Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.958

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ТРЕХФАЗНОГО КОНТАКТА

В. В. Кузнецов

Аннотация: Получены условия существования обобщенного решения у задачи для пограничного слоя несжимаемой жидкости вблизи точки трехфазного контакта при переходе пограничного слоя Прандтля в слой Марангони. Исследованы свойства обобщенных решений. Библиогр. 14.

Известно [1, 2], что при описании движения жидкости с большими числами Рейнольдса вблизи границ области течения можно выделять пограничные слои Прандтля вблизи твердых стенок и слои Марангони вблизи свободных границ. Разрешимость краевых задач для стационарного пограничного слоя Прандтля исследовалась при различных предположениях в работах [3–7], а для пограничного слоя Марангони — в работах [8, 9]. Может быть так, что область движения имеет твердую и свободную границы, пересекающиеся под некоторым углом. Задача о прохождении пограничного слоя через точку контакта до настоящего времени не рассматривалась.

В данной работе показано, что эта задача сводится к решению классического уравнения Мизеса теории пограничного слоя с граничными условиями переменного типа: первого рода на одном участке границы и второго — на другом. Кроме смены типа граничных условий рассматриваемая задача имеет и другие особенности: точку остановки внешнего потока, с которым сопрягается пограничный слой, и разрыв продольного градиента гидродинамического давления. Доказана теорема существования обобщенного решения задачи перехода «слой Прандтля — слой Марангони», изучены свойства решений.

§ 1. Постановка задачи и определения

Пусть область движения занимает в декартовой системе координат (x, y) угловой сектор $\gamma > \operatorname{arctg} y/x > 0$, причем линия $\{\operatorname{arctg} y/x = \gamma\}$ — твердая стенка, а $\{y = 0\}$ — свободная граница. Если u, v — компоненты вектора скорости в декартовых координатах, то кинематические и динамические условия на границах имеют вид

$$u|_{\operatorname{arctg}(y/x)=\gamma} = v|_{\operatorname{arctg}(y/x)=\gamma} = 0, \quad \varrho\nu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \hat{f}(x), \quad v|_{y=0} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь ϱ, ν — материальные константы жидкости, а $\hat{f}$ — заданное касательное напряжение на свободной границе. Пусть ξ, η — произвольная система криволинейных ортогональных координат, а v_ξ, v_η — компоненты вектора скорости в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00818).

этой системе. Тогда уравнения Навье — Стокса имеют вид [1]

$$\frac{v_\xi}{H_\xi}\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi}+\frac{v_\eta}{H_\eta}\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta}+\frac{v_\eta}{H_\xi H_\eta}\left(v_\xi\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}-v_\eta\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi}\right)=-\frac{1}{\varrho H_\xi}\frac{\partial p}{\partial \xi}+\nu\left[\frac{1}{H_\xi^2}\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \xi^2}+\frac{1}{H_\eta^2}\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta^2}\right.$$
$$+\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial(H_\eta/H_\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi}+\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial(H_\xi/H_\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta}+\frac{2}{H_\xi^2 H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}-\frac{2}{H_\xi H_\eta^2}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi}\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}$$
$$+\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi}\right)v_\xi+\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}\right)v_\xi+\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}\right)v_\eta$$
$$\left.-\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi}\right)v_\eta\right], \quad (1.2)$$

$$\frac{v_\xi}{H_\xi}\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}+\frac{v_\eta}{H_\eta}\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}-\frac{v_\xi}{H_\xi H_\eta}\left(v_\xi\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}-v_\eta\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi}\right)=-\frac{1}{\varrho H_\eta}\frac{\partial p}{\partial \eta}+\nu\left[\frac{1}{H_\xi^2}\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \xi^2}+\frac{1}{H_\eta^2}\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta^2}\right.$$
$$\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial(H_\eta/H_\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}+\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial(H_\xi/H_\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}-\frac{2}{H_\xi^2 H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}+\frac{2}{H_\xi H_\eta^2}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi}\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta}$$
$$+\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi}\right)v_\eta+\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}\right)v_\eta-\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}\right)v_\xi$$
$$\left.+\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi}\right)v_\xi\right], \quad (1.3)$$

$$H_\eta\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi}+H_\xi\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}+v_\xi\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi}+v_\eta\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}=0 \quad (1.4)$$

(H_ξ, H_η — коэффициенты Ламе соответствующих координат).

Зададим систему координат ξ, η равенствами

$$\xi^2+\eta^2=(x^2+y^2)^{\pi/\gamma}, \quad \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}=\pi\gamma^{-1}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Тогда

$$\xi d\xi+\eta d\eta=\pi\gamma^{-1}(xdx+ydy)(x^2+y^2)^{(\pi-\gamma)/\gamma}, \quad \frac{-\eta\,d\xi+\xi\,d\eta}{\xi^2+\eta^2}=\pi\gamma^{-1}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Возведя последние равенства в квадрат и сложив полученные выражения, имеем

$$dx^2+dy^2=\gamma^2\frac{d\xi^2+d\eta^2}{\pi^2(\xi^2+\eta^2)^{(\pi-\gamma)/\pi}},$$

откуда $H_\xi=H_\eta=\gamma/\pi(\xi^2+\eta^2)^{(\pi-\gamma)/2\pi}$. Заметим еще, что такая замена переменных осуществляет конформное отображение углового сектора $\gamma>\arg z>0$ плоскости $z=x+iy$ на полуплоскость $\eta>0$ плоскости $\xi+i\eta$, поэтому криволинейные координаты (ξ,η) ортогональны.

Рассмотрим порядки величин в данной задаче. Введем обозначения: V — порядок скорости, l — характерный размер области, δ — толщина слоя больших градиентов скорости у границ области движения при удалении от них (пограничного слоя), F — порядок $\hat{f}(x)$. Пусть происходит движение жидкости с большими числами Рейнольдса $\mathrm{Re}=Vl/\nu$. Тогда согласно гипотезе Прандтля [1] вблизи границ области имеет место порядковое соотношение $\delta=l/\sqrt{\mathrm{Re}}$. Выделим асимптотическую форму уравнений (1.2)–(1.4), полагая $v_\xi\sim V$, $v_\eta\sim\delta V/l$,

$\xi \sim l^{(\pi-\gamma)/\pi}$, $\eta \sim \delta l^{-\gamma/\pi}$. Тогда $H_\xi \sim H_\eta \sim 1/l^{(\pi-\gamma)/\pi}$. Сохраняя члены старшего относительно δ/l порядка, получаем аналог системы уравнений Прандтля для описания течения вблизи точки контакта:

$$v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + v_\eta \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\pi\nu}{\gamma}|\xi|^{(\pi-\gamma)/\pi}\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - \frac{\pi-\gamma}{\pi}\frac{v_\xi}{\xi} = 0. \tag{1.6}$$

В силу первого из уравнений (1.6) можно считать, что $p = p(\xi)$, и ввести $U(\xi)$ — скорость внешнего (потенциального) движения на границах области. При этом случай $\xi < 0$ соответствует границе $\{\operatorname{arctg} y/x = \gamma\}$, а $\xi > 0$ — границе $\{y = 0\}$. Второе из уравнений (1.6) позволяет ввести функцию тока s так, что

$$v_\xi = |\xi|^{(\pi-\gamma)/\pi}\frac{\partial s}{\partial \eta}, \quad v_\eta = -|\xi|^{(\pi-\gamma)/\pi}\frac{\partial s}{\partial \xi}.$$

Переходя к переменным Мизеса ξ, s, $w = v_\xi^2$, получаем уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{2}{\varrho}\frac{dp}{d\xi} + \frac{\pi\nu\sqrt{w}}{\gamma|\xi|^{(\pi-\gamma)/\pi}}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2},$$

которое заменой

$$t = \int\limits_{\xi_o}^{\xi} \frac{\pi}{\gamma|\xi|^{(\pi-\gamma)/\pi}}\,d\xi$$

приводится к классическому уравнению Мизеса теории пограничного слоя

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu\sqrt{w}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + w'_\infty(t), \tag{1.7}$$

рассматриваемому в области $t > 0$, $s > 0$. Здесь $w_\infty = U^2$, а граничные условия с учетом (1.1) задаются в виде

$$w|_{t=0} = w_0(s), \quad w|_{s=0,t\le t_*} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial s}\bigg|_{s=0,t>t_*} = f(t). \tag{1.8}$$

Здесь точка смены типа граничных условий $t = t_*$ соответствует точке контакта, а функция f представляет собой преобразованную к новым переменным функцию $\hat{f}$.

Задача (1.7), (1.8) является задачей перехода пограничного слоя Прандтля в слой Марангони. Ясно, что можно рассматривать также и задачу перехода «слой Марангони — слой Прандтля». При этом граничные условия примут вид

$$w|_{t=0} = w_0(s), \quad \frac{\partial w}{\partial s}\bigg|_{s=0,t<t_*} = f(t), \quad w|_{s=0,t\ge t_*} = 0. \tag{1.8$'$}$$

Задачи такого типа для уравнения Мизеса раньше не рассматривались.

Проведенные выше построения корректны при $\gamma \ge \gamma_0 > 0$, где γ_0 таково, что множитель π/γ_0 имеет первый порядок и не влияет на асимптотическую величину членов уравнений после замены переменных.

Следует отметить, что задачи (1.7), (1.8) и (1.7), (1.8$'$) математически весьма различны. Рассмотрим задачу (1.7), (1.8). Кроме смены типа граничных условий при $t = t_*$ у этой задачи имеются и другие особенности, обусловленные ее физическим смыслом. В угловой точке внешнее (потенциальное) течение должно иметь точку остановки, т. е. $w_\infty(t_*) = 0$. Следовательно, выше (по току) точки остановки при $t < t_*$ должно происходить торможение жидкости ($w'_\infty < 0$), а ниже нее — разгон. После прохождения угловой точки внешнее течение может быть достаточно произвольным, но не должно иметь противотоков. Кроме того, функция w'_∞ может иметь в точке $t = t_*$ разрыв 1-го рода. Более того, в наиболее интересных для приложений случаях, когда причиной движения является термокапиллярный эффект (например, при бестигельной зонной плавке в условиях невесомости), разрыв бывает практически всегда. Таким образом, относительно w_∞ предполагаем, что

$$-k_1 \le w'_\infty(t) \le -k_2 \text{ при } t < t_*, \quad w_\infty(t_*) = 0, \quad w_\infty(t) > 0 \text{ при } t > t_*, \tag{1.9}$$

и пусть $w'_\infty(t)$ может менять знак лишь конечное число раз. Здесь $k_1, k_2 = \mathrm{const} > 0$. Ясно, что существование у задачи (1.7), (1.8) классического решения можно ожидать только в весьма узком классе задаваемых величин. Здесь имеется еще одна трудность. В работе [10] показано, что если $w'_\infty < 0$, то всегда имеется класс начальных профилей $w_0(s)$ такой, что пограничный слой Прандтля не может быть продлен вплоть до точки остановки внешнего потока. Задача (1.7), (1.8) на участке $t \in (0, t_*)$ совпадает с задачей продолжения слоя Прандтля до точки остановки, поэтому существование решения у нее будет только с начальными профилями $w_0(s)$ некоторого специального вида.

Определение 1. Будем говорить, что функция g *принадлежит классу* $K_{q,p}$, если $g \in C^2(0,\infty)$, $g(0) = 0$, $g(z) \ge Nz^\alpha$ при $z \in (0,\delta)$, где $\alpha \in (1,2)$, $N, \delta = \mathrm{const} > 0$; $g(z) \to 1$ при $z \to \infty$ и при любом $z > 0$ для любого $m \in [q,p]$ справедливо неравенство

$$\sqrt{g}g'' + m(g - 1 - 3zg'/4) \ge 0. \tag{1.10}$$

Утверждение. *Для любых* $p > q > 0$ *класс функций* $K_{q,p}$ *непуст.*

Доказательство. Построим пример функции из этого класса. Пусть $z_1 > 0$. На интервале $(0, z_1)$ положим $g(z) = l(z/z_1)^{4/3}$. Если $l \ge \left(9pz_1^2/4\right)^{2/3}$, то неравенство (1.10) выполнено и

$$g(z_1) = l, \quad g'(z_1) = \frac{4l}{3z_1}, \quad g''(z_1) = \frac{4l}{9z_1^2}. \tag{1.11}$$

На интервале $(z_1, 4z_1)$ пусть $g = d^2(z)$, где

$$d(z) = \sqrt{l} + \frac{2\sqrt{l}}{3z_1}(z - z_1) - \frac{\sqrt{l}}{9z_1^2}(z - z_1)^2.$$

Тогда для g в точке $z = z_1$ будут также верны равенства (1.11). Поскольку $d(z)$ возрастает при $z \in (z_1, 4z_1)$, для таких z имеем $d(z) > \sqrt{l}$. Отсюда неравенство (1.10) будет выполнено, если справедливо неравенство

$$2dd'' + 2(d')^2 + m(d - 1/\sqrt{l} - 3zd'/2) \ge 0,$$

которое получается делением (1.10) на d и заменой величины $-1/d$ на $-1/\sqrt{l}$. При подстановке d в последнее неравенство оно превращается в неравенство для квадратного трехчлена вида

$$(3 + m_1/2)J^2 - 6J + 1 - m_1/4l \ge 0,$$

где обозначено $J = (z - z_1)/3z_1$, $m_1 = 9z_1^2 m/\sqrt{l}$. Это неравенство должно быть выполнено при $J \in (0,1)$ и любом $m_1 \in \left[9z_1^2 q/\sqrt{l}, 9z_1^2 p/\sqrt{l}\right]$. Ясно, что оно верно, если справедливо неравенство

$$\left(3 + \frac{9z_1^2 q}{2\sqrt{l}}\right) J^2 - 6J + 1 - \frac{9z_1^2 p}{4l^{3/2}} \ge 0.$$

Но можно положить $l = 2(9pz_1^2/4)^{2/3}$, при этом последнее неравенство выполняется, если верно неравенство

$$\left(3 + \frac{9z_1^2 q}{2\sqrt{2}(9z_1^2 p/4)^{1/3}}\right) J^2 - 6J + \frac{1}{2} \ge 0,$$

которое становится справедливым при увеличении z_1.

Таким образом, g определена на интервале $(0, 4z_1)$; при этом

$$d(4z_1) = 2\sqrt{l}, \quad d'(4z_1) = 0, \quad d''(4z_1) = -2\sqrt{l}/9z_1^2. \tag{1.12}$$

Наконец, на интервале $(4z_1, \infty)$ положим $g = d^2(z)$, где

$$d(z) = 1 + \frac{2\sqrt{l} - 1}{\operatorname{ch}^2[\alpha(z - 4z_1)]}, \quad \alpha^2 = \frac{\sqrt{l}}{9z_1^2(2\sqrt{l} - 1)}. \tag{1.13}$$

Так определенная функция d удовлетворяет при $z = 4z_1$ равенствам (1.12). Кроме того, она убывает при $z > 4z_1$ и $d(z) > 1$. Тогда неравенство (1.10) будет выполнено, если $d(z)$ удовлетворяет неравенству

$$2dd'' + q(d - 1) \ge 0, \tag{1.14}$$

которое получается из (1.10) делением на d, отбрасыванием неотрицательных величин $-3zd'/2$, $2(d')^2$ и заменой величины $m(d - 1/d)$ на $q(d - 1)$. После подстановки d в неравенство (1.14) оно превращается в неравенство для квадратного трехчлена относительно $J = 1/\operatorname{ch}^2[\alpha(z - 4z_1)]$ вида

$$-6\alpha^2(2\sqrt{l} - 1)J^2 + 4\alpha^2(2\sqrt{l} - 4)J + 8\alpha^2 + q \ge 0,$$

которое должно выполняться при $J \in (0,1)$. Но из определения α в (1.12) видно, что увеличением z_1 можно сделать α как угодно малой, тем самым это неравенство выполнено при больших z_1. Таким образом, функция g построена на всем интервале $(0, \infty)$. Утверждение доказано.

Определение 2. Неотрицательную непрерывную и ограниченную в области $D = \{(t,s) \in (0,a) \times (0,\infty)\}$, $a > 0$, $t_* \in (0,a)$, функцию $w(t,s)$ будем называть *обобщенным решением задачи* (1.7), (1.8), если в D существует ограниченная обобщенная производная $\partial w/\partial s$, $\lim\limits_{s\to 0} w(t,s) = 0$ при $t < t_*$ и для любой гладкой в D функции $\varphi(t,s)$, равной нулю при $t = a$, при $s = 0$, $t \le t_*$ и вне некоторой конечной области, выполняется тождество

$$\iint\limits_D \left[\frac{\nu}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\sqrt{w} - \frac{\varphi w'_\infty}{2\sqrt{w}}\right] dt\,ds$$
$$= \int\limits_0^\infty \sqrt{w_0(s)}\,\varphi(0,s)\,ds - \int\limits_{t_*}^a \frac{\nu}{2}\varphi(t,0)f(t)\,dt. \tag{1.15}$$

Очевидно, что классическое положительное решение будет также и обобщенным.

§ 2. Существование обобщенного решения

Теорема 1. *Пусть $w_\infty(t)$ — неотрицательная непрерывная на $(0,a)$ функция, гладкая на каждом из интервалов $(0,t_*)$, (t_*,a) и удовлетворяющая условиям (1.9); функция $f \in C^0(t_*,a)$ ограничена и $f(t) < 0$. Кроме того, пусть функция w_0 дважды непрерывно дифференцируема и ограничена вместе со своей первой производной и величиной $\sqrt{w_0}w_0''$, $w_0(0) = 0$, $w_0(s) \to w_\infty(0)$ при $s \to \infty$ и $w_0(s) > w_\infty(0)h(s)$, где $h \in K_{q,p}$ с постоянными $q = k_2/\nu[w_\infty(0)]^{3/2}$, $p = k_1/\nu[w_\infty(0)]^{3/2}$. Тогда в области D существует обобщенное решение задачи (1.7), (1.8).*

Доказательство. Применим метод сглаживания (см., например, [11]). Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Рассмотрим уравнение (1.7) в областях D_1, D_2, D_3 последовательно, где

$$D_1 = \{(t,s) \in (0,t_*) \times (0,1/\varepsilon)\}, \quad D_2 = \{(t,s) \in (t_*, t_* + \varepsilon^3) \times (0,1/\varepsilon)\},$$

$$D_3 = \{(t,s) \in (t_* + \varepsilon^3, a) \times (0,1/\varepsilon)\}.$$

Определим сглаживающую функцию $\lambda(t)$ следующим образом: $\lambda(t) = w_\infty'(t)$ при $t \in (0,t_*)$, $\lambda(t)$ — гладкая и ограниченная функция и $\lambda(t) = w_\infty'(t)$ при $t \in (t_* + \varepsilon^3, a)$. В области $D_\varepsilon = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ рассмотрим семейство $\{w_\varepsilon(t,s), \varepsilon > 0\}$ решений уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu\sqrt{w}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \widehat{w}_\infty'(t), \tag{2.1}$$

где

$$\widehat{w}_\infty(t) = \varepsilon + w_\infty(0) + \int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau.$$

При этом функция $\widehat{w}_\infty'(t)$ будет гладкой и положительной на всем интервале $(0,a)$. На границе $\partial D_1 = \{t = 0;\ s = 0;\ s = 1/\varepsilon\}$ области D_1 поставим для уравнения (2.1) условия вида

$$w_\varepsilon|_{t=0} = kw_0((s+\varepsilon)/k^{3/4}), \quad w_\varepsilon|_{s=0} = b_1(t), \quad w_\varepsilon|_{s=1/\varepsilon} = b_2(t). \tag{2.2}$$

Здесь $k = [w_\infty(0) + \varepsilon]/w_\infty(0)$, функция b_1 определена следующим образом:

$$b_1(0) = kw_0(\varepsilon/k^{3/4}), \quad b_1'(0) = \nu\sqrt{w_0(\varepsilon/k^{3/4})}w_0''(\varepsilon/k^{3/4}) + \widehat{w}_\infty'(0),$$

$$b_1(t) \geq \widehat{w}_\infty(t)h(\varepsilon[w_\infty(0)/\widehat{w}_\infty(t)]^{3/4})$$

и при этом $b_1(t) \leq \mu\varepsilon$, $\mu > 0$. Функция b_2 определяется аналогично:

$$b_2(0) = kw_0((\varepsilon + 1/\varepsilon)/k^{3/4}),$$

$$b_2'(0) = \nu\sqrt{w_0((\varepsilon + 1/\varepsilon)/k^{3/4})}w_0''((\varepsilon + 1/\varepsilon)/k^{3/4}) + \widehat{w}_\infty'(0),$$

$b_2(t)$ — ограниченная функция и

$$b_2(t) \geq \widehat{w}_\infty(t)h((\varepsilon + 1/\varepsilon)[w_\infty(0)/\widehat{w}_\infty(t)]^{3/4}).$$

Ясно, что такие функции построить можно, ибо по условию теоремы $kw_0(b) > \widehat{w}_\infty(0)h(b)$ $\forall b > 0$.

Предполагая существование в D_1 положительного решения задачи (2.1), (2.2), установим некоторые его априорные свойства.

Лемма 1. *В области D_1 имеют место оценки*

$$b_1(t) + F(s)e^{mt} \geq w_\varepsilon(t,s) \geq \widehat{w}_\infty(t) h\biggl(\frac{(s+\varepsilon)[w_\infty(0)]^{3/4}}{[\widehat{w}_\infty(t)]^{3/4}}\biggr), \tag{2.3}$$

где F принадлежит $C^2(0,\infty)$ и ограничена, причем $F(s) = A(2s - s^{3/2})$ при $s \in (0,1)$; $F(s) \geq A$ и $F''(s) \leq 0$ при $s \geq 1$. Здесь постоянные A, m положительны и достаточно велики.

Доказательство. Обозначим функцию, стоящую в правой части оценки снизу (2.3) через $B(t,s)$, а функцию в левой части оценки сверху — через $G(t,s)$. Докажем сначала нижнюю оценку. Из определения функций b_1, b_2 и свойств функции w_0 следует, что она справедлива при $(t,s) \in \partial D_1$. Кроме того, если оператор L задается равенством

$$L(j) = \nu\sqrt{j}\frac{\partial^2 j}{\partial s^2} - \frac{\partial j}{\partial t},$$

то

$$L(B) = \nu[w_\infty(0)]^{3/2}\sqrt{h(\zeta)}h''(\zeta) - \widehat{w}'_\infty(t)\biggl[h(\zeta) - \frac{3}{4}\zeta h'(\zeta)\biggr], \quad \zeta = \frac{(s+\varepsilon)[w_\infty(0)]^{3/4}}{[\widehat{w}_\infty(t)]^{3/4}},$$

поэтому $L(B) + \widehat{w}'_\infty(t) \geq 0$, так как здесь $k_1 \geq -\widehat{w}'_\infty(t) \geq k_2$, а функция h из класса $K_{q,p}$. Но тогда $L(w_\varepsilon) - L(B) = L_1(w_\varepsilon - B) \leq 0$, где L_1 — линейный оператор. На основании принципа максимума заключаем, что функция $w_\varepsilon - B$ не имеет внутри D_1 отрицательных минимумов и тем самым нижняя из оценок (2.3) верна во всей области D_1. Для доказательства оценки сверху достаточно заметить, что при достаточно больших A, m она справедлива на ∂D_1 и $L(G) + \widehat{w}'_\infty(t) \leq 0$ в D_1. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 следует, что в области D_1 будет $\mu_\varepsilon \leq w_\varepsilon(t,s) \leq W$, где $\mu_\varepsilon = \inf\limits_{t,s} B(t,s)$, $W = \sup\limits_{t,s,\varepsilon} G(t,s)$. Поэтому в уравнении (2.1) можно изменить коэффициент при $\partial^2 w/\partial s^2$ так, чтобы он стал гладкой функцией, большей чем $\mu_\varepsilon/2$ при $w < \mu_\varepsilon$, и гладкой ограниченной функцией при $w > W$. Но тогда по известным теоремам существования (см., например, [12]) эта измененная задача имеет в D_1 решение $w_\varepsilon(t,s)$ такое, что w_ε, $\partial w_\varepsilon/\partial t$, $\partial w_\varepsilon/\partial s$, $\partial^2 w_\varepsilon/\partial s^2$ удовлетворяют в замкнутой области $\overline{D_1}$ условию Гёльдера. Кроме того, так как $\sqrt{w_\varepsilon}$ имеет первую производную по t, вторую по s и эти производные удовлетворяют условию Гёльдера, то, если рассматривать (2.1) как линейное уравнение, из [13, теорема 6] следует возможность дифференцировать (2.1) один раз по t и два раза по s. В силу (2.3) полученное решение совпадает с решением исходной задачи (2.1), (2.2).

Далее всюду через M_i, $i = 1, 2, \dots$, будем обозначать некоторые постоянные, не зависящие от ε. Докажем, что в области D_1 имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s}\right| \leq M_2. \tag{2.4}$$

Продифференцировав (2.1) по s и обозначив $q_\varepsilon(t,s) = \partial w_\varepsilon(t,s)/\partial s$, получим для функции q_ε уравнение

$$\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial t} = \nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial s^2} + \frac{\nu q_\varepsilon}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial s}, \tag{2.5}$$

которое является равномерно параболическим в области D_1 и однородным, поэтому свои наибольшее и наименьшее значения q_ε принимает на ∂D_1. Но при $t=0$ (2.4) справедливо в силу свойств функции w_0. При $s=0$ из оценки сверху (2.3) следует равномерная ограниченность q_ε сверху. Оценка снизу получается из неравенства

$$w_\varepsilon(t,s) \geq b_1(t) - M_2(s - s^{2-\alpha/2}), \tag{2.6}$$

справедливость которого докажем при $0 < s < \varepsilon$ (α — показатель степени из определения 1). Очевидно, что при $t=0$, при $s=0$ и при $s=\varepsilon$ неравенство (2.6) выполнено. Обозначив $Q = w_\varepsilon(t,s) - b_1(t) + M_2(s - s^{2-\alpha/2})$, получаем, что в силу (2.1) функция Q удовлетворяет уравнению

$$\nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} - \frac{\partial Q}{\partial t} = -\widehat{w}'_\infty(t) + b'_1(t) - M_2\nu(2-\alpha/2)(1-\alpha/2)\frac{\sqrt{w_\varepsilon}}{\sqrt{s^\alpha}} \leq 0. \tag{2.7}$$

Так как $w_\varepsilon \geq \mu_\varepsilon \geq h(m_0\varepsilon) \geq C\varepsilon^\alpha$, $C, m_0 = \mathrm{const} > 0$, правая часть (2.7) неположительна. Поэтому из принципа максимума следует справедливость оценки (2.6) и из нее — ограниченность q_ε снизу при $s=0$. Оценка q_ε при $s=1/\varepsilon$ проводится вполне аналогично (и даже проще) с использованием неравенств (2.3). Поэтому (2.4) справедливо во всей области D_1.

Рассмотрим далее уравнение (2.1) в области D_2, поставив на границе $\partial D_2 = \{t=t_*, s=0, s=1/\varepsilon\}$ условия

$$w_\varepsilon|_{t=t_*} = w_1(s), \quad \left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s}\right|_{s=0} = f_1(t), \quad \left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s}\right|_{s=1/\varepsilon} = f_2(t), \tag{2.8}$$

где $w_1(s) = \lim\limits_{t\to t_*,\, t\in D_1} w_\varepsilon(t,s)$, f_1, f_2 принадлежат $C^0(t_*, t_*+\varepsilon^3)$ и ограничены, причем

$$f_1(t_*) = w'_1(0), \quad f_1(t_*+\varepsilon^3) = f(t_*+\varepsilon^3), \quad f_2(t_*) = w'_1(1/\varepsilon), \quad f_2(t_*+\varepsilon^3) = 0.$$

Если было бы $f_1(t_*) \leq 0$, то получение оценок для функции w_ε в области $D_2 \cup D_3$ можно было провести аналогично тому, как это сделано в работах [8, 9]. Но из свойств функции w_ε в области D_1 следует лишь ограниченность $f_1(t_*)$, поэтому необходимо проводить дополнительные оценки в области D_2. Заметим еще, что так как $\widehat{w}_\infty(t_*) = \varepsilon$, то $\inf\limits_s w_1(s) \geq \inf\limits_s B(t_*, s) = \mu_1\varepsilon$, $\mu_1 > 0$.

Лемма 2. *В области D_2 имеют место оценки*

$$M_3F_2(s) + M_3^4e^t \geq w_\varepsilon(t,s) \geq \widehat{w}_\infty(t) - \varepsilon + (1 - M_3(t-t_*)/\varepsilon^2)F_1(s), \tag{2.9}$$

где

$$F_1(s) = \begin{cases} \mu_1\varepsilon + (s-\beta)^3/6\beta\varepsilon^{3/2}, & s\in(0,\beta), \\ \mu_1\varepsilon, & s\in(\beta, 1/\varepsilon-\beta), \qquad \beta = \sqrt{3\mu_1}\varepsilon^{5/4}, \\ \mu_1\varepsilon + (1/\varepsilon-\beta-s)^3/6\beta\varepsilon^{3/2}, & s\in(1/\varepsilon-\beta, 1/\varepsilon), \end{cases}$$

$$F_2(s) = \begin{cases} 1 + (1-s)^3, & s\in(0,1), \\ 1, & s\in(1/\varepsilon-1), \\ {}_1 + (s-1/\varepsilon+1)^3, & s\in(1/\varepsilon-1, 1/\varepsilon). \end{cases}$$

Доказательство. Докажем сначала оценку снизу. Заметим, что $\mu_1\varepsilon \geq F_1 \geq \mu_1\varepsilon/2$, $F'' \geq -1/\varepsilon^{3/2}$. По построению оценки (2.9) выполняются при $t=t_*$. Правую часть оценки снизу обозначим через Q_1. Тогда

$$L(Q_1) + \widehat{w}'_\infty(t) = \nu\sqrt{Q_1}(1 - M_3(t-t_*)/\varepsilon^2)F''_1(s) + \frac{M_3F_1(s)}{\varepsilon^2} \geq 0,$$

ибо здесь $\widehat{w}'_\infty(t) = \varepsilon + O(\varepsilon^3)$, $(2+\mu_1)\varepsilon \ge Q_1 \ge (1/2+\mu_1)\varepsilon$, $M_3(t-t_*)/\varepsilon^2 = O(\varepsilon)$, а постоянную M_3 можно взять как угодно большой. Поэтому $L_1(w_\varepsilon - Q_1) \le 0$ и из принципа максимума функция $w_\varepsilon - Q_1$ не достигает своего наименьшего отрицательного значения внутри D_2. Но она не достигает его ни при $s=0$, ни при $s = 1/\varepsilon$, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial s}(w_\varepsilon - Q_1)\big|_{s=0} = f_1(t) - \frac{\sqrt{3\mu_1}}{2\varepsilon^{1/4}}(1 - M_3(t-t_*)t/\varepsilon^2) < 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(w_\varepsilon - Q_1)\big|_{s=1/\varepsilon} = f_2(t) + \frac{\sqrt{3\mu_1}}{2\varepsilon^{1/4}}(1 - M_3(t-t_*)/\varepsilon^2) > 0.$$

Тем самым $w_\varepsilon - Q_1$ неотрицательна в D_2.

Докажем теперь оценку сверху. Обозначив ее левую часть через Q_2, видим, что Q_2 удовлетворяет в D_2 при достаточно больших M_3 неравенству

$$L(Q_2) + \widehat{w}'_\infty(t) = \nu\sqrt{Q_2}M_3F''_2 - M_3^4e^t + \widehat{w}'_\infty(t) \le 0,$$

так как $\sqrt{Q_2}M_3F''_2 = O(M_3^3)$. Поэтому $L_1(Q_2 - w_\varepsilon) \le 0$ и $Q_2 - w_\varepsilon$ не достигает своего наименьшего отрицательного значения внутри D_2, а также при $(t,s) \in \partial D_2$, что проверяется аналогично тому, как это сделано для функции $w_\varepsilon - Q_1$. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 и теорем существования [12] следует, что в области D_2 существует положительное решение с такими же дифференциальными свойствами, как и в D_1. В D_2 остается справедливой оценка (2.4) с достаточно большой постоянной M_2, поскольку $\partial w_\varepsilon/\partial s$ равномерно ограничена на ∂D_2.

Рассмотрим уравнение (2.1) в области D_3, поставив на $\partial D_3 = \{t = t_* + \varepsilon^3,\ s=0,\ s=1/\varepsilon\}$ граничные условия

$$w_\varepsilon|_{t=t_*+\varepsilon^3} = w_2(s), \quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s}\bigg|_{s=0} = f(t), \quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s}\bigg|_{s=1/\varepsilon} = 0, \quad w_2(s) = \lim_{t \nearrow t_*+\varepsilon^3} w_\varepsilon(t,s). \tag{2.10}$$

Установим для задачи (2.1), (2.10) априорные оценки, предполагая существование у нее в D_3 положительного решения. Заметим еще, что

$$\inf_s w_2(s) \ge \inf_s Q_1(t_* + \varepsilon^3, s) = \mu_2\varepsilon, \quad \mu_2 > 0.$$

Лемма 3. *В области D_3 имеют место оценки*

$$M_3F_2(s) + M_3^4e^t \ge w_\varepsilon(t,s) \ge \widehat{w}_\infty(t) - \widehat{w}_\infty(t_*+\varepsilon^3) + F_3(s)e^{-m_2t} \tag{2.11}$$

и остается справедливой оценка (2.4) *с достаточно большой постоянной M_2. Здесь $F_3(s) = \mu_2\varepsilon$ при $s \in (0, 1/\varepsilon - 1)$, $F_3(s) = \mu_2\varepsilon - \varepsilon^4(s - 1/\varepsilon + 1)^3$ при $s \in (1/\varepsilon - 1, 1/\varepsilon)$, а функция F_2 определена в формулировке леммы* 2.

Доказательство. Оценка сверху (2.11) доказывается так же, как и аналогичная оценка (2.9) леммы 2. Докажем оценку снизу. По построению она верна при $t = t_* + \varepsilon^3$. Обозначив ее правую часть через Q_3, видим, что

$$L(Q_3) + \widehat{w}'_\infty(t) = \{\nu\sqrt{Q_3}F''_3 + m_2F_3\}e^{-m_2t} \ge 0$$

при достаточно больших m_2, поскольку $Q_3 = O(1)$, $F''_3 = O(\varepsilon)$ и $F_3 \ge \mu_2\varepsilon$. Поэтому $L_1(w_\varepsilon - Q_3) \le 0$ и функция $w_\varepsilon - Q_3$ не достигает в D_3 своего наименьшего отрицательного значения. Но она не достигает его и на ∂D_3, так как

$$\frac{\partial}{\partial s}(w_\varepsilon - Q_3)\big|_{s=0} = f(t) < 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}(w_\varepsilon - Q_1)\big|_{s=1/\varepsilon} = 6\varepsilon^4 > 0,$$

тем самым $w_\varepsilon - Q_3 \geq 0$.

Из (2.11) и теорем существования [12] следует существование в D_3 решения с такими же дифференциальными свойствами, что и в D_1. Оценка (2.4) следует из равномерной ограниченности $\partial w_\varepsilon/\partial s$ на ∂D_3 и возможности в силу оценок (2.11) дифференцировать (2.1) по s. Лемма 3 доказана.

Таким образом, решение уравнения (2.1) равномерно ограничено вместе с производной по s, коэффициентом при второй производной по s в уравнении и правой частью уравнения. Поэтому по теореме 4.5 из [14] для любого $\delta > 0$ в области $D_\delta = \{(t,s) \in (\delta, a) \times (\delta, 1/\delta)\}$ имеет место оценка

$$|w_\varepsilon(t_2, s) - w_\varepsilon(t_1, s)| \leq M_5|t_2 - t_1|^{1/2} \tag{2.12}$$

(M_5 может зависеть от δ, но не от ε). Из равномерной ограниченности $\partial w_\varepsilon/\partial s$ следует оценка во всей области D_ε:

$$|w_\varepsilon(t, s_2) - w_\varepsilon(t, s_1)| \leq M_2|s_2 - s_1|. \tag{2.13}$$

Оценки (2.12), (2.13) достаточны для компактности семейства $\{w_\varepsilon\}$, т. е. существует последовательность w_{ε_k}, равномерно сходящаяся при $\varepsilon_k \to 0$ к некоторой непрерывной в D функции $w(t,s)$, имеющей вследствие (2.4) ограниченную обобщенную производную $\partial w/\partial s$. Так как при малых s и $t < t_*$ будет $|w_\varepsilon(t,s) - b_1(t)| \leq M_2 s$, то $|w(t,s)| \leq M_2 s$, поэтому $\lim\limits_{s\to 0, t<t_*} w(t,s) = 0$. Умножим уравнение (2.1) на гладкую функцию $\varphi(t,s)$, равную нулю при $t = a$, при $s = 0$, $t \leq t_*$ и вне некоторого компакта, и проинтегрируем его по области D_ε. Получим тождество

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} \left[\frac{\nu}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\sqrt{w_\varepsilon} - \frac{\varphi\widehat{w}'_\infty}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\right] dtds$$
$$= \int\limits_0^\infty \sqrt{w_0(s)}\varphi(0,s)ds - \int\limits_{t_*}^{t_*+\varepsilon^3} \frac{\nu}{2}\varphi(t,0)f_1(t)dt - \int\limits_{t_*+\varepsilon^3}^{a} \frac{\nu}{2}\varphi(t,0)f(t)\,dt. \tag{2.14}$$

Покажем, что все члены этого тождества равномерно по ε ограничены. Это очевидное следствие равномерной ограниченности w_ε и $\partial w_\varepsilon/\partial s$ для членов, содержащих множители $\partial\varphi/\partial s$, $\partial\varphi/\partial t$, и для линейных интегралов в правой части (2.14). Но тогда и оставшийся интеграл будет равномерно ограничен в силу самого тождества (2.14) (это можно доказать и непосредственно, используя оценки решения снизу, полученные в леммах 1–3). Рассмотрим тождество (2.14) с такими пробными функциями φ_β, $\beta > 0$, что $\varphi_\beta(t,s) = 0$ при всех $s > 0$, $t \in (t_* - \beta, t_* + \beta)$ и при $s \in (0,\beta)$, $t < t_*$. Но из оценок снизу лемм 1, 3 (лемма 2 здесь не используется, так как область D_2 при малых ε целиком лежит внутри полоски $s > 0$, $t \in (t_* - \beta, t_* + \beta)$) и свойств функции $w_\infty(t)$ следует, что в тех точках (t,s), где $\varphi_\beta(t,s) \neq 0$, функции w_ε равномерно отделены от нуля, тем самым функции $1/\sqrt{w_\varepsilon}$ в этих точках равномерно сходятся при $\varepsilon \to 0$. Поэтому в (2.14) можно переходить к пределу в интегралах и получить выполнение тождества (1.15) для w. Но из непрерывности $\sqrt{w}$ и возможности аппроксимировать пробные функции φ из определения обобщенного решения с любой точностью (в пронстранстве L_2) функциями φ_β вытекает, что (1.15) выполняется и с любыми φ из определения 2, т. е. w — обобщенное решение. Теорема 1 доказана.

§ 3. Свойства обобщенных решений

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $w(t,s)$ — *обобщенное решение задачи* (1.7), (1.8). *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $w(t_1,s_1)>0$ *и* $t_1\neq t_*$, *то в некоторой окрестности точки* (t_1,s_1) *функция* w *является решением уравнения* (1.7) *в обычном смысле;*

2) $w(t,s)\to w_\infty(t)$ *при* $s\to\infty$ *равномерно по* $t\in(0,a)$.

Доказательство. Докажем п. 1 теоремы. Пусть $w(t_1,s_1)>0$ и $t_1\neq t_*$. Тогда существует прямоугольник S, $(t_1,s_1)\in S$, $\{t=t_*\}\cap S=\varnothing$, такой, что $w\geq\mu>0$ при $(t,s)\in S$. Если ε_k достаточно мало, то $\widehat{w}'_\infty(t)$ совпадет с $w'_\infty(t)$ при $t\in\Pi_S$, где Π_S — проекция S на ось Ot.

Так как w_{ε_k} равномерно сходятся к w, то начиная с некоторого номера k будет $w_{\varepsilon_k}\geq\mu/2$. Тогда w_{ε_k} является решением уравнения (1.7) с коэффициентом при второй производной по s, равномерно отделенными от нуля (и ограниченным сверху). Поэтому легко доказать, что на S производные функций w_{ε_k}, входящие в (1.7), равномерно ограничены, следовательно, у предельной функции w тоже существуют ограниченные производные, и она удовлетворяет (1.7) в обычном смысле. П. 1 доказан.

Для доказательства п. 2 уточним свойства решения w_ε в области D_ε.

Лемма 4. *Существует функция* $H\in C^2(0,\infty)$ *такая, что* $H(s)>w_\infty(0)$, $H(s)>w_0(s)$, $H'(0)=-1$, $H'(s)\leq 0$, $\lim\limits_{s\to\infty}H(s)=w_\infty(0)$ *и справедливо неравенство*

$$|H''(s)|\leq M_6(H(s)-w_\infty(0))\quad\forall s>0.\tag{3.1}$$

Доказательство. Так как $\lim\limits_{s\to\infty}w_0(s)=w_\infty(0)$, для любого целого $n>1$ существует $s_n>0$ такое, что $w_0(s)\leq w_\infty(0)+1/n$ при всех $s\geq s_n$. Без ограничения общности можно считать $s_{n+1}\geq s_n+1$, ибо в противном случае значение s_n+1 можно рассматривать как s_{n+1}. Получаем последовательность s_n, причем $s_n\to\infty$ при $n\to\infty$. На каждом из интервалов (s_n,s_{n+1}) определим функцию H равенством

$$H(s)=w_\infty(0)+\frac{2}{n}+\frac{1}{\pi n(n+1)}\sin\left[\frac{2\pi(s-s_n)}{s_{n+1}-s_n}\right]-\frac{2(s-s_n)}{n(n+1)(s_{n+1}-s_n)}.$$

Тогда

$$H(s_n)=w_\infty(0)+\frac{2}{n},\quad H(s_{n+1})=w_\infty(0)+\frac{2}{n+1},$$
$$H'(s_n)=H''(s_n)=H'(s_{n+1})=H''(s_{n+1})=0,$$

тем самым $H\in C^2(s_2,\infty)$. Из определения H ясно, что $\lim\limits_{s\to\infty}H(s)=w_\infty(0)$. Кроме того, на любом из интервалов (s_n,s_{n+1}) имеем

$$H(s)\geq w_\infty(0)+\frac{2}{n+1},\quad w_0(s)\leq w_\infty(0)+\frac{1}{n},$$

поэтому $H(s)>w_0(s)$. Но так как

$$H''(s)=-4\pi\frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{(s_{n+1}-s_n)^2}\sin\frac{2\pi(s-s_n)}{s_{n+1}-s_n},$$

справедливо неравенство (3.1). Функция H определена этими построениями на интервале (s_2,∞). Очевидно, что при $s\in(0,s_2)$ ее легко можно доопределить с выполнением требуемых свойств. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *В области D_ε имеет место оценка*

$$w_\varepsilon(t,s) \le \widehat{w}_\infty(t) + M_7 E(s) e^{M_8 t}. \tag{3.2}$$

Здесь

$$E(s) = \begin{cases} H(s) + \varepsilon - w_\infty(0), & s \in (0, 1/2\varepsilon), \\ H(s) + \varepsilon - w_\infty(0) + \varepsilon^2 (s - 1/2\varepsilon)^3, & s \in (1/2\varepsilon, 1/\varepsilon). \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим $Q_4 = w_\varepsilon(t,s) - \widehat{w}_\infty(t) - M_7 E(s) e^{M_8 t}$. Тогда Q_4 удовлетворяет неравенству

$$\nu \sqrt{w_\varepsilon} \frac{\partial^2 Q_4}{\partial s^2} - \frac{\partial Q_4}{\partial t} = -M_7 \{\nu \sqrt{w_\varepsilon} E''(s) - M_8 E(s)\} e^{M_8 t} \ge 0,$$

так как $E''(s) = H''(s) + O(\varepsilon)$, $E \ge \varepsilon + H(s) - w_\infty(0)$, а w_ε равномерно ограничена. Поэтому Q_4 не достигает в D_ε своего наибольшего положительного значения. Рассмотрим Q_4 на границе ∂D_ε области D_ε. Из граничных условий (2.2), (2.8), (2.10) получаем

$$Q_4|_{t=0} = k w_0(s+\varepsilon) - w_\infty(0) - \varepsilon - M_7 E(s) \le 0, \quad Q_4|_{s=0, t<t_*} \le 0,$$

$$Q_4|_{s=1/\varepsilon, t<t_*} = b_2(t) - \widehat{w}_\infty(t) - M_7 \left(\varepsilon + H(1/\varepsilon) - w_\infty(0) + \frac{1}{8\varepsilon} \right) \le 0,$$

$$\left. \frac{\partial Q_4}{\partial s} \right|_{s=0,\, t_* < t < t_* + \varepsilon^3} = f_1(t) + M_7 e^{M_8 t} > 0,$$

$$\left. \frac{\partial Q_4}{\partial s} \right|_{s=1/\varepsilon, t_* < t < t_* + \varepsilon^3} = f_2(t) - M_7 (3 + H'(1/\varepsilon)) e^{M_8 t} < 0,$$

$$\left. \frac{\partial Q_4}{\partial s} \right|_{s=0, t > t_* + \varepsilon^3} = f(t) + M_7 e^{M_8 t} > 0,$$

$$\left. \frac{\partial Q_4}{\partial s} \right|_{s=1/\varepsilon, t > t_* + \varepsilon^3} = -M_7 (3 + H'(1/\varepsilon)) e^{M_8 t} < 0.$$

Здесь использован тот факт, что $\lim\limits_{s \to \infty} H'(s) = 0$, поэтому при малых ε будет $3 + H'(1/\varepsilon) \ge 1$. Поведение Q_4 на ∂D_ε показывает, что там не достигается ее наибольшее положительное значение, тем самым $Q_4 \le 0$. Лемма 5 доказана.

Из лемм 1–3, 5 следует, что предельная функция w при любых $(t,s) \in D_a$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} M_7 e^{M_8 t} (H(s) - w_\infty(0)) &\ge w(t,s) - w_\infty(t) \\ &\ge w_\infty(t) [h(s [w_\infty(0)/w_\infty(t)]^{3/4}) - 1] \text{ при } t < t_*, \end{aligned}$$

$$M_7 e^{M_8 t} (H(s) - w_\infty(0)) \ge w(t,s) - w_\infty(t) \ge 0 \text{ при } t > t_*.$$

Так как $H(s) \to w_\infty(0)$ и $h(s) \to 1$ при $s \to \infty$, из этих неравенств вытекает выполнение п. 2 теоремы 2, что завершает ее доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: ГИТТЛ, 1948. Ч. II.

2. *Napolitano L. G.* Marangoni boundary layers // Proc. of 3rd European symp. on material sciences in Space. Grenoble, 1979. P. 349–358.

3. *Олейник О. А.* О системе уравнений теории пограничного слоя // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 3. С. 489–507.

4. *Хуснутдинова Н. В.* Об условиях существования безотрывного пограничного слоя при возрастающем давлении // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253, № 5. С. 1095–1099.

5. *Кузнецов В. В.* Об условиях разрешимости краевой задачи для пограничного слоя Прандтля // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 624–629.

6. *Джураев Т. Д.* О системе уравнений теории пограничного слоя для стационарного течения несжимаемой жидкости // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 11. С. 2068–2083.

7. *Walter W.* Existence and convergence theorems for the boundary layer equations based on the line method // Arch. Rational Mech. Anal. 1970. V. 39, N 3. P. 169–188.

8. *Кузнецов В. В.* О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1984. Вып. 67. С. 68–75.

9. *Кузнецов В. В.* О развитии пограничного слоя Марангони из точки торможения // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 820–826.

10. *Хуснутдинова Н. В.* Отрывные течения в пограничном слое // Докл. РАН. 1998. Т. 359, № 3. С. 334–336.

11. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-Линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 5. С. 667–704.

12. *Олейник О. А., Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 5. С. 116–155.

13. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, № 3. С. 3–146.

14. *Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1979. № 5. С. 217–272.

Статья поступила 20 августа 1998 г.,
окончательный вариант — 21 января 1999 г.

г. Новосибирск