а $u \cdot (u)\alpha$, $v^2 \cdot (v^{-1})\beta$ и t^3 можно представить в виде

$$u \cdot (u)\alpha = (u_1(x_1) \dots u_n(x_n) \cdot \bar{u}(x_1, \dots, x_n)) \cdot (u_1(x_1) \dots u_n(x_n) \cdot \bar{u}(x_1, \dots, x_n))\alpha,$$
$$v^2(v^{-1})\beta = (v_1(x_1) \dots v_n(x_n) \cdot \bar{v}(x_1, \dots, x_n))^2 \cdot (v_1(x_1) \dots v_n(x_n) \cdot \bar{v}(x_1, \dots, x_n))^{-1}\beta,$$
$$t^3 = (t_1(x_1) \dots t_n(x_n) \cdot \bar{t}(x_1, \dots, x_n))^3,$$

где u_i, v_i, t_i, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{t}$ — термы от соответствующих переменных в алгебре L, причем $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{t}$ принадлежат ассоцианту L' лупы L. Поскольку для любого $x \in L$ элементы $x \cdot (x)\alpha$, $x^2 \cdot (x^{-1})\beta$ содержатся в центре $Z(L)$, ассоциатор любых элементов из множества $\{x, (x)\alpha, (x)\beta\}$ равен единице. Отсюда следует, что в алгебре L истинны тождества

$$xy \cdot (xy)\alpha = x(x)\alpha \cdot y(y)\alpha, \quad (xy)^2 \cdot ((xy)^{-1})\beta = x^2(x^{-1})\beta \cdot y^2(y^{-1})\beta,$$

согласно которым отображения $x \to x(x)\alpha$, $x \to x^2(x^{-1})\beta$ будут центральными эндоморфизмами. В частности, если $x \in L'$, то $x(x)\alpha = 1$, $x^2(x^{-1})\beta = 1$.

Поэтому

$$u \cdot (u)\alpha = (u_1(x_1)\dots u_n(x_n))(u_1(x_1)\dots u_n(x_n))\alpha \cdot (\bar{u}(x_1,\dots,x_n) \cdot \bar{u}(x_1,\dots,x_n)\alpha)$$
$$= u_1(x_1)(u_1(x_1))\alpha \dots u_n(x_n)(u_n(x_n))\alpha,$$

$$v \cdot (v^{-1})\beta = (v_1(x_1)\dots v_n(x_n))^2(v_1(x_1)\dots v_n(x_n))^{-1}\alpha$$
$$\cdot\, \bar{v}(x_1,\dots,x_n)^2(v(x_1\dots x_n)^{-1})\alpha = v_1(x_1)^2(v_1(x_1)^{-1})\alpha \dots v_n(x_n)^2(v_n(x_n)^{-1})\alpha.$$

Далее, так как в силу леммы 5.7 из [6] $\bar{t}^3 = 1$, то

$$t^3 = t_1(x_1)^3 \dots t_n(x_n)^3.$$

Следовательно, терм w можно записать таким образом:

$$w = (u_1(x_1)(u_1(x_1))\alpha \cdot v_1(x_1)^2(v_1(x_1)^{-1})\beta)(t_1(x_1))^3$$
$$\dots (u_n(x_n)(u_n(x_n))\alpha \cdot v_n(x_n)^2(v_n(x_n)^{-1})\beta)(t_n(x_n))^3$$

(соответственно $w = ((1)\gamma)^k \cdot (t_1(x_1))^3 \dots (t_n(x_n))^3$). Предположим, что $w \in L'$; тогда, считая в последнем тождественном соотношении все переменные, кроме x_i, равными единице, получим равенство

$$1 = (u_i(x_i)(u_i(x_i))\alpha \cdot v_i(x_i)^2(v_i(x_i)^{-1})\beta)(t_i(x_i))^3$$

(соответственно равенство $1 = ((1)\gamma)^k \cdot (t_i(x_i))^3$), которое при $x_i = 1$ влечет $1 = ((1)\gamma)^k$. Отсюда $w = 1$, и лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое неассоциативное многообразие коммутативных луп Муфанг и L — $\mathfrak{M}$-свободная лупа. Тогда по лемме 7 (в частности, когда $(x)\alpha = (x)\beta = x^{-1}$) имеем $L^3 \cap L' = 1$. Далее, согласно теореме 10.1 из [6] любая коммутативная лупа Муфанг с n образующими нильпотентна ступени $\leq n-1$. Если предположить, что у L три образующих, то L 2-ступенно нильпотентна. Так как $L^3 \cap L' = 1$, фактор-лупа L/L^3 неассоциативна и, разумеется, лежит в многообразии $\mathfrak{N}_2^3$. Поскольку многообразие луп замкнуто относительно гомоморфных образов, в $\mathfrak{M}$ содержится фактор-лупа L/L^3, а значит, и многообразие, порожденное L/L^3, которое совпадает с $\mathfrak{N}_2^3$. С учетом того, что класс $\mathfrak{N}_2^3$ всех коммутативных луп Муфанг, нильпотентных ступени 2 с тождеством $x^3 = 1$, конечно аксиоматизируем, из теоремы 6 и леммы 5 вытекает следующая

Теорема 8. *Множества тождественно истинных и конечно опровержимых формул на любом неассоциативном многообразии коммутативных луп Муфанг рекурсивно неотделимы.*

Поскольку класс всех абелевых групп и любое локально конечное многообразие этого класса имеет разрешимую элементарную теорию [8], ввиду теоремы 8 получена

Теорема 9. *Многообразие $\mathfrak{M}$ коммутативных луп Муфанг имеет разрешимую элементарную теорию тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ — многообразие абелевых групп.*

В следующем пункте укажем приложения полученных результатов в некоторых классах квазигрупп.

6. *Тотально симметрическая квазигруппа*, или *TS-квазигруппа*, — это квазигруппа $Q(\circ)$, в которой выполняются тождества $x \circ y = y \circ x$, $x \circ (x \circ y) = y$. Идемпотентная TS-квазигруппа называется *квазигруппой Штейнера*, TS-квазигруппа называется *CH-квазигруппой*, если в ней справедливо тождество

$(x \circ x) \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$. Квазигруппа $Q(\circ, /, \backslash)$ дистрибутивна (соответственно медиальна), если в ней выполняются тождества $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$, $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$ (соответственно $(x \circ y)(z \circ t) = (x \circ z) \circ (y \circ t)$).

Квазигруппа Q будет n-ступенно медиально нильпотентной, если для всех x, y, z, t, x_1, $x_2, \dots, x_{2(n-1)}$ из Q имеем

$$[\dots[[x, y, z]_t, x_1, x_2]_t, \dots, x_{2(n-1)}]_t = t,$$

где $[x, y, z]_t$ определяется равенством $(x \circ y) \circ (z \circ t) = (x \circ [x, y, z]_t) \circ (y \circ z)$ и называется *медиатором элементов* x, y, z *относительно элемента* t. Наименьшее такое число n называют *ступенью медиальной нильпотентности.*

Следующие теоремы характеризуют связь между коммутативными лупами Муфанг и соответствующими квазигруппами.

Теорема 10 [9]. *Если $Q(\circ, /, \backslash)$ — дистрибутивная квазигруппа, то $Q(\cdot, {}^{-1})$, где $x \cdot y = x/k \circ k \backslash y$, будет коммутативной лупой Муфанг с единицей k и при разных $k \in Q$ соответствующие коммутативные лупы Муфанг изоморфны между собой, а операция $(\circ)$ восстановится по формуле*

$$x \circ y = x^{-1} y^2 \rho(x \cdot y^{-1}), \quad \text{где } \rho(x \cdot y^{-1}) \in Z(L).$$

Теорема 11 [10]. *Если $Q(\circ)$ — CH-квазигруппа, то $Q(\ , {}^{-1})$, где $x \cdot y = k \circ (x \circ y)$, будет коммутативной лупой Муфанг с единицей k и при разных $k \in Q$ соответствующие коммутативные лупы Муфанг изоморфны между собой, а операция $(\circ)$ восстановится по формуле*

$$x \circ y = (k \circ k)(x \cdot y)^{-1}, \quad \text{где } k \circ k \in Z(L).$$

Через $\mathfrak{D}$ обозначим класс всех медиально 2-ступенно нильпотентных дистрибутивных квазигрупп Штейнера, который определяется тождествами

$$x \circ y = y \circ x, \quad x \circ (x \circ y) = y, \quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z), \quad [[x, y, z]_t, u, v]_t = t. \tag{20}$$

Так как в любой квазигруппе из $\mathfrak{D}$ операция деления совпадает с умножением, а в $\mathfrak{N}_2^3$ имеем $x^{-1} = x^2$, нам будет удобно рассматривать квазигруппы из $\mathfrak{D}$ и лупы из $\mathfrak{N}_2^3$ соответственно в сигнатуре $\langle \circ \rangle$, $\langle \cdot \rangle$. Пусть $Q(\circ)$ — квазигруппа из $\mathfrak{D}$. Согласно теореме 10 или теореме 11 соответствующая коммутативная лупа Муфанг $Q(\cdot)$ с единицей k, где $x \cdot y = k \circ (x \circ y)$, удовлетворяет тождеству $x^3 = k$. Тогда соотношение $x^2 = k \circ x$ влечет $x \circ y = k \circ (x \cdot y) = (x \cdot y)^2$, а отсюда

$$[x, y, z]_k = [((x \circ y) \circ (z \circ k)) \circ (y \circ z)] \circ x = [((xy \cdot z) \circ (yz)^2)^2 \cdot x]^2 = ((xy \cdot z) \cdot (yz)^2) x^2 = [x, y, z].$$

Следовательно, из соотношения $[[x, y, z]_k, u, v]_k = k$, истинного на квазигруппе $Q(\circ)$, получим соотношение $[[x, y, z], u, v] = k$, истинное на коммутативной лупе Муфанг $Q(\cdot)$. Значит, $Q(\cdot) \in \mathfrak{N}_2^3$. Рассмотрим некоторое тождество $u = v$ в сигнатуре $\langle \circ \rangle$, ложное на некоторой квазигруппе из $\mathfrak{D}$. Тогда ей соответствует тождество $\bar{u} = \bar{v}$ сигнатуры $\langle \cdot \rangle$, полученное из $u = v$ заменой каждого вхождения подслова $x \circ y$ вхождением слова $(xy)^2$, где x, y — предметные переменные. Так как класс $\mathfrak{N}_2^3$ является наименьшим неассоциативным многообразием коммутативных луп Муфанг, в $\mathfrak{N}_2^3$ тождество $\bar{u} = \bar{v}$ истинно не на всех лупах из $\mathfrak{N}_2^3$ и равносильно или тривиальному тождеству $x = y$, или тождеству $xy \cdot z = x \cdot yz$. Но последнее тождество равносильно тождеству $[x, y, z]_k = k$, которому соответствует в сигнатуре $\langle \circ, k \rangle$ тождество $[x, y, z]_k = k$, равносильное, очевидно, следующему:

$$[(t \circ k) \circ x) \circ ((t \circ k) \circ y)] \circ [k \circ ((t \circ k) \circ z)] = [((t \circ k) \circ x) \circ k] \circ [((t \circ k) \circ y) \circ ((t \circ k) \circ z)]$$

или
$$[(t\circ k)\circ x,(t\circ k)\circ y,(t\circ k)\circ z]_k=k.$$
Теперь, умножая обе части последнего соотношения на $t\circ k$, получим тождество $[x,y,z]_t=t$. Следовательно, тождество $u=v$ в классе $\mathfrak{D}$ равносильно либо тривиальному тождеству, либо последнему тождеству. Отсюда можно заключить, что $\mathfrak{D}$ содержит два собственных многообразия — тривиальное и медиальное. Иначе говоря, имеет место

Лемма 12. *Класс $\mathfrak{D}$ всех медиально 2-ступенно нильпотентных дистрибутивных квазигрупп Штейнера является наименьшим немедиальным многообразием, заданным конечным набором тождеств.*

Лемма 13. *Любое немедиальное многообразие $\mathfrak{M}$ дистрибутивных квазигрупп (соответственно CH-квазигрупп) содержит класс всех медиально 2-ступенно нильпотентных дистрибутивных квазигрупп Штейнера.*

Доказательство. Пусть $F(\circ,/,\backslash)$ (как было отмечено, в CH-квазигруппе все три операции $\circ,/,\backslash$ совпадают) является $\mathfrak{M}$-свободной квазигруппой с четырьмя свободными образующими k, x_1, x_2, x_3 и $F(\cdot,^{-1})$ — соответствующая ей коммутативная лупа Муфанг из теоремы 10 (соответственно из теоремы 11). Поскольку $F(\circ,/,\backslash)$ — относительно свободная квазигруппа, коммутативная лупа Муфанг $F(\cdot,^{-1})$ вместе с унарными операциями $\alpha: x\to x\circ k$, $\beta: x\to k\circ x$ (соответственно $\gamma: x\to x\circ k$) является относительно свободной алгеброй со свободными образующими x, y, z. Покажем, что алгебра $F(\cdot,^{-1},\alpha,\beta)$ (соответственно $F(\cdot,^{-1},\gamma)$) удовлетворяет всем условиям леммы 7. Согласно [9, с. 142] имеем
$$\rho(x\cdot y^{-1})=(y^{-2}\cdot x)(x\circ y).$$
Отсюда при $y=k$ получаем $\rho(x)=x\cdot(x)\alpha$, а при $x=k$, $y=z^{-1}$ выводим $\rho(z)=z^2\cdot(z^{-1})\beta$. Поскольку $\rho(x)$ содержится в центре лупы $F(\cdot,^{-1})$, то
$$((x(x)\alpha\cdot y)\cdot z=x(x)\alpha\cdot yz,\quad (x^2(x^{-1})\beta\cdot y)\cdot z=x^2(x^{-1})\beta\cdot yz$$
для любых x, y, z из L. Согласно [9, с. 132] в любой дистрибутивной квазигруппе выполняются тождества $x\circ x=x$, $(x/y)\circ z=(x\circ z)/(y\circ z)$, $(x\backslash y)\circ z=(x\circ z)\backslash(y\circ z)$. Тогда, имея в виду теорему 10 (соответственно теорему 11), для всех x, y из F получим
$$\begin{aligned}(x\cdot y)\alpha&=(x\cdot y)\circ k=(x/k\circ k\setminus y)\circ k=((x\circ k)/k)\circ(k\setminus(y\circ k))\\&=(x\circ k)\cdot(y\circ k)=(x)\alpha\cdot(y)\alpha,(x)\alpha\beta=k\circ(x\circ k)=(k\circ k)\circ(x\circ k)\\&\qquad=(k\circ x)\circ(k\circ k)=(k\circ x)\circ k=(x)\beta\alpha\end{aligned}$$
(соответственно $x\cdot(x)\gamma=x\cdot(x\circ k)=x\cdot((k\circ k)x^{-1})=k\circ k=(k)\gamma$, $((x)\gamma)\gamma=(x\circ k)\circ k=x$). Итак, показано, что относительно свободная коммутативная лупа Муфанг $F(\cdot,^{-1})$ с унарными операциями α, β (соответственно γ) и со свободными образующими x_1, x_2, x_3 удовлетворяет всем условиям леммы 7. Тогда в силу леммы 7 подмножество M — подлупа центра лупы $F(\cdot,^{-1})$, замкнутое относительно унарных операций α, β (соответственно γ). С учетом этого факта непосредственными вычислениями легко убедиться в том, что бинарное отношение θ, определяемое на F условием $(x,y)\in\theta\leftrightarrow xy^{-1}\in M$, представляет собой конгруэнцию на алгебре $F(\cdot,^{-1},\alpha,\beta)$ (соответственно $F(\cdot,^{-1},\gamma)$), а значит, и на квазигруппе $F(\circ,/,\backslash)$.

Рассмотрим фактор-квазигруппу $F/\theta(\circ,/,\backslash)$ и фактор-алгебру $F/\theta(\cdot,^{-1},\alpha,\beta)$ (соответственно $F/\theta(\cdot,^{-1},\gamma)$). По лемме 3 $F^3\subseteq M$ и $M\cap F'=1$, значит, коммутативная лупа Муфанг $(F,\cdot,^{-1})$ неассоциативна и имеет экспоненту 3. Следовательно, квазигруппа $F/\theta(\cdot,/,\backslash)$ медиально 2-ступенно нильпотентна. Если

$F/\theta(\circ,/,\backslash)$ является CH-квазигруппой, то $x/\theta\circ x/\theta=(k/\theta\circ k/\theta)\cdot(x/\theta\cdot x/\theta)^{-1}=(k\circ k)/\theta\cdot(x/\theta)$. Но $k\circ k=(k)\alpha\in M$, так что $(k\circ k)/\theta=k/\theta$. Следовательно, в CH-квазигруппе $F/\theta(\circ,/,\backslash)$ выполняется тождество $x/\theta\circ x/\theta=x/\theta$, которое вместе с определением CH-квазигруппы влечет соотношения

$$x/\theta\circ(y/\theta\circ z/\theta)=(x/\theta\circ x/\theta)\circ(y/\theta\circ z/\theta)=(x/\theta\circ y/\theta)\circ(x/\theta\circ z/\theta),$$

значит, CH-квазигруппа $F/\theta(\circ,/,\backslash)$ дистрибутивна. Пусть теперь $F/\theta(\circ,/,\backslash)$ — дистрибутивная квазигруппа. Согласно [9, с. 142] для произвольных элементов $x,y\in F$ имеем $x\circ y=x^{-1}y^2\rho(xy^{-1})$ и, поскольку элемент $\rho(xy^{-1})=xy^{-1}\cdot(xy^{-1})\alpha$ содержится в множестве M, получим

$$x/\theta\circ y/\theta=(x/\theta)^{-1}\cdot(y/\theta)^2=(x/\theta)^{-1}\cdot(y/\theta)^{-1}=(y/\theta)^{-1}\cdot(x/\theta)^{-1}=y/\theta\circ x/\theta,$$

а отсюда вытекает, что

$$x/\theta\circ(x/\theta\circ y/\theta)=(x/\theta)^{-1}\cdot((x/\theta)^{-1}\cdot(y/\theta)^{-1})^{-1}=(x/\theta)^{-1}\cdot(x/\theta\cdot y/\theta)=y/\theta.$$

Следовательно, дистрибутивная квазигруппа $F/\theta(\circ,/,\backslash)$ является квазигруппой Штейнера.

В итоге мы получаем, что квазигруппа $F/\theta(\circ,/,\backslash)$ является медиально 2-ступенно нильпотентной дистрибутивной квазигруппой Штейнера. Поэтому многообразие, порожденное этой квазигруппой, совпадает с $\mathfrak{D}$ и содержится в $\mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Через $\mathfrak{D}_0$ обозначим класс, состоящий только из алгебр, полученных следующим образом: если $Q(\circ)$ — квазигруппа из класса $\mathfrak{D}$, то для любого элемента $k\in Q$ алгебра $Q(\circ,k)$ принадлежит классу $\mathfrak{D}_0$. Итак, сигнатурой класса $\mathfrak{D}_0$ можно считать сигнатуру $\mathfrak{D}$ с добавлением лишь одного предметного символа, допустим k, и в соответствии с п. 2 квазигруппы из $\mathfrak{D}_0$ будем называть иногда обогащенными $\mathfrak{D}$-квазигруппами.

По построению класс обогащенных квазигрупп $\mathfrak{D}_0$ замкнут относительно взятия подквазигрупп, гомоморфных образов и декартовых произведений квазигрупп, т. е. $\mathfrak{D}_0$ является многообразием, которое определяется в сигнатуре $\langle\circ,k\rangle$ тем же набором тождеств (20), которые определяют многообразие $\mathfrak{D}$. Теперь если $Q(\cdot)$ — коммутативная лупа Муфанг из $\mathfrak{N}_2^3$ и k — ее единица, то нетрудно проверить, что группоид $Q(\circ)$, где $x\circ y=(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)$, является квазигруппой, в которой выполняются все тождества из (20), т. е. $Q(\circ)\in\mathfrak{D}$ и $Q(\circ,k)\in\mathfrak{D}_0$. Заметим также, что операция $\cdot$ восстанавливается по формуле $x\cdot y=k\circ(x\circ y)$ (значит, она является термальной операцией в обогащенной $\mathfrak{D}$-квазигруппе $Q(\circ,k)$). Действительно,

$$k\circ(x\circ y)=k(x\circ y)\cdot k(x\circ y)=(x\circ y)\cdot(x\circ y)=(xy\cdot xy)\cdot(xy\cdot xy)=xy\cdot(xy)^3=xy\cdot k=xy.$$

Отсюда заключаем, что класс коммутативных луп Муфанг $\mathfrak{N}_2^3$ и класс обогащенных $\mathfrak{D}$-квазигрупп $\mathfrak{D}_0$ полиномиально эквивалентны. Согласно теореме 6 получаем следующее утверждение.

Лемма 14. *Множества тождественно истинных и конечно опровержимых формул на классе $\mathfrak{D}_0$ обогащенных $\mathfrak{D}$-квазигрупп рекурсивно неотделимы.*

Как было отмечено, класс $\mathfrak{D}_0$ является многообразием и определяется тождествами (20). Обозначим через $\mathfrak{G}$ конъюнкцию всех тождеств из (20). Так как формула $\mathfrak{U}$ сигнатуры $\langle\circ,k\rangle$ класса $\mathfrak{D}_0$ истинна на $\mathfrak{D}_0$ тогда и только тогда, когда на $\mathfrak{D}$ истинна формула $\mathfrak{G}\to(\exists k)\mathfrak{U}$, соответствие

$$\hat\varphi(\mathfrak{U})=\begin{cases}\mathfrak{U}, & \text{если } k \text{ входит в } \mathfrak{U};\\ \mathfrak{G}\to(\exists k)\mathfrak{U} & \text{в других случаях}\end{cases}$$

между теориями $T(\mathfrak{D}_0)$ и $T(\mathfrak{D})$ будет эффективное, при этом все условия из леммы 4 для этих теорий выполнены. Следовательно, из лемм 14, 13 и 5 вытекает

Теорема 15. *Множества тождественно истинных и конечно опровержимых на классе всех медиально 2-ступенно нильпотентных дистрибутивных квазигрупп Штейнера, а также на любом немедиальном многообразии дистрибутивных квазигрупп (CH-квазигрупп) рекурсивно неотделимы.*

Из теоремы 15 следует, что элементарные теории класса всех (конечных) медиально 2-ступенно нильпотентных TS-квазигрупп, класса всех (конечных) медиально 2-ступенно нильпотентных квазигрупп Штейнера и т. п. наследственно неразрешимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Об одном соответствии между кольцами и группами // Мат. сб. 1960. Т. 50, № 3. С. 257–266.
2. *Мальцев А. И.* Неразрешимость элементарной теории конечных групп // Докл. АН СССР. 1962. Т. 138, № 1. С. 771–774.
3. *Мальцев А. И.* Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 4. С. 802–805.
4. *Ершов Ю. Л.* Об элементарных теориях групп // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 6. С. 1240–1243.
5. *Замятин А. П.* Неабелево многообразие групп имеет неразрешимую элементарную теорию // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 1. С. 20–27.
6. *Bruck R. H.* A survey of binary systems. Berlin: Springer Verl., 1958.
7. *Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А.* Элементарные теории // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 4. С. 37–108.
8. *Szmielev W.* Elementary properties of Abelian groups // Fund. Math. 1955. V. 41. P. 203–271.
9. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1972.
10. *Манин Ю. И.* Кубические формы. М.: Наука, 1972.

Статья поступила 20 сентября 1998 г.

г. Кишинев
Институт математики Академии наук Румынии,
Кишиневский технический университет
vursu@pompeiu.imar.ro