Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.9

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С СИЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Ю. М. Лаевский

Аннотация: Изучается структура решений двумерной задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в многоугольнике в случае сильной анизотропии, когда коэффициент перед одной из старших производных является малым параметром. Построены регулярное приближение и приближение, содержащее компоненту типа погранслоя. Для построенных приближений установлены оптимальные оценки погрешности по малому параметру. Показано, что для рассматриваемого класса задач наличие регулярного приближения определяется формой области. Указаны случаи, когда слой является внутренним. Библиогр. 16.

Введение

В работе изучаются решения двумерных сингулярно возмущенных эллиптических задач с сильной анизотропией, когда коэффициенты уравнения значительно различаются по величине. Для модельной двумерной задачи это проявляется в наличии малого параметра только перед одной из старших производных.

Характерной особенностью сингулярно возмущенных задач является возникновение в окрестности границы пограничного слоя. Фундаментальная работа М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [1] положила начало интенсивному изучению асимптотики таких решений для уравнений с малым параметром перед всеми старшими производными. Полученные при этом результаты позволили разработать большое количество эффективных вычислительных алгоритмов, специально приспособленных для решения таких задач и учитывающих структуру пограничного слоя [2, 3]. В то же время публикаций по исследованию погранслойных решений уравнений с сильной анизотропией довольно мало и касаются они моделирования процессов в сильно вытянутых областях (тонких стержнях), преобразующихся в квадрат (см., например, [4]). Однако имеется большое количество работ по вычислительным алгоритмам для данного класса задач. В отличие от подходов к построению алгоритмов для уравнений с малым параметром при всех старших производных большинство из них посвящено созданию надежных универсальных методик, специально не учитывающих структуру решения, но эффективно справляющихся с анизотропией с точки зрения скорости сходимости итерационных процессов (см., например, [5–9]). При этом задачи рассматриваются в прямоугольнике или в областях, составленных из прямоугольников [6]. Но, как показывают исследования, проведенные в данной

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (тема 991116), фонда NWO Российско-Голландского сотрудничества «Efficient and robust numerical methods for differential equations with singularities» и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98–01–00709).

работе, подобно некоторым задачам из [10] форма области самым существенным образом влияет на структуру решения и, более того, отвечает за само наличие в нем погранслойной компоненты. В этом состоит основная специфика задач с сильной анизотропией. Разработка специализированных с учетом этой специфики алгоритмов может, на мой взгляд, существенно повысить их эффективность.

Целью данного исследования является выяснение на модельном уравнении структуры решения при весьма низкой гладкости исходных данных. При этом мы не ставим задачу построения формальных асимптотических решений, например, методом сращиваемых асимптотических разложений [10], для использования которого нужна, в частности, бесконечная дифференцируемость правой части уравнения, а детально анализируем нулевое приближение с получением точных по порядку малого параметра оценок. В этом контексте вполне естественным представляется использование аппарата энергетических неравенств и рядов Фурье.

Я искренне благодарен профессору А. Н. Коновалову, обратившему мое внимание на данный класс задач.

Пусть Ω — открытый ограниченный связный многоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим задачу Дирихле с однородными краевыми условиями:

$$\Delta_\varepsilon u \equiv -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{0.1}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{0.2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр ($\varepsilon \ll 1$). При этом предполагается, что ни область Ω, ни ее граница от ε не зависят. Как хорошо известно [11], если многоугольник Ω не является выпуклым, то рассматриваемая задача имеет, вообще говоря, только обобщенное решение.

Замечание. При некоторых дополнительных условиях все результаты данной работы имеют место для областей с кусочно гладкой границей класса C^2 (см. (2.9) и теорему 2.1).

Пусть

$$x_{\min} = \min_{(x,y)\in\Gamma} x, \quad x_{\max} = \max_{(x,y)\in\Gamma} x.$$

Введем множество $\Sigma_c = \{x = c, -\infty < y < \infty\} \cap \Gamma$. В дальнейшем будут рассматриваться следующие случаи:

(**i**) для любого $c \in [x_{\min}, x_{\max}]$ множество Σ_c состоит не более чем из двух точек;

(**ii**) для любого $c \in [x_{\min}, x_{\max}]$ множество Σ_c состоит из конечного числа точек, и при этом в промежутке $[x_{\min}, x_{\max}]$ найдется c, для которого Σ_c содержит не менее трех точек;

(**iii**) существует $c \in [x_{\min}, x_{\max}]$ такое, что множество Σ_c содержит бесконечное число точек.

Условие (**i**) отличает отсутствие в решении задачи (0.1), (0.2) погранслойной составляющей (при некоторой гладкости функции $f(x,y)$). Для этого случая аналогично [10] легко строится приближение к решению по параметру ε, которое в дальнейшем будем называть *регулярным* (в смысле отсутствия погранслойной компоненты). В этом состоит главное отличие задач с сильной анизотропией от задач с малым параметром при всех старших производных — само наличие регулярного приближения определяется не только правой частью уравнения, но и формой области. В § 1 работы приводится конструкция такого приближения, а в теоремах 1.1 и 1.2 устанавливается его точность. При этом теорема 1.2 содержит оптимальную (неулучшаемую с увеличением гладкости правой части) оценку по параметру ε. Доказательство этих теорем составляет содержание § 2.

В отличие от (**i**) условиям (**ii**) и (**iii**) соответствуют решения, содержащие компоненту типа погранслоя. При этом (**iii**) в определенном смысле является частным случаем условия (**ii**) и отдельно анализироваться не будет. Отметим, что для (**ii**) слой является не пограничным, а внутренним — ситуация, близкая к описанной в [10]. В общих чертах соответствующая конструкция с формулировкой одной из теорем о точности приближения (теорема 1.3) будет приведена в § 1. Более детально структура решения при условии (**ii**) будет проанализирована в § 3–5. В § 3 указывается структура внутреннего слоя, состоящего, по сути дела, из счетного числа экспоненциальных слоев, соответствующих спектру одномерного эллиптического оператора. При этом рассматривается некоторая вспомогательная задача в усеченной области, гомеоморфной прямоугольнику, в котором структура слоя немедленно следует из анализа Фурье. Возможность использования такой вспомогательной задачи обусловлена главным образом оценкой леммы 3.3, доказательство которой дано в § 4. И, наконец, в § 5 для одного частного случая строится односторонний (в смысле замечания 5.1) внутренний слой. В § 6 дается краткий комментарий к использованию неоднородных краевых условий и указывается подход, позволяющий распространить полученные результаты на некоторые уравнения с переменными коэффициентами.

§ 1. Обозначения и основные результаты

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения. Для области D (открытого ограниченного связного множества) $H^l(D)$ — пространство суммируемых в квадрате l-х обобщенных производных, $H^s(D)$ для неотрицательного вещественного s вводится в соответствии с [12] как интерполяционное пространство. При этом $(\cdot\,,\cdot)_{s,D}$ и $\|\cdot\|_{s,D}$ — соответствующие скалярное произведение и норма. В случае $s=0$, когда $H^0(D)=L_2(D)$, первый индекс будем опускать. Далее, $H_0^1(D)$ — замыкание в норме пространства $H^1(D)$ множества бесконечно дифференцируемых функций с компактным в D носителем. Нормой в нем является полунорма $|\cdot|_{1,D}$. Через $H_{00}^{1/2}(a,b)$ будем обозначать множество функций $\varphi\in L_2(a,b)$, для которых определены значения $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ и

$$\|\varphi\|^2_{H_{00}^{1/2}(a,b)}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k^2<\infty,$$

где $\lambda_k=k\pi/(b-a)$ и φ_k — коэффициенты разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе функций $\sin\lambda_k(x-a)$, $k=1,2,\dots$.

С задачей (0.1), (0.2) связаны энергетические скалярное произведение

$$[u,v]_{\varepsilon,D}=\int\limits_D\left(\varepsilon^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

и норма $\|u\|_{\varepsilon,D}=\sqrt{(u,u)_{\varepsilon,D}}$. При этом поиск обобщенного решения задачи (0.1), (0.2) — это задача о представлении линейного ограниченного в $H_0^1(\Omega)$

функционала l_f: требуется найти элемент $u \in H_0^1(\Omega)$ такой, что для любого $v \in H_0^1(\Omega)$

$$[u, v]_{\varepsilon,\Omega} = l_f(v). \tag{1.1}$$

При этом если $f \in L_2(\Omega)$, то $l_f(v) = (f, v)_\Omega$.

Введем обозначения для представления области Ω при условии (**i**). Пусть для определенности $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 1$. Условие (**i**) означает, что в промежутке $[0, 1]$ заданы две непрерывные кусочно линейные функции $\gamma^-(x)$ и $\gamma^+(x)$ такие, что

$$\rho(x) = \gamma^+(x) - \gamma^-(x) > 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1.2}$$

и $\rho(0) = \rho(1) = 0$, а область Ω представима в виде

$$\Omega = \{0 < x < 1,\ \gamma^-(x) < y < \gamma^+(x)\}. \tag{1.3}$$

При этом существует не зависящее от ε число c_γ такое, что

$$\max_{0 \le x \le 1} \left(|\gamma^\pm(x)| + \left| \frac{d\gamma^\pm}{dx}(x) \right| \right) \le c_\gamma. \tag{1.4}$$

Обозначим

$$g(x, y) = \int\limits_{\gamma^-(x)}^{y} f(x, y')dy', \quad h(x, y) = \int\limits_{\gamma^-(x)}^{y} g(x, y')dy'. \tag{1.5}$$

Найдем функцию u_0 такую, что

$$-\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{1.6}$$

$$u_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{1.7}$$

Из (1.5), (1.6) следует представление

$$u_0(x, y) = b(x)(y - \gamma^-(x)) - h(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega}. \tag{1.8}$$

Так как $h(x, \gamma^-(x)) \equiv 0$, то $u_0(x, \gamma^-(x)) \equiv 0$. Функцию $b(x)$ зададим из условия $u_0(x, \gamma^+(x)) \equiv 0$. Тем самым мы полностью удовлетворим требованию (1.7). В дальнейшем будем обозначать

$$S(x) = \{x,\ \gamma^-(x) < y < \gamma^+(x)\}. \tag{1.9}$$

При этом ds-мера на $S(x)$ совпадает с dy-мерой. Тогда в соответствии с (1.5), (1.8)

$$b(x) = \frac{1}{\rho(x)} h(x, \gamma^+(x)) = \frac{1}{\rho(x)} \int\limits_{S(x)} g(x, y)dy, \quad x \in (0, 1). \tag{1.10}$$

Согласно условию (1.2) знаменатель на интервале $(0, 1)$ в нуль не обращается. Кроме того, при условии

$$\sup_{0<x<1} \int\limits_{S(x)} f^2(x, y)dy < \infty \tag{1.11}$$

существуют пределы $\lim\limits_{x \to 0} b(x) = \lim\limits_{x \to 1} b(x) = 0$. Действительно, так как $y - \gamma^-(x) \le \rho(x)$, по неравенству Коши — Буняковского

$$b^2(x) \le \frac{1}{\rho(x)} \int\limits_{S(x)} g^2(x, y)dy \le \rho(x) \int\limits_{S(x)} f^2(x, y)dy.$$

Отметим, что заданная таким образом функция u_0 не зависит от ε.

В рассматриваемом случае функция u_0 является приближением обобщенного решения задачи (0.1), (0.2). Справедлива

Теорема 1.1. *Пусть многоугольник Ω удовлетворяет условию* (**i**), *и пусть $f \in H^1(\Omega)$. Тогда $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ и*

$$|||u - u_0|||_{\varepsilon,\Omega} \le cc_\gamma^2 \varepsilon \|f\|_{1,\Omega}, \tag{1.12}$$

где положительное число c не зависит от параметра ε и функции f.

Доказательство теоремы будет дано в следующем пункте. Там же будет изучена ситуация, когда граница не кусочно линейная, а просто кусочно гладкая, а условия (1.4) не выполняются ($c_\gamma = \infty$). В этом контексте также будут рассмотрены условия на границу в случае $f \in L_\infty(\Omega)$.

При дополнительной гладкости функции f оценка теоремы 1.1 может быть усилена. Однако здесь возникают определенные трудности. Дело в том, что из-за негладкости границы регулярное приближение u_0 вида (1.8) не является элементом пространства $H^2(\Omega)$, и задачу для погрешности $z = u - u_0$ мы можем рассматривать только в обобщенной форме (как задачу о представлении линейного функционала). Рассмотрим ситуацию подробнее. Пусть

$$x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$$

— упорядоченные значения различных x-координат вершин многоугольника Ω, в которых производные по крайней мере одной из функций $\gamma^-(x)$ или $\gamma^+(x)$ имеют разрывы первого рода. Далее, пусть

$$\Omega_n = \{x_{n-1} < x < x_n,\ \gamma^-(x) < y < \gamma^+(x)\}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Как будет установлено в следующем пункте, при дополнительной гладкости функции f выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{1,\Omega_n} \le c_0 \left(\|f\|_{1,\Omega_n} + \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\|_{\Omega_n} \right), \quad n = 1, \dots, N. \tag{1.13}$$

Теорема 1.2. *Пусть многоугольник Ω удовлетворяет условию* (**i**) *и*

$$f \in H^1(\Omega), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in L_2(\Omega_n),\ \ n = 1, \dots, N.$$

Тогда имеют место неравенства (1.13) *и справедлива оценка*

$$|||u - u_0|||_{\varepsilon,\Omega} \le c\varepsilon^{3/2} \sum_{n=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{1,\Omega_n}, \tag{1.14}$$

где положительное число c не зависит от ε и u_0. Данная оценка является оптимальной по параметру ε.

В отличие от теоремы 1.1 данная теорема позволяет говорить о функции u_0 как о приближении в норме пространства $H^1(\Omega)$.

Следствие 1.1. *Имеет место оценка*

$$\|u - u_0\|_{1,\Omega} = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Доказательство этого утверждения немедленно следует из теоремы 1.2 и имеющего место для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ очевидного неравенства

$$|||v|||_{\varepsilon,\Omega} \ge \varepsilon \|v\|_{1,\Omega}.$$

Перейдем к изучению задачи (0.1), (0.2) при условии (**ii**). Данное условие означает наличие входящих углов с лучами, лежащими по одну сторону от прямых, параллельных оси Oy и проходящих через вершины этих углов. Для простоты изучим ситуацию при наличии одного такого угла. При этом область Ω представим в виде объединения трех подобластей

$$\Omega_0 = \{0 < x < 1,\ \gamma_0^-(x) < y < \gamma_0^+(x)\},\ \Omega_1 = \{x_1 < x < 0,\ \gamma_1^-(x) < y < \gamma_1^+(x)\},$$
$$\Omega_2 = \{x_2 < x < 0,\ \gamma_2^-(x) < y < \gamma_2^+(x)\}.$$

Отметим, что

$$\gamma_1^-(0) = \gamma_0^-(0), \quad \gamma_2^+(0) = \gamma_0^+(0), \quad \gamma_1^+(0) = \gamma_2^-(0) = 0. \tag{1.15}$$

В дальнейшем для краткости будем обозначать $\gamma_i^\pm = \gamma_i^\pm(0)$. Регулярное приближение строится аналогично случаю (**i**), но для каждой подобласти отдельно. Здесь в качестве $h(x, y)$ вместо (1.5) удобнее использовать функцию, общую для всех подобластей:

$$h(x,y) = \int_0^y \int_0^{y'} f(x, y'')dy''dy'.$$

Регулярное приближение представим в виде

$$u_{0,i}(x,y) = a_i(x) + b_i(x)y - h(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}_i, \quad i = 0,1,2. \tag{1.16}$$

При этом для каждой функции $u_{0,i}$ выполняется равенство (1.6), а коэффициенты $a_i(x)$ и $b_i(x)$ находятся из условий

$$u_{0,i}\big(x, \gamma_i^\pm(x)\big) \equiv 0, \quad i = 0,1,2. \tag{1.17}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} a_i(x) &= \frac{1}{\rho_i(x)}\big(\gamma_i^+(x)h\big(x,\gamma_i^-(x)\big) - \gamma_i^-(x)h\big(x,\gamma_i^+(x)\big)\big),\\ b_i(x) &= \frac{1}{\rho_i(x)}\big(h\big(x,\gamma_i^+(x)\big) - h\big(x,\gamma_i^-(x)\big)\big), \end{aligned} \tag{1.18}$$

где $\rho_i(x) = \gamma_i^+(x) - \gamma_i^-(x)$. Из (1.15) и очевидного равенства $h(0,0) = 0$ следует, что

$$a_0(0) = \frac{\rho_1(0)\rho_2(0)}{\rho_0(0)}(b_2(0) - b_1(0)), \quad a_i(0) = 0,\ i = 1,2.$$

Тогда $u_{0,i}(0,0) = 0$, $i = 1,2$, но $u_{0,0}(0,0) \neq 0$. Это означает, что функция $u_{0,0}(x,y)$ не удовлетворяет краевому условию в точке $(0,0)$, т. е. условия (1.17) не обеспечивают выполнения краевых условий всюду на $\Gamma \cap \partial\Omega_0$. В то же время функции $u_{0,i}$, $i = 1,2$, в областях своего определения краевым условиям удовлетворяют. Следовательно, если обозначить $S_i = \{x = 0,\ \gamma_i^- < y < \gamma_i^+\}$, то заданная всюду в $\overline{\Omega}$ функция

$$u_0(x,y) = \begin{cases} u_{0,0}(x,y), & (x,y) \in \overline{\Omega}_0 \setminus S_0,\\ u_{0,i}(x,y), & (x,y) \in \overline{\Omega}_i,\ i = 1,2, \end{cases}$$

терпит разрыв при переходе через S_0. Такая функция не может аппроксимировать решение задачи (0.1), (0.2). Для устранения разрыва введем *функцию слоя.*

В дальнейшем функцию $w \in H^1(D)$, ортогональную пространству $H_0^1(D)$ в смысле энергетического скалярного произведения, т. е. такую, что $[w, v]_{\varepsilon,D} = 0$ для любого $v \in H_0^1(D)$, будем называть Δ_ε-*гармонической* в D. Если при этом $w \in H^2(D)$, то эта функция является почти всюду в D решением уравнения $\Delta_\varepsilon w = 0$.

Через $H_0^1\big(0; \gamma_0^-, \gamma_0^+\big)$ обозначим подмножество функций из $H_0^1\big(\gamma_0^-, \gamma_0^+\big)$, равных нулю при $y = 0$. При этом $H_0^1\big(0; \gamma_0^-, \gamma_0^+\big)$ образует замкнутое подпространство пространства $H_0^1\big(\gamma_0^-, \gamma_0^+\big)$. Корректность такой конструкции следует из непрерывности вложения $H_0^1\big(\gamma_0^-, \gamma_0^+\big)$ в $C\big[\gamma_0^-, \gamma_0^+\big]$. Рассмотрим функцию $\varphi \in H_0^1\big(0; \gamma_0^-, \gamma_0^+\big)$, и пусть

$$\varphi_i(y) = \varphi(y) - u_{0,i}(0, y), \quad i = 0, 1, 2. \tag{1.19}$$

В подобластях Ω_i рассмотрим Δ_ε-гармонические функции w_i, равные нулю на $\Gamma_i = \Gamma \cap \partial\Omega_i$, и

$$w_i(0, y) = \varphi_i(y), \quad \gamma_i^- < y < \gamma_i^+. \tag{1.20}$$

Существование таких функций как элементов пространств $H^1(\Omega_i)$ следует из принадлежности функции φ пространству $H_{00}^{1/2}\big(\gamma_0^-, \gamma_0^+\big)$, содержащему в качестве замкнутого подпространства $H_0^1\big(0; \gamma_0^-, \gamma_0^+\big)$. (На самом деле, при таких условиях функции w_i обладают более высокой гладкостью.) Предполагая в дальнейшем

$$u \in H^{3/2+\mu}(\Omega), \quad 0 < \mu \le 1/2, \tag{1.21}$$

по теореме о следах имеем $u(0, \cdot) \in H_0^1\big(0; \gamma_0^-, \gamma_0^+\big)$ [12], т. е. в качестве функции $\varphi(y)$, в частности, может быть взята функция $u(0, y)$ — след решения задачи (0.1), (0.2) на S_0. Отметим, что для рассматриваемых областей Ω условие (1.21) выполняется автоматически, поскольку включает случай входящих углов [11] (за исключением разрезов).

В $\overline{\Omega}$ введем функции

$$w(x, y) = \begin{cases} w_0(x, y), & (x, y) \in \overline{\Omega}_0 \setminus S_0, \\ w_i(x, y), & (x, y) \in \overline{\Omega}_i, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

и $U = u_0 + w$. При этом $U \in H_0^1(\Omega)$.

Теорема 1.3. *Пусть многоугольник Ω удовлетворяет условию* (**ii**) *и*

$$\varphi(y) = u(0, y). \tag{1.22}$$

В каждой из подобластей Ω_i функция f удовлетворяет условиям либо теоремы 1.1, *либо теоремы* 1.2. *В соответствии с этим имеет место одна из оценок*

$$\|u - U\|_{\varepsilon,\Omega} \le c_1\varepsilon \quad \text{или} \quad \|u - U\|_{\varepsilon,\Omega} \le c_2\varepsilon^{3/2},$$

где числа c_1 и c_2 не зависят от ε. При этом вторая из оценок неулучшаема по параметру ε.

Рассмотренная функция слоя w обеспечивает непрерывность приближения U, но ничего не говорит о структуре слоя. В § 3–5 мы подробно остановимся на этом вопросе и соответствующие утверждения сформулируем по ходу изложения.

Наконец, отметим, что условие (**iii**) является, по сути дела, частным случаем условия (**ii**). Условие (**iii**) означает наличие в составе границы Γ участков вида $S = \{x = x_0,\ y^- < y < y^+\}$. При этом $u(x_0, y) = 0$, $y^- < y < y^+$, а в окрестности S имеется погранслой, описываемый функцией $w(x, y)$. При задании функции слоя на участке границы S следует положить $\varphi(y) = 0$.

§ 2. Анализ регулярного приближения

Данный параграф посвящен доказательству теорем 1.1 и 1.2 и некоторым комментариям к ним.

Во-первых, отметим, что условие (1.11) немедленно следует из хорошо известного неравенства [11]

$$\int\limits_{S(x)} f^2(x,y)\,dy \le c\left(\frac{1}{\delta}\|f\|^2_\Omega + \delta|f|^2_{1,\Omega}\right), \tag{2.1}$$

где положительное число c не зависит от f и $\delta > 0$. Теперь покажем, что $u_0 \in H^1_0(\Omega)$. Для этого укажем интегральное представление этой функции. Из (1.8), (1.10), (1.5) нетрудно получить

$$u_0(x,y) = \frac{1}{\rho(x)}\int\limits_{S(x)}\int\limits_{\gamma^-(x)}^{y}\int\limits_{y''}^{y'} f(x,t)\,dtdy''dy', \tag{2.2}$$

откуда

$$u_0^2(x,y) \le \rho(x)(y-\gamma^-(x))^2\int\limits_{S(x)} f^2(x,t)\,dt.$$

Интегрируя это неравенство по Ω и учитывая (1.4), получим

$$\|u_0\|_\Omega \le \frac{4c_\gamma^2}{\sqrt{3}}\|f\|_\Omega. \tag{2.3}$$

Из формул (1.5), (1.8) и (1.10) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\rho(x)}\int\limits_{S(x)}\int\limits_{\gamma^-(x)}^{y}\int\limits_{y''}^{y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{d\gamma^-}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,t)\,dtdy''dy'\\ + \frac{1}{\rho^2(x)}\frac{d\rho}{dx}(x)\int\limits_{S(x)}\int\limits_{\gamma^-(x)}^{y}\int\limits_{y'}^{\gamma^+(x)} f(x,t)\,dtdy''dy',\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\rho(x)}\int\limits_{S(x)}\int\limits_{y}^{y'} f(x,t)\,dtdy'. \tag{2.5}$$

Возводя равенство (2.4) в квадрат, осуществляя очевидные оценки по неравенству Коши — Буняковского с учетом (1.4) и интегрируя результат по Ω, получим

$$\left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|_\Omega \le cc_\gamma^2\|f\|_{1,\Omega}, \tag{2.6}$$

где c — положительное число, не зависящее от функции f.

Замечание 2.1. Оценка (2.6) является следствием оценки

$$\left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|^2_\Omega \le c'\sup_{0<x<1}\left(\left(\rho\frac{d\gamma^-}{dx}\right)^2 + \left(\rho\frac{d\gamma^+}{dx}\right)^2\right)\|f\|^2_{1,\Omega},$$

к которой позже мы еще вернемся.

Аналогично из (2.5) следует неравенство

$$\left\| \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\|_\Omega \le c_\gamma \|f\|_\Omega. \tag{2.7}$$

Неравенства (2.3), (2.6), (2.7) доказывают принадлежность функции u_0 пространству $H_0^1(\Omega)$.

Рассмотрим функцию $z = u - u_0$, где u является решением задачи о представлении линейного функционала (1.1). Тогда $[z, v]_{\varepsilon,\Omega} = (f, v)_\Omega - [u_0, v]_{\varepsilon,\Omega}$ для любого $v \in H_0^1(\Omega)$. Согласно (1.6), (1.7)

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} z \Big|_{\gamma^-(x)}^{\gamma^+(x)} - \int\limits_{S(x)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} z dy \right) dx = (f, z)_\Omega.$$

По доказанному $z \in H_0^1(\Omega)$, и, следовательно, функция z является решением следующей задачи о представлении линейного функционала: для любого $v \in H_0^1(\Omega)$ имеет место равенство

$$[z, v]_{\varepsilon,\Omega} = -\varepsilon^2 \int\limits_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,dxdy. \tag{2.8}$$

Полагая в (2.8) $v = z$ и используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\|z\|_{\varepsilon,\Omega} \le \varepsilon \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_\Omega.$$

Неравенство (1.12) следует из оценки (2.6). Теорема 1.1 доказана.

В случае, если граница не кусочно линейная, а просто кусочно гладкая, условие (**i**) допускает обращения производных функций $\gamma^\pm(x)$ в бесконечность. В этом случае в соответствии с замечанием 2.1 вместо (1.4) следует потребовать

$$\max_{0\le x\le 1} \left(|\gamma^\pm(x)| + \left| \rho(x)\frac{d\gamma^\pm}{dx}(x) \right| \right) \le c_\gamma. \tag{2.9}$$

Поясним ситуацию на примере. Пусть в окрестности $x = 0$ граница имеет вид $\gamma^-(x) = 0$, $\gamma^+(x) = x^\mu$ и $\rho(x) = x^\mu$. Тогда

$$\rho(x)\frac{d\gamma^+}{dx}(x) = \mu x^{2\mu-1}$$

и (2.9) имеет место при $\mu \ge 1/2$. Отметим, что при $\mu < 1$ (1.4) не выполняется ($c_\gamma = \infty$). Еще больше можно ослабить условие на гладкую границу, потребовав ограниченности функции $f(x, y)$. Возвращаясь к представлению производной (2.4), нетрудно убедиться в справедливости оценки

$$\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_\Omega^2 \le c^2 \left\{ \int\limits_0^1 \rho^3 \left[\left(\frac{d\gamma^-}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\gamma^+}{dx} \right)^2 \right] dx \; \|f\|_{L_\infty(\Omega)}^2 + c_\gamma^4 \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_\Omega^2 \right\}.$$

Для рассмотренного выше примера ограниченность правой части последнего неравенства означает интегрируемость на $(0, 1)$ функции $x^{5\mu-2}$, т. е. $\mu > 1/5$. Таким образом, имеет место следующий аналог теоремы 1.1.

Теорема 2.1. *Пусть* $f \in L_\infty(\Omega)$, $\frac{\partial f}{\partial x} \in L_2(\Omega)$ *и*

$$\max_{0 \le x \le 1} (\gamma^\pm(x))^4 + \int\limits_0^1 \rho^3 \left(\frac{d\gamma^\pm}{dx}\right)^2 dx \le c_\gamma^4.$$

Тогда $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *и*

$$|\!|\!| u - u_0 |\!|\!|_{\varepsilon,\Omega} \le c c_\gamma^2 \varepsilon \left(\|f\|_{L_\infty(\Omega)} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_\Omega \right).$$

Перейдем к доказательству теоремы 1.2. Сначала установим справедливость неравенств (1.13). В подобласти Ω_n (см. § 1) представления (2.4), (2.5) продифференцируем по x и результат оценим аналогично (2.6). В результате получим неравенства

$$\left\| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right\|_{\Omega_n} \le c_1 c_\gamma^3 \left(\|f\|_{1,\Omega_n} + \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\|_{\Omega_n} \right), \quad \left\| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right\|_{\Omega_n} \le c_2 c_\gamma \|f\|_{1,\Omega_n}. \tag{2.10}$$

Из неравенств (2.10) следует требуемая оценка (1.13). Отметим, что согласно (1.6), (2.10) $u_0 \in H^2(\Omega_n)$, $n = 1, \dots, N$ (но $u_0 \notin H^2(\Omega)$).

Теперь перейдем к доказательству неравенства (1.14). Перепишем равенство (2.8) при $v = z$ в виде

$$|\!|\!| z |\!|\!|_{\varepsilon,\Omega}^2 = -\varepsilon^2 \sum_{n=1}^N \int\limits_{\Omega_n} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x}\, dxdy.$$

Интегрирование каждого слагаемого по частям приводит к равенству

$$|\!|\!| z |\!|\!|_{\varepsilon,\Omega}^2 = \varepsilon^2 \sum_{n=1}^N \int\limits_{\Omega_n} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} z\, dxdy - \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{N-1} \int\limits_{S(x_n)} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \right]_{x_n} z\, dy, \tag{2.11}$$

где $[v]_x(y) = v(x+0, y) - v(x-0, y)$. Используя стандартную технику, нетрудно получить

$$2 |\!|\!| z |\!|\!|_{\varepsilon,\Omega}^2 \le c_1 \|z\|_\Omega^2 + c_2 \sum_{n=1}^{N-1} \int\limits_{S(x_n)} z^2 dy + \varepsilon^4 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{c'}{c_2} \right) \sum_{n=1}^N \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{1,\Omega_n}^2. \tag{2.12}$$

Отметим, что для любого $v \in H_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|v\|_\Omega \le \frac{c_\gamma}{\sqrt{2}} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_\Omega, \tag{2.13}$$

справедливость которого немедленно следует из тождества $v(x, \gamma^-(x)) \equiv 0$ и вытекающего из него представления

$$v(x, y) = \int\limits_{\gamma^-(x)}^y \frac{\partial v}{\partial y}(x, y')\, dy'.$$

Применение оценки (2.1) ко второму слагаемому неравенства (2.12), а затем использование неравенства (2.13) дают

$$2\|z\|^2_{\varepsilon,\Omega} \le cc_2\delta \left\| \frac{\partial z}{\partial x} \right\|^2_\Omega + \left(\frac{c_\gamma^2}{2}\left(c_1 + \frac{cc_2}{\delta}\right) + cc_2\delta \right) \left\| \frac{\partial z}{\partial y} \right\|^2_\Omega + \varepsilon^4 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{c'}{c_2} \right) \sum_{n=1}^N \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|^2_{1,\Omega_n}.$$

Положим

$$cc_2\delta = \varepsilon^2, \quad \frac{c_\gamma^2}{2}\left(c_1 + \frac{cc_2}{\delta}\right) + cc_2\delta = 1. \tag{2.14}$$

Тогда последнее неравенство переходит в оценку

$$\|z\|^2_{\varepsilon,\Omega} \le \varepsilon^4 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{c'}{c_2} \right) \sum_{n=1}^N \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|^2_{1,\Omega_n}.$$

Несложный анализ условий (2.14) показывает, что оптимальным (в смысле минимизации коэффициента в последней оценке) является следующий выбор констант: $c_1 = O(1)$, $c_2 = O(\varepsilon)$ и $\delta = O(\varepsilon)$. Этот выбор завершает доказательство неравенства (1.14).

Теперь установим оптимальность оценки (1.14). Для этой цели рассмотрим пример: $\gamma^-(x) \equiv 0$ и $f(x,y) \equiv 1$. Тогда в соответствии с формулами (1.8), (1.10) регулярным приближением является $u_0(x,y) = (\gamma^+(x) - y)y/2$. Поскольку $\gamma^+(x)$ — кусочно линейная функция с разрывами первых производных в точках $x_1, \dots, x_{N-1}$, в подобластях Ω_n, $n = 1, \dots, N$ (см. § 1) имеет место тождество $\partial^2 u_0/\partial x^2(x,y) \equiv 0$. Тогда после интегрирования по частям в правой части равенства (2.8) получим, что для любой функции $v \in H_0^1(\Omega)$, сужения которой на подмножества Ω_n принадлежат пространствам $H_0^1(\Omega_n)$, выполняется равенство

$$[z, v]_{\varepsilon,\Omega} = 0, \tag{2.15}$$

т. е. функция z является Δ_ε-гармонической в подобластях Ω_n. Далее, так как $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, в (2.8) можно положить $v = u_0$. Тогда

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|^2_\Omega = -[z, u_0]_{\varepsilon,\Omega}. \tag{2.16}$$

Пусть $\delta > 0$ — некоторое число такое, что

$$\delta \le \frac{1}{2} \min_{n=1,\dots,N} (x_n - x_{n-1}).$$

В окрестности каждого значения x_n, $n = 1, \dots, N-1$, введем разбиение единицы по формулам

$$\lambda_\delta(x) = \begin{cases} (x_n - x)/\delta & \text{при} \quad x_n - \delta \le x < x_n,\ n = 1, \dots, N-1, \\ (x - x_n)/\delta & \text{при} \quad x_n \le x < x_n + \delta,\ n = 1, \dots, n-1, \\ \quad 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и $\mu_\delta(x) = 1 - \lambda_\delta(x)$. Пусть

$$\Omega_\delta = \bigcup_{n=1}^{N-1} \{x_n - \delta < x < x_n + \delta,\ 0 < y < \gamma^+(x)\}.$$

Так как $\lambda_\delta u_0 \in H_0^1(\Omega_n)$, а $\mu_\delta(x) \equiv 0$ в $\Omega \setminus \Omega_\delta$, в соответствии с (2.15) имеет место равенство

$$[z, u_0]_{\varepsilon,\Omega} = [z, \mu_\delta u_0]_{\varepsilon,\Omega_\delta}. \tag{2.17}$$

При этом

$$[z, \mu_\delta u_0]_{\varepsilon,\Omega_\delta} = \int\limits_{\Omega_\delta} \mu_\delta \left(\varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) dxdy + \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega_\delta} \frac{d\mu_\delta}{dx} \frac{\partial z}{\partial x} u_0 \, dxdy. \tag{2.18}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства оценим при помощи неравенства Шварца и хорошо известной оценки (см., например, [13]), имеющей в рассматриваемом случае вид

$$\|v\|_{\Omega_\delta} \le c_0 \sqrt{\delta} \sum_{n=1}^{N} \|v\|_{1,\Omega_n},$$

где c_0 не зависит от δ. Так как $\mu_\delta(x) \le 1$, имеем

$$\left| \int\limits_{\Omega_\delta} \mu_\delta \left(\varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) dxdy \right| \le c_0 \sqrt{\delta} \|z\|_{\varepsilon,\Omega} \sum_{n=1}^{N} \|u_0\|_{2,\Omega_n}.$$

Далее, учитывая, что $|d\mu_\delta/dx| \le 1/\delta$, аналогично предыдущему получим

$$\varepsilon^2 \left| \int\limits_{\Omega_\delta} \frac{d\mu_\delta}{dx} \frac{\partial z}{\partial x} u_0 \, dxdy \right| \le \frac{\varepsilon}{\delta} \|z\|_{\varepsilon,\Omega} \|u_0\|_{\Omega_\delta} \le c_0 \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}} \|z\|_{\varepsilon,\Omega} \|u_0\|_{1,\Omega}.$$

В соответствии с (2.17), (2.18) два последних неравенства приводят к оценке

$$|[z, u_0]_{\varepsilon,\Omega}| \le c_0 \left(\sqrt{\delta} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}} \right) \|z\|_{\varepsilon,\Omega} \sum_{n=1}^{N} \|u_0\|_{2,\Omega_n}.$$

Наименьшее значение коэффициента в правой части этого неравенства достигается при $\delta = \varepsilon$, и согласно (2.16) имеет место неравенство

$$\varepsilon^{3/2} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{\Omega}^2 \le 2c_0 \|z\|_{\varepsilon,\Omega} \sum_{n=1}^{N} \|u_0\|_{2,\Omega_n}.$$

Из этого неравенства следует существование не зависящего от ε числа $c' > 0$ такого, что $\|z\|_{\varepsilon,\Omega} \ge c' \varepsilon^{3/2}$. Это показывает достижимость оценки (1.14). Теорема полностью доказана.

В случае гладких функций $\gamma^{\pm}(x)$ точность регулярного приближения повышается. А именно, справедлива

Теорема 2.2. *Пусть*

$$\gamma^{\pm} \in C^2[0,1], \quad f \in H^1(\Omega), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in L_2(\Omega).$$

Тогда $u_0 \in H^2(\Omega)$ *и имеет место неулучшаемая по* ε *оценка*

$$\|u - u_0\|_{\varepsilon,\Omega} \le c\varepsilon^2 \|u_0\|_{2,\Omega}.$$

Указанную гладкость функции u_0 легко получить из представлений (2.4), (2.5) и условий теоремы. При этом в правой части равенства (2.11) исчезает последнее слагаемое и из неравенств Коши — Буняковского и (2.13) немедленно следует требуемая оценка. Ее оптимальность сразу вытекает из применения неравенства Шварца к правой части равенства (2.16), которое не использует специфики примера из доказательства теоремы 1.2:

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{\Omega}^2 \leq \|z\|_{\varepsilon,\Omega} \, \|u_0\|_{\varepsilon,\Omega} \leq \|z\|_{\varepsilon,\Omega} \, |u_0|_{1,\Omega}, \tag{2.19}$$

т. е. существует не зависящее от ε число $c' > 0$ такое, что $\|z\|_{\varepsilon,\Omega} \geq c'\varepsilon^2$.

Замечание 2.2. Неравенство (2.19) имеет место для всего класса правых частей, для которых $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ (см. теорему 1.1), а не только для гладких функций $\gamma^{\pm}$. Это означает, что если приближение u_0 не равно тождественно нулю, то его расстояние до решения задачи в энергетической норме не меньше величины $O(\varepsilon^2)$. Случай $u_0 \equiv 0$ интереса не представляет, поскольку тогда погрешность, а следовательно, и решение тождественно равны нулю.

§ 3. Решения с внутренними слоями

Анализ решений с внутренними слоями начнем с доказательства теоремы 1.3. Пусть $z = u - U$. При этом $z \in H_0^1(\Omega)$. Тогда из (1.1) следует, что

$$\|z\|_{\varepsilon,\Omega}^2 = -\sum_{i=0}^{2} \left(\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega_i} \frac{\partial u_{0,i}}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \, dxdy + [w_i, z]_{\varepsilon,\Omega_i} \right).$$

Пусть z_i — сужения функции z на подобласти Ω_i. В соответствии с равенствами (1.19) и (1.20) условие (1.22) теоремы означает, что $z_i(0, y) = 0$, т. е. $z_i \in H_0^1(\Omega_i)$. В силу Δ_ε-гармоничности функции w_i ортогональны пространствам $H_0^1(\Omega_i)$ и, следовательно, $[w_i, z_i]_{\varepsilon,\Omega_i} = 0$. Тогда

$$\|z\|_{\varepsilon,\Omega}^2 = -\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{2} \int\limits_{\Omega_i} \frac{\partial u_{0,i}}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \, dxdy.$$

Тем самым получен аналог равенства (2.8), и дальнейшие рассуждения полностью совпадают с соответствующими рассуждениями из доказательств теорем 1.1 и 1.2. Единственное отличие состоит в их проведении для трех подобластей Ω_i вместо области Ω.

Как уже отмечалось в § 1, функция слоя w ничего не говорит о структуре слоя. Для прояснения этого вопроса построим некоторую другую функцию w_α, близкую к w, обеспечивающую непрерывность нового приближения $U_\alpha = u_0 + w_\alpha$ и, что самое главное, имеющую явный вид, полностью описывающий структуру слоя. Отметим, что составляющие ее функции $w_{\alpha,i}$ уже не будут Δ_ε-гармоническими в Ω_i. Построение такой функции осуществим в два этапа. На первом этапе функции w_i заменим некоторыми функциями $\widetilde{w}_{\alpha,i}$, являющимися Δ_ε-гармоническими в подобластях $D_{\alpha,i} \subset \Omega_i$ и продолженными нулем на Ω_i. На втором этапе будут указаны гомеоморфизмы подобластей $D_{\alpha,i}$ на прямоугольники Π_i, в которых методом Фурье в преобразованных переменных $\hat{x}$, $\hat{y}$ будут выписаны $\widehat{\Delta}_\varepsilon$-гармонические функции $\widehat{w}_i(\hat{x}, \hat{y})$. Завершением второго этапа будет построение функций $w_{\alpha,i}$ как результат обратного преобразования Π_i в $D_{\alpha,i}$. При этом оба этапа будут сопровождаться оценками норм $\|w_i - \widetilde{w}_{\alpha,i}\|_{\varepsilon,\Omega_i}$

и $\|\widetilde{w}_{\alpha,i} - w_{\alpha,i}\|_{\varepsilon,\Omega_i}$ соответственно. Отметим, что целью первого этапа является создание предпосылок для получения удовлетворительной оценки на втором этапе. Приступим к реализации этого плана.

Все намеченные построения проведем для подобласти Ω_0. Зафиксируем число $\alpha \in (\varepsilon, 1-\varepsilon)$, и пусть

$$D(\alpha) = \bigl\{0 < x < \alpha,\ \gamma_0^-(x) < y < \gamma_0^+(x)\bigr\},\ S_0(\alpha) = \bigl\{x = \alpha,\ \gamma_0^-(\alpha) < y < \gamma_0^+(\alpha)\bigr\}.$$

В Ω_0 рассмотрим Δ_ε-гармоническую в $D(\alpha)$ функцию $\widetilde{w}_{\alpha,0}$, равную нулю на $\Gamma \cap \partial D(\alpha)$, $\widetilde{w}_{\alpha,0} = \varphi_0$ на S_0 и $\widetilde{w}_{\alpha,0} \equiv 0$ в $G(\alpha) = \Omega_0 \setminus D(\alpha)$. Отметим, что $\widetilde{w}_{\alpha,0} \in H^1(\Omega_0)$.

Займемся оценкой энергетической нормы функции $\widetilde{\psi}_\alpha = w_0 - \widetilde{w}_{\alpha,0}$. Получение этой оценки основано на неравенствах, которые будут сформулированы в виде лемм 3.1–3.3.

Лемма 3.1. *Пусть множество $S = \{x = x_0,\ y_1 < y < y_2\}$ является частью границы не зависящей от ε области Q. Далее, пусть v — Δ_ε-гармоническая в Q функция, равная нулю на $\partial Q \setminus S$ и $v(x_0,\cdot) \in H_{00}^{1/2}(S)$. Тогда найдутся не зависящие от ε положительные числа c_1 и c_2 такие, что имеют место неравенства*

$$c_1\sqrt{\varepsilon}\|v\|_{H_{00}^{1/2}(S)} \le \|v\|_{\varepsilon,Q} \le c_2\sqrt{\varepsilon}\|v\|_{H_{00}^{1/2}(S)}.$$

Доказательство. Рассмотрим полосу

$$\Pi_\varepsilon = \{x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,\ -\infty < y < \infty\},$$

и пусть $Q_\varepsilon = Q \cap \Pi_\varepsilon$. При отображении

$$\hat{x} = \frac{x - x_0}{\varepsilon}, \quad \hat{y} = y,$$

область Q_ε переходит в $\widehat{Q}$, размеры которой не зависят от ε, S переходит в $\widehat{S} = \{x = 0,\ y^- < y < y^+\}$. Пусть $\hat{v}(\hat{x},\hat{y}) = v(x,y)$. По теореме о следах и из неравенства Фридрихса ($v = 0$ на $\partial Q \setminus S$)

$$c_1\|\hat{v}\|_{H_{00}^{1/2}(\widehat{S})} \le |v|_{1,\widehat{Q}},$$

где c_1 не зависит от ε. Так как

$$\|v\|_{\varepsilon,Q_\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}|\hat{v}|_{1,\widehat{Q}}, \quad \|v\|_{H_{00}^{1/2}(S)} = \|\hat{v}\|_{H_{00}^{1/2}(\widehat{S})}, \tag{3.1}$$

из последнего неравенства следует, что

$$c_1\sqrt{\varepsilon}\|v\|_{H_{00}^{1/2}(S)} \le \|v\|_{\varepsilon,Q_\varepsilon} \le \|v\|_{\varepsilon,Q},$$

т. е. доказано левое неравенство леммы. Далее, пусть $\widehat{w}$ — гармоническая в $\widehat{Q}$ функция, равная нулю на $\partial\widehat{Q}\setminus\widehat{S}$, и $\widehat{w} = \hat{v}$ на $\widehat{S}$. Как известно [12], гармоническая функция осуществляет продолжение с границы $\widehat{S}$ в $\widehat{Q}$ с минимальной в $H^1(\widehat{Q})$ полунормой, и имеет место неравенство

$$|\widehat{w}|_{1,\widehat{Q}} \le c_2\|\hat{v}\|_{H_{00}^{1/2}(\widehat{S})} \tag{3.2}$$

с не зависящей от ε константой c_2. Пусть $w(x,y) = \widehat{w}(\hat{x},\hat{y})$ — функция, определенная в Q_ε. Как легко видеть, она может быть продолжена нулем в область Q как элемент пространства $H^1(Q)$. Тем самым построено продолжение функции $v(x_0,\cdot)$ с границы S на всю область Q. Но минимальное в энергетической норме продолжение реализует Δ_ε-гармоническая функция v. Используя равенства (3.1) для функций w и v и неравенство (3.2), получим

$$\|v\|_{\varepsilon,Q} \le \|w\|_{\varepsilon,Q} = \|w\|_{\varepsilon,Q_\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}|\widehat{w}|_{1,\widehat{Q}} \le c_2\sqrt{\varepsilon}\ \|\hat{v}\|_{H_{00}^{1/2}(\widehat{S})} = c_2\sqrt{\varepsilon}\ \|v\|_{H_{00}^{1/2}(S)}.$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение непосредственно связано с оценкой функции $\widetilde{\psi}_\alpha$.

Лемма 3.2. *Имеет место неравенство*

$$\|\widetilde{\psi}_\alpha\|_{\varepsilon,\Omega_0} \le c\sqrt{\varepsilon}\|w_0\|_{H_{00}^{1/2}(S_0(\alpha))},$$

где число c не зависит от ε.

Доказательство. Как нетрудно видеть,

$$\|\widetilde{\psi}_\alpha\|^2_{\varepsilon,\Omega_0} = \|\widetilde{\psi}_\alpha\|^2_{\varepsilon,D(\alpha)} + \|w_0\|^2_{\varepsilon,G(\alpha)}. \tag{3.3}$$

Функция $\widetilde{\psi}_\alpha$ является Δ_ε-гармонической в области $D(\alpha)$, равна нулю на $\partial\Omega_0$ и равна w_0 на $S_0(\alpha)$. Применим к функции $\widetilde{\psi}_\alpha$ правое неравенство леммы 3.1, полагая $Q = D(\alpha)$ и $S = S_0(\alpha)$:

$$\|\widetilde{\psi}_\alpha\|_{\varepsilon,D(\alpha)} \le c_2\sqrt{\varepsilon}\|w_0\|_{H_{00}^{1/2}(S_0(\alpha))}.$$

Совершенно аналогично из леммы 3.1 при $Q = G(\alpha)$ и $S = S_0(\alpha)$ следует оценка

$$\|w_0\|_{\varepsilon,G(\alpha)} \le c_2\sqrt{\varepsilon}\|w_0\|_{H_{00}^{1/2}(S_0(\alpha))}.$$

Подстановка двух последних оценок в (3.3) завершает доказательство леммы.

Напомним, что $w_0 = \varphi_0$ на S_0, где функция $\varphi_0(y)$ задана равенством (1.19).

Лемма 3.3. *Существуют не зависящие от ε и α числа c и σ такие, что*

$$\|w_0\|_{H_{00}^{1/2}(S_0(\alpha))} \le ce^{-\sigma\alpha/\varepsilon}\ \|\varphi_0\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma_0^-,\gamma_0^+)}. \tag{3.4}$$

Доказательство этой леммы достаточно трудоемко и будет приведено отдельно в § 4. Отметим, что указанные в лемме константы выписываются в явном виде через константы из леммы 3.1:

$$c = \frac{2c_2\sqrt{2(1+2c_\gamma^2)}}{c_1}, \quad \sigma = \frac{1}{8\sqrt{6}c_\gamma}.$$

Из лемм 3.2 и 3.3 следует итоговый результат первого этапа. Пусть

$$\alpha \ge \alpha_0 = \frac{1}{\sigma}\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{3.5}$$

Тогда имеют место неравенства

$$\|w_i - \widetilde{w}_{\alpha,i}\|_{\varepsilon,\Omega_i} \le c\varepsilon^{3/2}\|\varphi_i\|_{H_{00}^{1/2}(S_i)}, \quad i = 0,1,2. \tag{3.6}$$

Перейдем ко второму этапу запланированных построений. По-прежнему для примера будет рассматриваться подобласть Ω_0. В подобласти $D(\alpha)$ рассмотрим преобразование

$$\hat{x} = x, \quad \hat{y} = \gamma_0^- + \frac{\rho_0(0)}{\rho_0(x)}(y - \gamma_0^-(x)), \tag{3.7}$$

являющееся гомеоморфизмом $D(\alpha)$ на прямоугольник $\Pi_0 = (0,\alpha) \times (\gamma_0^-, \gamma_0^+)$. Здесь важно то, что якобиан преобразования является ограниченной в $D(\alpha)$ функцией. В области Ω_0 это уже не так, поскольку $\rho_0(1) = 0$. В прямоугольнике Π_0 рассмотрим $\widehat{\Delta}_\varepsilon$-гармоническую функцию $\widehat{w}_0$, равную нулю на $\partial\Pi_0 \setminus S_0$ (множество S_0 инвариантно относительно преобразования (3.7)) и равную φ_0 на S_0. Пусть $\varphi_{0,k}$ — коэффициенты разложения функции $\varphi_0(y)$ в ряд Фурье по системе функций $\sin(\lambda_{0,k}(y-\gamma_0^-))$, $k=1,2,\dots$. Напомним, что $\lambda_{0,k}=k\pi/\rho_0(0)$. Так как $\hat{y}(0,y)=y$, имеет место представление

$$\widehat{w}_0(\hat{x},\hat{y})=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{0,k}p_{\alpha,k}(\hat{x})\sin(\lambda_{0,k}(\hat{y}-\gamma_0^-)), \tag{3.8}$$

где

$$p_{\alpha,k}(x)=\frac{1-e^{-2\lambda_{0,k}(\alpha-x)/\varepsilon}}{1-e^{-2\lambda_{0,k}\alpha/\varepsilon}}e^{-\lambda_{0,k}x/\varepsilon}. \tag{3.9}$$

Осуществим преобразование, обратное к (3.7), и пусть $w_{\alpha,0}(x,y)=\widehat{w}_0(\hat{x},\hat{y})$ — функция, заданная в $D(\alpha)$ и имеющая в соответствии с (3.8), (3.9) вид

$$w_{\alpha,0}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{0,k}p_{\alpha,k}(x)\sin\theta_k(x,y), \tag{3.10}$$

где $\theta_k(x,y)=k\pi(y-\gamma_0^-(x))/\rho_0(x)$. При этом, как нетрудно заметить, $w_{\alpha,0}=\varphi_0$ на S_0 и $w_{\alpha,0}=0$ на $\partial D(\alpha)\setminus S_0$. Тогда после продолжения нулем на множество $G(\alpha)$ функция $w_{\alpha,0}$ может рассматриваться как элемент из $H^1(\Omega_0)$. Отметим, что построенная функция $w_{\alpha,0}$ удовлетворяет однородным краевым условиям на $\Gamma\cap\partial\Omega_0$, но не является гармонической не только в Ω_0, но и в $D(\alpha)$.

Оценим энергетическую норму функции $\psi_\alpha=\widetilde{w}_{\alpha,0}-w_{\alpha,0}\in H_0^1(\Omega_0)$. Напомним, что $\varphi_0\in H_0^1(\gamma_0^-,\gamma_0^+)$. Но, кроме того, из равенств (1.19), (1.22), условия (1.21) и теоремы о следах вытекает, что $\varphi_0\in H^{1+\mu}(\gamma_0^-,\gamma_0^+)$, $0<\mu\le 1/2$. Тогда $H^{1+\mu}$-норму функции φ_0 следует определять равенством

$$\|\varphi_0\|_{1+\mu,(\gamma_0^-,\gamma_0^+)}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{0,k}^{2(1+\mu)}\varphi_{0,k}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.11}$$

(см. [12]).

Лемма 3.4. *Имеет место неравенство*

$$\|\!|\psi_\alpha|\!\|_{\varepsilon,\Omega_0}\le c\varepsilon^{3/2}\|\varphi_0\|_{1+\mu,(\gamma_0^-,\gamma_0^+)},\quad 0<\mu\le 1/2,$$

где число c не зависит от ε.

Доказательство. Отметим, что $\psi_\alpha\equiv 0$ в $G(\alpha)$ и $\psi_\alpha\in H_0^1(D(\alpha))$. Получение оценки основано на выделении Δ_ε-гармонической составляющей из $w_{\alpha,0}$. В $D(\alpha)$ рассмотрим представление

$$w_{\alpha,0}=w_{\alpha,0}^0+w_{\alpha,0}^1, \tag{3.12}$$

где

$$w_{\alpha,0}^0(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{0,k}p_{\alpha,k}(x)\sin\theta_k(0,y). \tag{3.13}$$

Функция $w_{\alpha,0}^0$ является Δ_ε-гармонической в $D(\alpha)$. Так как $p_{\alpha,k}(\alpha)=0$, для любого y имеем $w_{\alpha,0}^0(\alpha,y)=0$ и, следовательно, продолжив ее нулем в $G(\alpha)$, получим $w_{\alpha,0}^0\in H^1(\Omega_0)$. Пусть $\psi_\alpha^0=\widetilde{w}_{\alpha,0}-w_{\alpha,0}^0$. Тогда в соответствии с разложением (3.11) $\psi_\alpha=\psi_\alpha^0-w_{\alpha,0}^1$. При этом функция ψ_α^0 является Δ_ε-гармонической в $D(\alpha)$ и обращается в нуль на $S_0\cup S_0(\alpha)$ (но, вообще говоря, отлична от нуля на $\Gamma\cap\partial D(\alpha)$). Так как $\psi_\alpha\in H_0^1(D(\alpha))$, то

$$\|\!|\psi_\alpha|\!\|_{\varepsilon,D(\alpha)}^2=-(\Delta_\varepsilon\psi_\alpha,\psi_\alpha)_{D(\alpha)}=\big(\Delta_\varepsilon w_{\alpha,0}^1,\psi_\alpha\big)_{D(\alpha)}=-\big[w_{\alpha,0}^1,\psi_\alpha\big]_{\varepsilon,D(\alpha)}$$

и из неравенства Шварца следует, что

$$\|\psi_\alpha\|_{\varepsilon,D(\alpha)} \le \|w^1_{\alpha,0}\|_{\varepsilon,D(\alpha)}. \tag{3.14}$$

В соответствии с равенствами (3.10), (3.12), (3.13)

$$w^1_{\alpha,0}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{0,k} p_{\alpha,k}(x)\omega_k(x,y), \tag{3.15}$$

где $\omega_k(x,y) = \sin\theta_k(x,y) - \sin\theta_k(0,y)$. В дальнейшем будут использоваться легко устанавливаемые оценки

$$|\omega_k| \le 3c_\gamma\lambda_{0,k}\frac{\rho_0(0)}{\rho_0(x)}x, \quad \left|\frac{\partial\omega_k}{\partial x}\right| \le 3c_\gamma\lambda_{0,k}\frac{\rho_0(0)}{\rho_0(x)}, \quad \left|\frac{\partial\omega_k}{\partial y}\right| \le 5c_\gamma\lambda^2_{0,k}\frac{\rho^2_0(0)}{\rho^2_0(x)}x. \tag{3.16}$$

На основе этих неравенств оценим L_2-нормы частных производных функции $w^1_{\alpha,0}$ в области $D(\alpha)$. С использованием неравенства Коши — Буняковского, формулы (3.11) и оценок (3.16) из (3.15) следует, что

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial w^1_{\alpha,0}}{\partial x}\right)^2 &\le 2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{0,k}^{-2(1+\mu)}\left(\left(\omega_k\frac{dp_{\alpha,k}}{dx}\right)^2 + \left(p_{\alpha,k}\frac{\partial\omega_k}{\partial x}\right)^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{0,k}^{2(1+\mu)}\varphi^2_{0,k} \\ &\le 18c^2_\gamma\left(\frac{\rho_0(0)}{\rho_0(x)}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{0,k}^{-2\mu}\left(x^2\left(\frac{dp_{\alpha,k}}{dx}\right)^2 + p^2_{\alpha,k}\right)\|\varphi_0\|^2_{1+\mu,(\gamma_0^-,\gamma_0^+)}.\end{aligned}$$

Подставляя в это неравенство выражение (3.9) и интегрируя по области $D(\alpha)$, нетрудно получить, что

$$\int\limits_{D(\alpha)}\left(\frac{\partial w^1_{\alpha,0}}{\partial x}\right)^2 dxdy \le \frac{c_1}{\rho_{\alpha,0}}\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{0,k}^{-(1+2\mu)}\|\varphi_0\|^2_{1+\mu,(\gamma_0^-,\gamma_0^+)}, \tag{3.17}$$

где $\rho_{\alpha,0} = \min\limits_{0\le x\le\alpha}\rho_0(x) > 0$. Для того чтобы устранить особенность, связанную с равенством $\rho_0(1) = 0$, и была построена функция $\widetilde{w}_{\alpha,0}$. Далее, аналогично предыдущему из (3.15) с учетом оценок (3.16) следует, что

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial w^1_{\alpha,0}}{\partial y}\right)^2 &\le \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{0,k}^{-2(1+\mu)}\left(p_{\alpha,k}\frac{\partial\omega_k}{\partial y}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{0,k}^{2(1+\mu)}\varphi^2_{0,k} \\ &\le 25c^2_\gamma\left(\frac{\rho_0(0)}{\rho_0(x)}\right)^4 x^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{0,k}^{2(1-\mu)}p^2_{\alpha,k}\|\varphi_0\|^2_{1+\mu,(\gamma_0^-,\gamma_0^+)}.\end{aligned}$$

Интегрирование этого неравенства по области $D(\alpha)$ приводит к оценке

$$\int\limits_{D(\alpha)}\left(\frac{\partial w^1_{\alpha,0}}{\partial y}\right)^2 dxdy \le \frac{c_2}{\rho^3_{\alpha,0}}\varepsilon^3\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{0,k}^{-(1+2\mu)}\|\varphi_0\|^2_{1+\mu,(\gamma_0^-,\gamma_0^+)}. \tag{3.18}$$

Из неравенств (3.17), (3.18) и сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_{0,k}^{-(1+2\mu)}$ при $\mu > 0$ вытекает оценка

$$\|w^1_{\alpha,0}\|_{\varepsilon,D(\alpha)} \le c\varepsilon^{3/2}\|\varphi_0\|_{1+\mu,(\gamma_0^-,\gamma_0^+)}. \tag{3.19}$$

Подставляя эту оценку в неравенство (3.14) и учитывая, что $\psi_\alpha \equiv 0$ в $G(\alpha)$, приходим к итоговой оценке леммы.

Таким образом, намеченный план выполнен. Из оценок (3.6) и леммы 3.4 следует основной результат данного параграфа.

Теорема 3.1. *Пусть для параметра α выполнено условие* (3.5). *Тогда имеют место неравенства*

$$\|w_i - w_{\alpha,i}\|_{\varepsilon,\Omega_i} \le c\varepsilon^{3/2}\|\varphi_i\|_{1+\mu,(\gamma_i^-,\gamma_i^+)}, \quad i = 0,1,2,$$

где число c не зависит от ε.

Замечание 3.1. При определении функций $w_{\alpha,i}$, $i = 1,2$, по формуле (3.10) следует учитывать, что $x \le 0$, и вместо (3.9) использовать выражения

$$p_{\alpha,k}(x) = \frac{1 - e^{-2\lambda_{i,k}(\alpha+x)/\varepsilon}}{1 - e^{-2\lambda_{i,k}\alpha/\varepsilon}} e^{\lambda_{i,k}x/\varepsilon}, \quad \alpha \ge \alpha_0 > 0,$$

где $\lambda_{i,k} = k\pi/\rho_i(0)$.

Еще раз подчеркнем, что в явном виде построена функция слоя w_α и погрешность соответствующего ей приближения $U_\alpha = u_0 + w_\alpha$ оценивается по теореме 1.3. При этом, как следует из (3.9), (3.10), функция слоя состоит из счетного числа экспоненциальных слоев. В § 5 для одного частного случая будут указаны и коэффициенты Фурье этого представления.

При доказательстве леммы 3.4 из функции $w_{\alpha,0}$ была выделена Δ_ε-гармоническая составляющая $w^0_{\alpha,0} \in H^1(\Omega_0)$, определяемая равенством (3.13) в $D(\alpha)$ и продолженная нулем на $G(\alpha)$. В отличие от функции $w_{\alpha,0}$ эта составляющая не удовлетворяет однородным краевым условиям на $\Gamma \cap \partial D(\alpha)$. Тем не менее $w^0_{\alpha,0}$ может быть использована в качестве функции слоя. Действительно, согласно (3.12), (3.19) и теореме 3.1

$$\|w_0 - w^0_{\alpha,0}\|_{\varepsilon,\Omega_0} \le \|w_0 - w_{\alpha,0}\|_{\varepsilon,\Omega_0} + \|w^1_{\alpha,0}\|_{\varepsilon,D(\alpha)} \le 2c\varepsilon^{3/2}\|\varphi_0\|_{1+\mu,(\gamma_0^-,\gamma_0^+)}. \tag{3.20}$$

В соответствии с этим неравенством и теоремой 1.3 в качестве приближения может использоваться функция $U^0_\alpha = u_0 + w^0_\alpha$, построенная по функциям $w^0_{\alpha,i}$, $i = 0,1,2$.

Наконец, подчеркнем роль неравенства (3.5). Введенное в нем число α_0 характеризует ширину слоя. Вне слоя функция w_α не влияет на точность приближения.

§ 4. Доказательство леммы 3.3

Доказательство основано на применении метода Галёркина для получения неравенства (4.1) на последовательности специально организованных замкнутых конечномерных подпространств пространства $H^1(\Omega_0)$. При этом собственно неравенство (4.1) устанавливается при помощи оценки нормы оператора перехода чебышевского итерационного процесса [14] в этих подпространствах. Идея использования итерационной процедуры для получения оценки сеточной функции Грина принадлежит Ю. А. Кузнецову [15]. Речь идет о следующем неравенстве:

$$\|w\|_{\varepsilon,G(\alpha)} \le c_0 e^{-\sigma\alpha/\varepsilon}\ \|w\|_{\varepsilon,\Omega_0}. \tag{4.1}$$

Здесь и далее в этом параграфе индекс 0, соответствующий номеру подобласти, во всех обозначениях (кроме самой подобласти) для упрощения записи опускаем. Переход от (4.1) к неравенству, указанному в формулировке леммы 3.3, осуществляется на основании леммы 3.1. Полагая сначала $Q = G(\alpha)$, а затем $Q = \Omega_0$, получим

$$\|w\|_{H^{1/2}_{00}(S(\alpha))} \le \frac{1}{c_1\sqrt{\varepsilon}}\ \|w\|_{\varepsilon,G(\alpha)} \le \frac{c_0}{c_1\sqrt{\varepsilon}} e^{-\sigma\alpha/\varepsilon}\|w\|_{\varepsilon,\Omega_0} \le \frac{c_0 c_2}{c_1}\ e^{-\sigma\alpha/\varepsilon}\ \|\varphi\|_{H^{1/2}_{00}(S)}.$$

Для удобства изложения наметим поэтапный план доказательства, которому в дальнейшем будем следовать. Первый этап, подготовительный, состоит в приведении задачи определения Δ_ε-гармонической функции w к задаче о представлении линейного функционала в пространстве $H_0^1(\Omega_0)$. Делается это для того, чтобы корректно организовать итерационную процедуру, приводящую к неравенству типа (4.1). Второй этап состоит в построении конечноэлементных подпространств $H_{h,0} \subset H_0^1(\Omega_0)$ с использованием непрерывных кусочно линейных базисных функций на нерегулярной по параметру ε триангуляции (см. [16]), состоящей из анизотропных (вытянутых в направлении оси Oy) треугольников, и в формулировке задачи, полученной на первом этапе, в этом подпространстве. После этого к конечномерной задаче применяются s шагов чебышевского итерационного процесса, известные оценки сходимости которого приводят к конечномерному аналогу неравенства (4.1). Важным моментом этого этапа является оценка границ спектра конечномерного оператора, знание которых необходимо для применения упомянутых оценок. На последнем, третьем этапе, дается обоснование предельного перехода в конечномерном аналоге неравенства (4.1).

Для сведения задачи определения Δ_ε-гармонической функции w к задаче о представлении линейного функционала рассмотрим отличное от w продолжение функции $\varphi \in H_{00}^{1/2}(S)$ в область Ω_0. В качестве такого продолжения рассмотрим функцию $\widehat{w}_\alpha(x,y) = \chi_\alpha(x)w(x,y)$, где $\chi_\alpha(x)$ — функция срезки: $\chi_\alpha(x) = 1-2x/\alpha$ при $0 \le x \le \alpha/2$ и $\chi_\alpha(x) = 0$ при $\alpha/2 < x \le 1$. При этом $\widehat{w}_\alpha = \varphi$ на S. Тогда функция $z = w - \widehat{w}_\alpha \in H_0^1(\Omega_0)$ является решением задачи: для любого $v \in H_0^1(\Omega_0)$

$$[z,v]_{\varepsilon,\Omega_0} = -[\widehat{w}_\alpha, v]_{\varepsilon,\Omega_0}. \tag{4.2}$$

Функционал в правой части (4.2) равномерно по ε ограничен в $H_0^1(\Omega_0)$. Это немедленно следует из неравенств Шварца, (2.13), условия $\alpha \ge \varepsilon$ (см. § 3) и цепочки неравенств

$$\|\!|\widehat{w}_\alpha|\!\|^2_{\varepsilon,\Omega_0} \le \int\limits_{\Omega_0} \left\{ \chi_\alpha^2 \left[2\varepsilon^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] + 2\varepsilon^2 \left(\frac{d\chi_\alpha}{dx}\right)^2 w^2 \right\} dxdy$$
$$\le 2\|\!|w|\!\|^2_{\varepsilon,\Omega_0} + \frac{8\varepsilon^2}{\alpha^2}\|w\|^2_{\Omega_0} \le 2\big(1+2c_\gamma^2\big)\|\!|w|\!\|^2_{\varepsilon,\Omega_0}.$$

Так как $z \in H_0^1(\Omega_0)$, в (4.2) положим $v = z$ и последнее неравенство дает оценку

$$\|\!|z|\!\|_{\varepsilon,\Omega_0} \le \sqrt{2(1+2c_\gamma^2)}\,\|\!|w|\!\|_{\varepsilon,\Omega_0}. \tag{4.3}$$

Кроме этого неравенства определяющим для получения итогового результата является тот факт, что $z \equiv w$ в $G(\alpha)$.

Перейдем к построениям второго этапа. Зададим натуральное число m, и пусть $h = \rho(0)/m$. В полуплоскости $x \ge 0$ введем прямоугольную сетку $\{(x_i, y_j),$ $i = 0,1,\dots,\ j = 0,\pm1,\dots\}$ с постоянными шагами $h_x = x_{i+1}-x_i$, $h_y = y_{j+1}-y_j$ и с началом отсчета $x_0 = 0$, $y_0 = \gamma^-$. Положим $h_x = \varepsilon h$, $h_y = h$. Каждую ячейку $\pi_{i,j} = \{x_i \le x \le x_{i+1},\ y_j \le y \le y_{j+1}\}$ разобьем произвольной диагональю на два треугольника, и пусть $\mathscr{T}_{h,\varepsilon} = \{e\}$ — множество всех полученных таким образом треугольников, лежащих в $\overline{\Omega}_0$. Обозначим

$$\overline{\Omega}^h = \bigcup_{e\in\mathscr{T}_{h,\varepsilon}} e, \quad G^h = \overline{\Omega}_0 \setminus \overline{\Omega}^h,$$

и пусть $\Omega^h = \overline{\Omega}^h \setminus \Gamma^h$, где $\Gamma^h = \partial\overline{\Omega}^h$. При этом $\Omega^h \subset \Omega_0$, а G^h лежит в полосе шириной h: $\Gamma \subset \overline{G}^h$, $\operatorname{dist}(\Gamma, \Omega^h) \le h$. По триангуляции $\mathscr{T}_{h,\varepsilon}$ введем пространство $H_{h,0} \subset H_0^1(\Omega_0)$ непрерывных, линейных на каждом $e \in \mathscr{T}_{h,\varepsilon}$, равных нулю на $\partial\Omega^h$ и продолженных нулем в G^h функций. Рассмотрим аппроксимацию задачи (4.2): найти функцию $z^h \in H_{h,0}$ такую, что для любого $v^h \in H_{h,0}$

$$[z^h, v^h]_{\varepsilon,\Omega_0} = -[\widehat{w}_\alpha, v^h]_{\varepsilon,\Omega_0}. \tag{4.4}$$

Пусть M — количество внутренних (лежащих в Ω_h) узлов сетки и $\mathscr{E}_M$ — евклидово пространство вещественных векторов размерности M со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $\|\cdot\|$. Для удобства компоненты элементов пространства $\mathscr{E}_M$ будем снабжать двухиндексными номерами, соответствующими номерам узлов $(x_i, y_j) \in \Omega_h$. При этом множество таких номеров обозначим через I. Отметим, что $i \ge 1$ при $(i,j) \in I$. Для стандартного кусочно линейного базиса $\{\varphi_{i,j}(x,y)\}_{(i,j)\in I}$ пространства $H_{h,0}$ (функции $\varphi_{i,j}$ продолжены нулем в G^h) в евклидовом пространстве $\mathscr{E}_M$ задаче (4.4) соответствует ее векторно-матричная запись:

$$A\bar{z} = \bar{a}, \tag{4.5}$$

где компонентами векторов $\bar{z}$ и $\bar{a}$ являются значения $z^h(x_i, y_j)$ и $-[\widehat{w}_\alpha, \varphi_{i,j}]_{\varepsilon,\Omega_0}$ соответственно, а элементы матрицы A — это $[\varphi_{i,j}, \varphi_{k,l}]_{\varepsilon,\Omega_0}$.

Замечание 4.1. Важно отметить, что так как $\widehat{w}_\alpha \equiv 0$ при $x \ge \alpha/2$, то $a_{i,j} = -[\widehat{w}_\alpha, \varphi_{i,j}]_{\varepsilon,\Omega_0} = 0$ при $(i-1)\varepsilon h \ge \alpha/2$.

К задаче (4.5) применим s шагов итерационного процесса

$$\bar{z}_0 = \overline{0}, \quad \bar{z}_n = \bar{z}_{n-1} - \tau_n(A\bar{z}_{n-1} - \bar{a}),\ n = 1,\dots,s,$$

где $\overline{0}$ — нулевой элемент из $\mathscr{E}_M$ и τ_n — параметры чебышевского метода [14]. При этом, как хорошо известно, для погрешности имеет место оценка

$$\|\bar{z} - \bar{z}_s\|_A \le T_s^{-1}(t)\|\bar{z}\|_A, \tag{4.6}$$

где $T_s(t)$ — полином Чебышева 1-го рода, $t = (p+1)/(p-1)$ и $p = p(A) = \operatorname{cond} A$ — число обусловленности матрицы A.

Локальность носителей базисных функций дает такую структуру матрицы A, при которой если вектор $\bar{v}$ для всех номеров $(i,j) \in I$ имеет нулевые компоненты при $i \ge r$, то вектор $A\bar{v}$ имеет нулевые компоненты при $i \ge r+1$. Тогда согласно замечанию 4.1 $\bar{z}_1 = \tau_1\bar{a}$ имеет нулевые компоненты при $i \ge 1 + \alpha/2\varepsilon h$, $\bar{z}_2$ — при $i \ge 2 + \alpha/2\varepsilon h, \dots$, $\bar{z}_s$ — при $i \ge s + \alpha/2\varepsilon h$. Пусть $r = s + 1 + [\alpha/2\varepsilon h]$, т. е. при $i \ge r$ компоненты вектора $\bar{z}_s$ с номерами $(i,j) \in I$ нулевые. Рассмотрим матрицу A_r с элементами $[\varphi_{i,j}, \varphi_{k,l}]_{\varepsilon,G(x_r)}$. Как легко видеть, $A_r\bar{z}_s = \overline{0}$. Но тогда

$$\|\bar{z}\|_{A_r} = \|\bar{z} - \bar{z}_s\|_{A_r} \le \|\bar{z} - \bar{z}_s\|_A,$$

и в соответствии с (4.6) имеет место неравенство

$$\|\bar{z}\|_{A_r} \le T_s^{-1}(1 + 2/p)\|\bar{z}\|_A. \tag{4.7}$$

Пусть s таково, что $x_r \le \alpha \le x_{r+1}$. Тогда $G(\alpha) \subset G(x_r)$, и так как

$$\|\bar{z}\|_{A_r} = \|z^h\|_{\varepsilon,G(x_r)}, \quad \|\bar{z}\|_A = \|z^h\|_{\varepsilon,\Omega_0},$$

а функция $\psi(p) = T_s^{-1}(t(p))$ монотонно возрастает при $p > 0$, согласно (4.7)

$$\|z^h\|_{\varepsilon,G(\alpha)} \le \|z^h\|_{\varepsilon,G(x_r)} \le \psi(q)\|z^h\|_{\varepsilon,\Omega_0}, \tag{4.8}$$

где $q \geq p$. Таким образом, следующая наша задача состоит в нахождении верхней оценки q числа обусловленности матрицы A. Для этого, во-первых, оценим снизу минимальное собственное число $\lambda_{\min}$. Из (2.13) имеем

$$\|\bar{v}\|_A^2 = \|v^h\|_{\varepsilon,\Omega_0}^2 \geq \frac{2}{c_\gamma^2}\|v^h\|_{\Omega_0}^2 \quad \forall \bar{v} \in \mathscr{E}_M.$$

С учетом того, что все узлы строго внутренние в Ω_h и, следовательно, для прямоугольной сетки каждый узел содержится ровно в шести треугольниках, справедлива оценка (см. [13])

$$\|v^h\|_{\Omega_0}^2 \geq \frac{1}{4}\varepsilon h^2 \|\bar{v}\|^2.$$

Из двух последних неравенств вытекает, что $\lambda_{\min} \geq \varepsilon h^2/2c_\gamma^2$. Далее, для треугольника с вершинами (x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j) и (x_i, y_{j+1}) имеем

$$\|v^h\|_{\varepsilon,e}^2 = \frac{\varepsilon}{2}\big(\big(v_{i+1,j} - v_{i,j}\big)^2 + \big(v_{i,j+1} - v_{i,j}\big)^2\big) \leq 2\varepsilon\big(v_{i,j}^2 + v_{i+1,j}^2 + v_{i,j+1}^2\big).$$

Суммирование этого неравенства по всем треугольникам $e \in \mathscr{T}_{h,\varepsilon}$ приводит к оценке $\lambda_{\max} \leq 12\varepsilon$. Таким образом, искомая оценка числа обусловленности получена:

$$1 < p(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leq 24 c_\gamma^2 h^{-2} = q. \tag{4.9}$$

Как хорошо известно [14], $T_s(t) = (\gamma^s + \gamma^{-s})/2$, где $\gamma = t - \sqrt{t^2 - 1}$. При этом $\gamma = (\sqrt{q} - 1)/(\sqrt{q} + 1)$ при $t = (q + 1)/(q - 1)$. Так как $q > 1$, из этих равенств следует, что

$$\psi(q) = 2\gamma^s/(1 + \gamma^{2s}) \leq 2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{q} + 1}\right)^s \leq 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{q}}\right)^d \tag{4.10}$$

для любого вещественного $d \leq s$. Требуемую оценку снизу для s дает условие $x_{r+1} = (s+2+[\alpha/2\varepsilon h])\varepsilon h \geq \alpha$, из которого при $h \leq h_1 = 1/8$ и $\alpha > \varepsilon$ получим $s \geq \alpha/4\varepsilon h = d$. Пусть $c' = \rho(0)/2\sqrt{6}c_\gamma$ и $c'' = \alpha/4\rho(0)\varepsilon$. Напомним, что $h = \rho(0)/m$, и пусть $m_1 \geq 8\rho(0)$. Тогда в соответствии с неравенствами (4.9), (4.10) имеем $\psi(q) \leq 2\left(1 - c'/m\right)^{c''m}$. Последовательность в правой части этого неравенства при достаточно больших $m \geq m_2$ монотонно возрастает. Таким образом, при $m \geq \max(m_1, m_2)$ получим, что

$$\psi(q) \leq 2e^{-c'c''} = 2e^{-\sigma\alpha/\varepsilon}, \quad \sigma = \frac{1}{8\sqrt{6}c_\gamma}. \tag{4.11}$$

Неравенства (4.8), (4.11) приводят к неравенству (4.1) для функции $z^h \in H_{h,0}$. Этим завершается второй этап доказательства леммы 3.3.

На третьем этапе осуществляется предельный переход в неравенстве (4.8) при $h \to 0$. Делается это стандартным образом (см. [13]). Однако в рассматриваемом случае имеется определенная специфика, связанная с тем, что, во-первых, $z \notin H^2(\Omega_0)$ и, во-вторых, функция из плотного в $H_0^1(\Omega_0)$ множества, аппроксимирующая z, вообще говоря, отлична от нуля в G^h. В связи с этим кратко остановимся на некоторых технических деталях.

Из (4.8), (4.11) и леммы Cea′ (см. [16]) следует, что

$$\|z\|_{\varepsilon,G(\alpha)} \leq 2e^{-\sigma\alpha/\varepsilon}\|z\|_{\varepsilon,\Omega_0} + 3\inf_{v^h \in H_{h,0}}\|z - v^h\|_{\varepsilon,\Omega_0}. \tag{4.12}$$

Так как $z \in H_0^1(\Omega_0)$, а в пространстве $H_0^1(\Omega_0)$ плотно $H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0)$, для произвольного $\delta > 0$ существует функция $z_\delta \in H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0)$ такая, что

$$\|z - z_\delta\|_{\varepsilon,\Omega_0} \le |z - z_\delta|_{1,\Omega_0} < \frac{\delta}{6}. \tag{4.13}$$

По теореме вложения $z_\delta \in C(\overline{\Omega}_0)$, и, следовательно, существует функция

$$z_\delta^h(x,y) = \sum_{(i,j)\in I} z_\delta(x_i,y_j)\varphi_{i,j}(x,y) \in H_{h,0}.$$

С использованием оценки из [13] получим неравенство

$$\|\psi_\delta\|^2_{\varepsilon,\Omega_0} \le \|\psi_\delta\|^2_{\varepsilon,\Omega^h} + \|z_\delta\|^2_{\varepsilon,G^h} \le \|\psi_\delta\|^2_{\varepsilon,\Omega^h} + c'h|z_\delta|^2_{2,\Omega_0}, \tag{4.14}$$

где $\psi_\delta = z_\delta - z_\delta^h$. При этом $z_\delta(x_i,y_j) \ne 0$ для части вершин $(x_i,y_j) \in \Gamma^h$, в то время как в этих же узлах $z_\delta^h(x_i,y_j) = 0$. Пусть $\hat{z}_\delta^h$ — заданная в $\overline{\Omega}^h$ кусочно линейная непрерывная функция такая, что $\hat{z}_\delta^h(x_i,y_j) = z_\delta(x_i,y_j)$ во *всех* узлах из $\overline{\Omega}^h$. Отметим, что эта функция определена только в $\overline{\Omega}^h$ и не является элементом из $H_{h,0}$. Тогда для функции $z_\delta - \hat{z}_\delta^h$ применима стандартная оценка интерполяции на прямоугольной сетке (см. [13]). В результате получим неравенство

$$\|\psi_\delta\|^2_{\varepsilon,\Omega^h} \le (1+\varepsilon^4)h^2|z_\delta|^2_{2,\Omega^h} + \|\widehat{\psi}_\delta^h\|^2_{\varepsilon,\Omega^h}, \tag{4.15}$$

где $\widehat{\psi}_\delta^h = \hat{z}_\delta^h - z_\delta^h$ — функция, заданная в $\overline{\Omega}^h$ и отличная от нуля только в треугольниках, имеющих хотя бы одну вершину из Γ^h. При этом в таких вершинах $\widehat{\psi}_\delta^h(x_i,y_j) = z_\delta(x_i,y_j)$, а во всех внутренних в Ω^h вершинах ($(i,j) \in I$) $\widehat{\psi}_\delta^h(x_i,y_j) = 0$. Кроме того, напомним, что $z_\delta(x,y) = 0$ на Γ, а $\operatorname{dist}(\Gamma,\Gamma^h) \le h$. В этом случае несложные вычисления и оценки из [13] приводят к неравенству

$$\|\widehat{\psi}_\delta^h\|^2_{\varepsilon,\Omega^h} = \varepsilon \sum_{(x_i,y_j)\in\Gamma^h} z_\delta^2(x_i,y_j) \le c''\varepsilon h|z_\delta|^2_{2,\Omega_0}.$$

Последнее неравенство и оценки (4.14) и (4.15) дают следующий результат: существует $m_3 = m_3(\delta)$ такое, что при $m \ge m_3$

$$\|z_\delta - z_\delta^h\|_{\varepsilon,\Omega_0} < \delta/6. \tag{4.16}$$

Так как $z_\delta^h \in H_{h,0}$, в (4.12) можно положить $v^h = z_\delta^h$ и из неравенств (4.13), (4.16) следует, что

$$\|z\|_{\varepsilon,G(\alpha)} \le 2e^{-\sigma\alpha/\varepsilon}\|z\|_{\varepsilon,\Omega_0} + \delta.$$

Тем самым в силу произвольности δ осуществлен предельный переход в неравенстве (4.8). Наконец, согласно неравенству (4.3) и тождеству $z \equiv w$ в $G(\alpha)$ имеет место неравенство (4.1) с константами $c_0 = 2\sqrt{2(1+2c_\gamma^2)}$ и $\sigma = (8\sqrt{6}c_\gamma)^{-1}$. Лемма 3.3 доказана.

§ 5. Односторонний внутренний слой

В этом параграфе для одного частного случая областей с условием (**ii**) будет получена функция слоя без использования априорной информации о решении исходной задачи (0.1), (0.2). Напомним, что согласно построениям § 1 функцию слоя образуют Δ_ε-гармонические в подобластях Ω_i функции, равные нулю на

$\Gamma\cap\partial\Omega_i$ и удовлетворяющие условиям (1.19), (1.22) на S_i. При этом условие (1.22) обеспечивает принадлежность сужений погрешности $z = u - u_0 - w$ на множества Ω_i пространствам $H_0^1(\Omega_i)$ (см. доказательство теоремы 1.3 в начале § 3). В отсутствие (1.22) это свойство исчезает, хотя по-прежнему $z \in H_0^1(\Omega)$. Ниже рассматривается случай, когда вместо равенства (1.22) функция φ задается в явном виде.

Сформулируем основной результат данного параграфа. Напомним, что приближение $U_\alpha = u_0 + w_\alpha$ использует функцию слоя, построенную на основе функций, заданных равенством (3.10).

Теорема 5.1. *Пусть многоугольник Ω удовлетворяет условию* (**ii**), *причем*

$$\rho_1(0) = \rho_2(0), \tag{5.1}$$

в каждой из подобластей Ω_i функция f удовлетворяет условиям теоремы 1.2, *и пусть*

$$\varphi(y) = u_{0,i}(0,y), \quad \gamma_i^- < y < \gamma_i^+, \;\; i = 1, 2. \tag{5.2}$$

Тогда имеет место оценка

$$|\!|\!| u - U_\alpha |\!|\!|_{\varepsilon,\Omega} \le c\varepsilon^{3/2},$$

где число c не зависит от ε.

Для доказательства сформулированной теоремы нам прежде всего нужно решить вопрос о существовании правой части неравенства (3.19).

Лемма 5.1. *Для функции $\varphi_0 = \varphi - u_{0,0}$, где φ задана равенством* (5.2), *имеет место включение*

$$\varphi_0 \in H^{1+\mu}(\gamma_0^-, \gamma_0^+), \quad 0 < \mu < 1/2.$$

Доказательство. Из представления (1.16) следует, что $\varphi_0(y)$ — кусочно линейная функция, имеющая вид

$$\varphi_0(y) = -a_0(0)\begin{cases} 1 + y/\rho_1(0) & \text{при} \quad \gamma_0^- \le y \le 0, \\ 1 - y/\rho_2(0) & \text{при} \quad 0 < y \le \gamma_0^+. \end{cases}$$

Согласно (3.11) для доказательства леммы надо оценить величину

$$\|\varphi_0\|^2_{1+\mu,(\gamma_0^-,\gamma_0^+)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{0,k}^{2(1+\mu)} \varphi_{0,k}^2,$$

где коэффициенты $\varphi_{0,k}$ разложения функции φ_0 в ряд Фурье по системе функций $\sin(\lambda_{0,k}(y - \gamma_0^-))$ имеют вид

$$\varphi_{0,k} = 2\int_{\gamma_0^-}^{\gamma_0^+} \varphi_0(y)\sin(\lambda_{0,k}(y-\gamma_0^-))dy = -\frac{2a_0(0)\rho_0(0)}{\rho_1(0)\rho_2(0)\lambda_{0,k}^2}\sin(\lambda_{0,k}\rho_1(0)). \tag{5.3}$$

Из последних двух равенств немедленно вытекает, что

$$\|\varphi_0\|^2_{1+\mu,(\gamma_0^-,\gamma_0^+)} \le \frac{4a_0^2(0)}{\rho_1^2(0)\rho_2^2(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{0,k}^{2(\mu-1)}.$$

Сходимость ряда в правой части последнего неравенства при $\mu < 1/2$ доказывает лемму.

Доказательство теоремы 5.1. Оценим функцию $z_\alpha = u - U_\alpha \in H_0^1(\Omega)$. Нетрудно заметить, что $w_{\alpha,i} \equiv 0$ в Ω_i при $i = 1, 2$ (см. замечание 5.1). Тогда из (1.1), (3.12) и Δ_ε-гармоничности в области Ω_0 функции $w^0_{\alpha,0}$, заданной равенством (3.13), следует, что

$$\|z_\alpha\|^2_{\varepsilon,\Omega} = -\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{2} \int_{\Omega_i} \frac{\partial u_{0,i}}{\partial x} \frac{\partial z_\alpha}{\partial x}\, dxdy - \left[w^1_{\alpha,0}, z_\alpha\right]_{\varepsilon,\Omega_0} - \varepsilon^2 \int_{S_0} \frac{\partial w^0_{\alpha,0}}{\partial x} z_\alpha dy. \qquad (5.4)$$

Первое слагаемое этого равенства оценивается так же, как при доказательстве теоремы 1.2. Единственное отличие состоит в использовании разбиения единицы и в окрестности границы S_0. Для оценки второго слагаемого применяются неравенство (3.19) и лемма 5.1. Оценить левую часть равенства (5.4) величиной порядка $O(\varepsilon^3)$ мешает третье слагаемое. Рассмотрим его подробнее. Согласно представлению (3.13), (3.9) имеем

$$\frac{\partial w^0_{\alpha,0}}{\partial x}(0, y) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{0,k} \lambda_{0,k} \operatorname{cth}(\lambda_{0,k}\alpha/\varepsilon) \sin(\lambda_{0,k}(y - \gamma_0^-)).$$

Далее, так как в соответствии с (1.21) $z_\alpha \in H^{3/2+\mu}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ и, следовательно, $z_\alpha(0, \cdot) \in H_0^1\big(0; \gamma_0^-, \gamma_0^+\big)$, разложение функции $z_\alpha(0, y)$ в ряд Фурье имеет вид

$$z_\alpha(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \sin(2\lambda_{0,k}(y - \gamma_0^-)).$$

Подставляя оба приведенных разложения в третье слагаемое равенства (5.4), после несложных вычислений получим

$$\int_{S_0} \frac{\partial w^0_{\alpha,0}}{\partial x} z_\alpha dy = -\frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} z_k \varphi_{0,2k} \lambda_{0,2k} \operatorname{cth}(\lambda_{0,2k}\alpha/\varepsilon). \qquad (5.5)$$

Согласно условию (5.1) $\rho_1(0) = \rho_0(0)/2$ и, следовательно, $\sin(2\lambda_{0,k}\rho_1(0)) = 0$. Но тогда из (5.3) следует, что $\varphi_{0,2k} = 0$. В свою очередь, это означает, в соответствии с (5.5), равенство нулю третьего слагаемого в (5.4), что доказывает теорему.

Замечание 5.1. Согласно (1.19) и (5.2) $\varphi_i(y) \equiv 0$, $i = 1, 2$, и, следовательно, $w_{\alpha,i} \equiv 0$ в Ω_i, $i = 1, 2$. Таким образом, функция слоя w_α формируется только из $w_{\alpha,0}$, и внутренний слой присутствует только в подобласти Ω_0.

Замечание 5.2. Условием отсутствия внутреннего слоя ($w_{\alpha,0} \equiv 0$) является равенство $a_0(0) = 0$. Согласно (1.18) это равенство при условии (5.1) принимает вид $h(0, \rho_0(0)/2) + h(0, -\rho_0(0)/2) = 0$. Последнее равенство, в частности, выполняется для нечетных функций $f(0, y)$.

Полученный результат легко обобщается на область с «зубчатой» границей, когда Ω_0 соприкасается не с двумя, а с p подобластями Ω_i, $i = 1, \ldots, p$, а аналогом условия (5.1) являются равенства $\rho_i(0) = \rho_0(0)/p$, $i = 1, \ldots, p$. При этом следствием того, что $z_\alpha \in H_0^1(\Omega)$, служит разложение

$$z_\alpha(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \sin(p\lambda_{0,k}(y - \gamma_0^-)).$$

Тогда аналогично равенству (5.5) получим

$$\int\limits_{S_0} \frac{\partial w^0_{\alpha,0}}{\partial x} z_\alpha dy = -\frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} z_k \varphi_{0,pk} \lambda_{0,pk} \operatorname{cth}(\lambda_{0,pk}\alpha/\varepsilon). \tag{5.6}$$

Покажем, что $\varphi_{0,pk} = 0$. Так как регулярная компонента решения строится по формулам (1.16) при $i = 0, 1, \dots, p$, то φ_0 является непрерывной кусочно линейной функцией, принадлежащей пространству $H^{1+\mu}(\gamma_0^-, \gamma_0^+) \cap H_0^1(\gamma_0^-, \gamma_0^+)$. Такую функцию можно разложить по стандартным кусочно линейным базисным функциям $\omega_i(y)$, $i = 1, \dots, p-1$, с локальными носителями [14]. Коэффициенты разложения функции $\omega_i(y)$ в ряд Фурье вычисляются аналогично (5.3) и имеют вид

$$\omega_{i,k} = \frac{4p}{\rho_0 \lambda_{0,k}^2} \sin \frac{ik\pi}{p} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{p}\right), \quad i = 1, \dots, p-1.$$

Из этого равенства немедленно следует, что $\omega_{i,pk} = 0$, а значит, и $\varphi_{0,pk} = 0$.

§ 6. Заключительные замечания

Первое замечание касается возможности использования вместо (0.2) неоднородного краевого условия

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma.$$

В этом случае при конструировании регулярного приближения коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ следует определять из условий $u_0(x, \gamma^\pm(x)) = \varphi(x, \gamma^\pm(x))$. От функции φ требуется возможность ее продолжения внутрь Ω как функции из пространства $H^{3/2+\mu}(\Omega)$, т. е. $\varphi \in H^{1+\mu}(\Gamma)$.

Теперь кратко остановимся на возможности обобщения полученных выше результатов для уравнения с переменными коэффициентами вида

$$L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(P(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(Q(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Предполагается, что $P, Q \in C^1(\overline{\Omega})$, $\partial^2 Q/\partial x^2 \in C(\Omega)$ и

$$P(x,y) \ge \nu, \quad Q(x,y) \ge \nu, \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

где число $\nu > 0$ не зависит от ε. Пусть

$$h(x,y) = \int\limits_0^y \left(\frac{1}{Q(x,y')} \int\limits_0^{y'} f(x,y'')dy'' \right) dy'.$$

Тогда аналогом представления (1.16) является

$$u_{0,i}(x,y) = a_i(x) + b_i(x) \int\limits_0^y \frac{dy'}{Q(x,y')} - h(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}_i, \quad i = 0,1,2,$$

где коэффициенты $a_i(x)$ и $b_i(x)$ находятся из условий (1.17) и имеют вид, аналогичный (1.18). Для области, удовлетворяющей условию (**i**), когда в приближении отсутствует функция слоя, верны теоремы 1.1 и 1.2. Имеющие при этом место изменения в доказательствах очевидны. Функция слоя вводится на основе L_ε-гармонических функций в подобластях Ω_i, удовлетворяющих на S_0 условиям

(1.20). Это немедленно приводит к справедливости теоремы 1.3. Аналог функции слоя $w_{\alpha,0}^0$ строится на основе ортогональной системы собственных функций $\omega_k(y)$, $k = 1, 2, \dots$, являющихся решениями одномерной спектральной задачи

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(Q_0(y)\frac{\partial\omega_k}{\partial y}\right) = \lambda_k P_0(y)\omega_k,\ k = 1, 2, \dots, \quad \omega_k(\gamma_0^-) = \omega_k\big(\gamma_0^+\big) = 0,$$

где $Q_0(y) = Q(0, y)$ и $P_0(y) = P(0, y)$.

Отметим, что результаты § 5 об одностороннем слое на задачи с переменными коэффициентами не распространяются. Здесь требуются дальнейшие исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.

2. *Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.

3. *Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.* Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Berlin: Springer-Verl., 1996.

4. *Бутузов В. Ф., Деркунова Е. А.* Асимптотика решения уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла в тонком стержне // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 6. С. 68–85.

5. *Hackbush W.* The frequency decomposition multi-grid method. Part I: application to anisotropic equations // Numer. Math. 1989. V. 56. P. 229–245.

6. *Stevenson R.* Robustness of multi-grid applied to anisotropic equations on convex domains and on domains with re-entrant corners // Numer. Math. 1993. V. 66. P. 373–398.

7. *Margenov S. D., Vassilevski P. S.* Algebraic multilevel preconditioning of anisotropic elliptic problems // SIAM J. Sci. Comput. 1994. V. 15, N 5. P. 1026–1037.

8. *Griebel M., Oswald P.* Tensor product type subspace splittings and multilevel iterative methods for anisotropic problems // Adv. Comput. Math. 1995. V. 4, N 1. P. 171–206.

9. *Stevenson R.* A robust hierarchical basis preconditioner on general meshes // Numer. Math. 1997. V. 78. P. 269–303.

10. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

11. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.

12. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

13. *Оганесян Л. А., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: АН Арм. ССР, 1979.

14. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.

15. *Kuznetsov Yu. A.* New algorithms for approximate realization of implicit difference schemes // Sov. J. Numer. Anal. and Math. Model. 1988. V. 3, N 2. P. 99–114.

16. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

Статья поступила 3 сентября 1999 г.

г. Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
laev@labchem.sscc.ru