Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 510.64

О ФРАГМЕНТЕ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ, ПОЛНОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ШКАЛ КРИПКЕ С КОНЕЧНЫМИ ОБЛАСТЯМИ

П. А. Шрайнер

Аннотация: Доказано, что фрагмент интуиционистской логики конечных областей, состоящий из формул первого порядка, не содержащих дизъюнкции и квантора существования, совпадает с аналогичным фрагментом интуиционистской логики предикатов. Показано также наличие ослабленного варианта интерполяционного свойства и свойства Бета у этого фрагмента. Библиогр. 6.

Известно, что ни классическая, ни интуиционистская логики предикатов не являются полными относительно шкал Крипке с конечными предметными областями. Более того, при переходе к моделям с конечными предметными областями эти логики теряют многие «хорошие» свойства такие, например, как интерполяционное свойство и свойство определимости по Бету (см., например, [1, 2]).

Заметим, что многие приложения логики такие, например, как Пролог или реляционные языки запросов баз данных, имеют дело с конечными структурами.

В данной работе доказано, что фрагмент интуиционистской логики предикатов без дизъюнкции и квантора существования полон относительно шкал Крипке с конечными предметными областями, показано также наличие ослабленного варианта интерполяционного свойства и свойства Бета у этого фрагмента.

Можно отметить, что данный результат заведомо не может быть перенесен на случай классической логики предикатов, так как фрагмент классической логики предикатов в языке без дизъюнкции и квантора существования эквивалентен классической логике в полном языке, в которой дизъюнкция и квантор существования выразимы через остальные связки.

Обозначим через $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$ исчисление, которое получено из исчисления K_3 для интуиционистской логики предикатов, приведенного в [3, 4], отбрасыванием правил, содержащих дизъюнкцию и квантор существования.

Формулы строятся обычным образом из пропозициональных и предикатных переменных, свободных и связанных индивидных переменных и логических символов $\perp, \wedge, \to, \forall$. При этом предполагается, что никакая переменная не может входить в формулу свободно и связанно одновременно. Выражение $\Gamma \to A$ используется как сокращение для формулы $A_1 \to (A_2 \to (\ldots \to (A_n \to A)\ldots))$, где Γ — список формул $A_1, \ldots, A_n$. Если Γ пусто, то $\Gamma \to A$ совпадает с A.

Работа поддержана Российским Гуманитарным научным фондом (грант № 00–03–00108).

Формулы $A_1, \ldots, A_n$ будем называть *передними звеньями* формулы $\Gamma \to A$, а формулу A — ее *задним звеном.*

Аксиомами являются формулы вида $A \to A$ и $\bot \to A$, где A — атомная формула.

Правила вывода:

$$\frac{\Gamma \to (A \to (B \to C))}{\Gamma \to (B \to (A \to C))} \quad \textbf{(перестановка)},$$

$$\frac{A \to (A \to C)}{A \to C} \quad \textbf{(сокращение)},$$

$$\frac{C}{A \to C} \quad \textbf{(ослабление)},$$

$$\frac{A \to C}{(A \wedge B) \to C} \quad \textbf{(введение конъюнкции слева 1)},$$

$$\frac{B \to C}{(A \wedge B) \to C} \quad \textbf{(введение конъюнкции слева 2)},$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \wedge B)} \quad \textbf{(введение конъюнкции справа)},$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad B \to C}{\Gamma \to ((A \to B) \to C)} \quad \textbf{(введение импликации)},$$

$$\frac{A(a) \to C}{\forall x A(x) \to C} \quad \textbf{(введение квантора всеобщности слева)},$$

$$\frac{\Gamma \to A(a)}{\Gamma \to \forall x A(x)} \quad \textbf{(введение квантора всеобщности справа)}.$$

В правиле введения квантора всеобщности справа переменная a не входит в Γ.

В приведенных выше правилах список формул Γ и формула C образуют *боковые звенья*, остальные формулы — *главные звенья* этих правил.

Две следующие леммы доказываются индукцией по сложности формулы A.

Лемма 1. *Для любой формулы A в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$ выводима формула $A \to A$.*

Лемма 2. *Для любой формулы A в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$ выводима формула $\bot \to A$.*

В нашей системе допустимо **правило сечения**

$$\frac{\Gamma \to A \quad A \to C}{\Gamma \to C}.$$

Доказательство следующей теоремы опирается на теорему элиминации сечения для исчисления K_3, доказанную в [3].

Теорема элиминации сечения. *Если формула выводима в исчислении* $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$, *то она выводима в* $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$ *и без применений правила сечения.*

Доказательство. Допустим, что мы имеем вывод формулы F в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$. Он является также выводом формулы F в исчислении K_3, приведенном в [3]. Для исчисления K_3 справедлива теорема элиминации сечения, т. е. существует вывод формулы F, не содержащий применений правила сечения. В силу свойства подформульности формулы в нем содержат только те логические символы, которые входят в формулу F, т. е. не содержат дизъюнкции и квантора всеобщности. Следовательно, в этом выводе могли применяться только правила, относящиеся к $\bot, \wedge, \to, \forall$, а значит, формула F выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$. Доказательство завершено.

Комори в [5] определил некоторую модификацию стандартных шкал Крипке и доказал, что интуиционистская логика предикатов полна относительно этих шкал. В данной работе его идея доказательства перенесена на стандартные шкалы Крипке для предикатных суперинтуиционистских логик.

Далее построим модель Крипке с конечными областями $\boldsymbol{TL}$, на которой будут опровергаться все формулы, не выводимые в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$.

Пусть $\mathscr{L}$ — язык без функциональных символов и констант. Рассмотрим счетную последовательность конечных множеств константных символов U_1,
$U_2, \ldots$ такую, что

$$\varnothing \neq U_1 \subsetneqq U_2 \subsetneqq \ldots .$$

Обозначим через W_i множество всех предложений в языке $\mathscr{L}(\boldsymbol{U_i})$, полученном из $\mathscr{L}$ добавлением всех константных символов из множества U_i.

Для любой формулы $A \in W_i$ и любого числа $j \geq i$ определим подмножество $[A; j]$ множества W_j следующим образом: $[A; j] = \{B \in W_j \mid$ формула $A \to B$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}\}$.

Определим множество миров $TL = \{[A; i] \mid A \in W_i,\ i \in N$, формула $A \to \bot$ не выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}\}$.

Отношение достижимости $\leq$ на мирах определим следующим образом: $[A; i] \leq [B; j] \Longleftrightarrow [A; i] \subseteq [B; j]$.

В качестве предметной области мира $[A; i]$ возьмем множество константных символов U_i.

Истинность на мире $[A; i]$ из множества TL для любой атомной формулы $B \in W_i$ определим так:

$$[A; i] \models B \Longleftrightarrow B \in [A; i].$$

Модель $\boldsymbol{TL}$ определим как $\langle TL, \leq, \{U_i\}_{i \in N}, \models \rangle$. Очевидно, что $\boldsymbol{TL}$ является моделью Крипке для интуиционистской логики предикатов.

Лемма 3. *Для любого мира* $[A; i] \in TL$ *и любой формулы* $F \in W_i$

$$[A; i] \models F \Longleftrightarrow F \in [A; i].$$

Доказательство проводится индукцией по сложности формулы F.

Базис. Для атомных формул утверждение следует из определения истинности.

Шаг индукции. Рассмотрим следующие три случая.

1. Пусть формула F имеет вид $B \wedge C$. Нам достаточно показать, что

$$B \wedge C \in [A; i] \Longleftrightarrow B \in [A; i] \text{ и } C \in [A; i].$$

Пусть $B \wedge C \in [A; i]$. Тогда формула $A \to (B \wedge C)$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$. Докажем, что формула $A \to B$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$:

$$\dfrac{A \to (B \wedge C) \qquad \dfrac{B \to B}{(B \wedge C) \to B}}{A \to B}.$$

Значит, формула B принадлежит множеству $[A; i]$.

Аналогично доказывается, что формула C принадлежит множеству $[A; i]$.

Обратно, пусть $B \in [A; i]$ и $C \in [A; i]$. Тогда в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$ доказуемы формулы $A \to B$ и $A \to C$.

Следовательно, формула $B \wedge C$ принадлежит множеству $[A; i]$.

2. Пусть формула F имеет вид $B \to C$. Нам достаточно показать, что $B \to C \in [A; i]$ тогда и только тогда, когда для любого мира $[D; j] \in TL$ такого, что $[A; i] \subseteq [D; j]$, выполнено утверждение: если формула B принадлежит множеству $[D; j]$, то формула C принадлежит множеству $[D; j]$.

Пусть $B \to C$ — формула из множества $[A; i]$, $[D; j]$ — любой мир из множества TL такой, что $[A; i] \subseteq [D; j]$. Так как $[A; i] \subseteq [D; j]$, формула $B \to C$ принадлежит множеству $[D; j]$ и, значит, формула $D \to (B \to C)$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$. Предположим, что формула B принадлежит множеству $[D; j]$. Тогда в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$ должна быть выводима формула $D \to B$. Докажем, что формула $D \to C$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$:

$$\dfrac{\dfrac{D \to (B \to C) \qquad \dfrac{\dfrac{D \to B \quad C \to C}{D \to ((B \to C) \to C)}}{(B \to C) \to (D \to C)}}{D \to (D \to C)}}{D \to C}.$$

Следовательно, формула C принадлежит множеству $[D; j]$.

Обратно, пусть формула $B \to C$ не принадлежит множеству $[A; i]$. Тогда формула $A \to (B \to C)$ не выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$. Предположим, что для любого мира $[D; j]$ из множества TL такого, что $[A; i] \subseteq [D; j]$, выполнено утверждение: если формула B принадлежит множеству $[D; j]$, то формула C принадлежит множеству $[D; j]$.

Возьмем в качестве D формулу $A \wedge B$. Так как формула $A \to (B \to C)$ не выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$, то и формула $(A \wedge B) \to \bot$ не выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$. В противном случае мы имели бы, что формула $A \to (B \to C)$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{B \to (A \to A)}}{A \to (B \to A)} \qquad \dfrac{B \to B}{A \to (B \to B)}}{A \to (B \to (A \wedge B))} \qquad (A \wedge B) \to \bot}{A \to (B \to \bot)} \qquad \bot \to C}{A \to (B \to C)}.$$

Значит, $[A \wedge B; i] \in TL$.

Очевидно, что $[A; i] \subseteq [A \wedge B; i]$ и что формула B принадлежит множеству $[A \wedge B; i]$. Тогда по нашему предположению формула C должна принадлежать множеству $[A \wedge B; i]$, т. е. формула $(A \wedge B) \to C$ выводима в $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Отсюда получаем, что формула $A \to (B \to C)$ выводима в $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Противоречие.

Таким образом, если формула $B \to C$ не принадлежит множеству $[A; i]$, то существует по крайней мере один мир $[D; j] \in TL$ такой, что $[A; i] \subseteq [D; j]$ (например $[A \wedge B; i]$), для которого имеет место утверждение: формула B принадлежит множеству $[D; j]$, но формула C ему не принадлежит.

3. Пусть теперь формула F имеет вид $\forall x B(x)$. Достаточно показать, что формула $\forall x B(x)$ принадлежит множеству $[A; i]$ тогда и только тогда, когда для любого мира $[D; j]$ из множества TL такого, что $[A; i] \subseteq [D; j]$, для любого элемента u из предметной области U_j формула $B(u)$ принадлежит множеству $[D; j]$.

Пусть формула $\forall x B(x)$ принадлежит множеству $[A; i]$. Тогда так как $[A; i] \subseteq [D; j]$, формула $\forall x B(x)$ принадлежит множеству $[D; j]$. Значит, формула $D \to \forall x B(x)$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Тем самым формула $D \to B(u)$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Следовательно, формула $B(u)$ принадлежит множеству $[D; j]$.

Обратно, пусть для любого мира $[D; j]$ из множества TL такого, что $[A; i] \subseteq [D; j]$, для любого элемента u из множества U_j формула $B(u)$ принадлежит множеству $[D; j]$.

Возьмем в качестве D формулу A, $j > i$ и элемент u из множества $U_j - U_i$. Тогда по предположению формула $B(u)$ должна принадлежать множеству $[A; j]$, т. е. формула $A \to B(u)$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Отсюда, пользуясь тем, что элемент u не принадлежит множеству U_i, а значит, не входит в формулу A, выводим, что формула $A \to \forall x B(x)$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Так как формула $\forall x B(x)$ принадлежит W_i, получаем, что $\forall x B(x) \in [A; i]$.

Лемма 4. *Если формула F не выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$, то формула F не истинна в модели $\langle \boldsymbol{TL}, \leq, U, \models \rangle$.*

Доказательство. Предположим, что формула F не выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Обозначим через m наименьшее натуральное число такое, что все константные символы из формулы F принадлежат множеству U_m. Рассмотрим мир $[\perp \to \perp; m]$. В этом мире формула F не истинна, так как формула $(\perp \to \perp) \to F$ не выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Следовательно, формула F не истинна в модели $\langle \boldsymbol{TL}, \leq, U, \models \rangle$.

Теорема полноты. *Если формула F не содержит дизъюнкцию и квантор существования, то следующие условия эквивалентны:*

(1) *формула F доказуема в предикатной интуиционистской логике;*

(2) *формула F выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$;*

(3) *формула F истинна во всех моделях Крипке с конечными предметными областями.*

Доказательство. Из (2), очевидно, следует (1).

Из (1) следует (3), так как из доказуемости формулы в предикатной интуиционистской логике следует ее истинность во всех моделях Крипке, и, значит, во всех моделях Крипке с конечными областями.

Из леммы 4 вытекает, что (3) влечет (2). Теорема доказана.

Обычно интерполяционное свойство формулируют следующим образом:

Исчисление L имеет *интерполяционное свойство*, если для всякой формулы $A \to B$, выводимой в исчислении L, существует формула C такая, что формулы $A \to C$ и $C \to B$ выводимы в исчислении L, причем в формулу C входят лишь те предикатные символы и свободные предметные переменные, которые входят и в A, и в B.

Шютте в работе [4] доказал, что интерполяционное свойство имеет интуиционистская логика предикатов, а также указал следующие факты.

1. Если в формулу не входил знак дизъюнкции, то он не входит и в интерполянт.

2. Если в формулу не входил квантор всеобщности, то он не входит и в интерполянт.

3. Если формула не содержала ни квантора всеобщности, ни квантора существования, то интерполянт также не содержит кванторов.

Однако Л. Л. Максимова построила контрпример, показывающий, что логика конечных областей в языке без дизъюнкции и квантора существования не имеет интерполяционного свойства. Таким контрпримером является формула

$$P(a) \to (\forall x(P(x) \to Q) \to Q).$$

Всякий интерполянт этой формулы должен содержать переменную a, не входящую в правую часть этой формулы. Поэтому мы сформулируем *слабое интерполяционное свойство*, сняв ограничение на вхождение свободных предметных переменных в интерполянт. Заметим, что имеет место

Лемма 5. *Если в языке имеются и квантор существования, и квантор всеобщности, то слабое интерполяционное свойство эквивалентно интерполяционному свойству.*

Доказательство. Очевидно, что из интерполяционного свойства следует слабое интерполяционное свойство. Докажем, что наличие у исчисления слабого интерполяционного свойства влечет наличие интерполяционного свойства. Для этого достаточно предложить алгоритм построения интерполянта из слабого интерполянта.

Пусть для формулы $A \to B$ мы имеем слабый интерполянт C. Если все свободные переменные, входящие в слабый интерполянт, входят и в A, и в B, то C является интерполянтом.

Пусть слабый интерполянт содержит свободную переменную x, не входящую свободно в A или B. Если эта переменная не входит свободно в A, то формула $\forall xC$ будет интерполянтом. Если же переменная не входит свободно в B, то формула $\exists xC$ будет интерполянтом. Лемма доказана.

Далее мы воспользуемся идеями доказательства интерполяционной теоремы, приведенного в работе [4].

Для индуктивного доказательства важно сформулировать интерполяционную теорему в таком виде, чтобы полученное утверждение было инвариантным по отношению к структурным правилам вывода.

Теорема 1. *Пусть F — формула, выводимая в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$, Φ — некоторый список ее передних звеньев, а Ψ — формула, полученная из формулы F вычеркиванием передних звеньев, входящих в Φ. Тогда существует формула Ω такая, что формулы $\Phi \to \Omega$ и $\Omega \to \Psi$ выводимы в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\bot\}}$, причем в формулу Ω входят лишь те предикатные символы, которые входят и в Φ, и в Ψ.*

Доказательство. Обозначим через $[F]$ множество предикатных символов, которые входят в формулу F. Тогда условие на множество предикатных символов, входящих в интерполянт Ω, будет выражено следующим образом: $[\Omega] \subseteq [\Phi] \cap [\Psi]$.

Доказательство будем вести индукцией по выводу формулы F. Рассмотрим следующие четыре случая.

1. Формула F — это аксиома $A \to A$ или $\perp \to A$. Если список передних звеньев Φ пуст, то интерполяционной формулой будет $\perp \to \perp$. Если Φ непуст, то он совпадает с A или $\perp$. В этом случае интерполянтом является формула A или соответственно формула $\perp$.

2. Формула F является заключением правила вывода логики высказываний с одной посылкой F_0.

Списку Φ передних звеньев формулы F соответствует некоторый (возможно, пустой) список Φ_0 передних звеньев формулы F_0. Вычеркивая из формулы F_0 передние звенья, входящие в список Φ_0, получаем формулу Ψ_0. По индукционному предположению для формулы $\Phi_0 \to \Psi_0$ существует интерполянт Ω такой, что формулы $\Phi_0 \to \Omega$ и $\Omega \to \Psi_0$ выводимы в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$, причем в формулу Ω входят лишь те предикатные символы, которые входят и в Φ_0, и в Ψ_0. Из структуры правил с одной посылкой следует, что формулы $\Phi \to \Omega$ и $\Omega \to \Psi$ либо совпадают с формулами $\Phi_0 \to \Omega$ и $\Omega \to \Psi_0$, либо выводятся из них применением правил с одной посылкой. Очевидно также, что $[\Phi_0] \subseteq [\Phi]$ и $[\Psi_0] \subseteq \Psi$ и, следовательно, $[\Omega] \subseteq [\Phi] \cap [\Psi]$. Поэтому Ω является интерполяционной формулой для формулы F.

3. Формула F является заключением правила вывода логики высказываний с двумя посылками F_1 и F_2. Необходимо рассмотреть два случая.

(a) Формула F является заключением $\Gamma \to (A \wedge B)$ правила введения конъюнкции справа.

Вычеркивая в формулах F_1 и F_2 передние звенья, входящие в список Φ, получаем соответственно формулы Ψ_1 и Ψ_2. По индукционному предположению существуют формулы Ω_1 и Ω_2 такие, что формулы $\Phi \to \Omega_1$, $\Omega_1 \to \Psi_1$, $\Phi \to \Omega_2$ и $\Omega_2 \to \Psi_2$ выводимы в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$, причем $[\Omega_1] \subseteq [\Phi] \cap [\Psi_1]$ и $[\Omega_2] \subseteq [\Phi] \cap [\Psi_2]$. Отсюда по правилу введения конъюнкции справа получаем, что формула $\Phi \to (\Omega_1 \wedge \Omega_2)$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Из $\Omega_1 \to \Psi_1$ по правилу введения конъюнкции слева выводим формулу $(\Omega_1 \wedge \Omega_2) \to \Psi_1$. Аналогично из $\Omega_2 \to \Psi_2$ получаем формулу $(\Omega_1 \wedge \Omega_2) \to \Psi_2$. Применением правила введения конъюнкции справа из посылок Ψ_1 и Ψ_2 выводится формула Ψ. Отсюда получаем (возможно, с применением правил перестановки и сокращения), что в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$ выводима формула $(\Omega_1 \wedge \Omega_2) \to \Psi$.

Так как $[\Omega_1] \subseteq [\Phi] \cap [\Psi_1]$ и $[\Omega_2] \subseteq [\Phi] \cap [\Psi_2]$, а $[\Psi_1, \Psi_2] \subseteq [\Psi]$, то $[\Omega_1 \wedge \Omega_2] \subseteq [\Phi] \cap [\Psi]$.

Получили, что $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ является интерполяционной формулой для $\Gamma \to (A \wedge B)$.

(b) Формула F является заключением $\Gamma \to ((A \to B) \to C)$ правила введения импликации. В случае, если $A \to B$ не входит в формулу Φ, рассуждениями, подобными проделанным в предыдущем пункте, выводим, что формула $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ является интерполянтом для формулы $\Gamma \to ((A \to B) \to C)$.

Пусть $A \to B$ входит в список Φ. Список Φ имеет в этом случае вид $\Phi_1, A \to B, \Phi_2$, причем Φ_1 и Φ_2 состоят из передних звеньев списка Φ, содержащихся соответственно в Γ и C (списки Φ_1 и Φ_2 могут быть пустыми). Вычеркнув из Γ и C передние звенья, которые принадлежат соответственно Φ_1 и Φ_2, получаем Γ_0 и C_0. Список Γ_0 может быть пустым. Формула Ψ имеет вид $\Gamma_0 \to C_0$.

Вычеркиванием из посылки $\Gamma \to A$ передних звеньев, принадлежащих Γ_0, получаем $\Phi_1 \to A$, вычеркиванием из посылки $B \to C$ переднего звена B и передних звеньев, принадлежащих Φ_2, получаем C_0.

По индукционному предположению существуют формулы Ω_1 и Ω_2 такие, что формулы $\Gamma_0 \to \Omega_1$, $\Omega_1 \to (\Phi_1 \to A)$, $B \to (\Phi_2 \to \Omega_2)$ и $\Omega_2 \to C_0$ выводимы в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$, причем $[\Omega_1] \subseteq [\Gamma_0] \cap [\Phi_1 \to A]$ и $[\Omega_2] \subseteq [B \to \Phi_2] \cap [C_0]$.

Из $\Omega_1 \to (\Phi_1 \to A)$ и $B \to (\Phi_2 \to \Omega_2)$ получаем по правилу введения импликации, что формула $\Omega_1 \to (\Phi_1 \to ((A \to B) \to (\Phi_2 \to \Omega_2)))$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Воспользовавшись правилом перестановки, получаем, что в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$ выводима формула $\Phi \to (\Omega_1 \to \Omega_2)$.

Из $\Gamma_0 \to \Omega_1$ и $\Omega_2 \to C_0$ по правилу введения импликации вытекает, что формула $\Gamma_0 \to ((\Omega_1 \to \Omega_2) \to C_0)$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Отсюда, воспользовавшись правилом перестановки, приходим к выводу, что в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$ выводима формула $(\Omega_1 \to \Omega_2) \to \Psi$.

Так как $[\Phi_1, A \to B, \Phi_2] = [\Phi]$ и $[\Gamma_0, C_0] = [\Psi]$, то $[\Omega_1 \to \Omega_2] \subseteq [\Phi] \cap [\Psi]$.

Получили, что $\Omega_1 \to \Omega_2$ является интерполяционной формулой для формулы $\Gamma \to ((A \to B) \to C)$.

4. Формула F является заключением правила вывода логики предикатов. В этом случае также необходимо рассмотреть два случая.

(a) Формула F является заключением $\Gamma \to \forall x A(x)$ правила введения квантора всеобщности справа.

Вычеркнув из посылки этого правила F_0 передние звенья, входящие в список Φ, получим формулу Ψ_0.

По индукционному предположению существует формула Ω_0 такая, что формулы $\Phi \to \Omega_0$ и $\Omega_0 \to \Psi_0$ выводимы в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$, причем $[\Omega_0] \subseteq [\Phi] \cap [\Psi_0]$.

Рассмотрим следующие два случая.

(α) Переменная a не входит в формулу Ω_0.

Из $\Omega_0 \to \Psi_0$ по правилу введения квантора всеобщности справа получаем, что формула $\Omega_0 \to \Psi$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$.

Получили, что Ω_0 является интерполяционной формулой для $\Gamma \to \forall x A(x)$.

(β) Переменная a входит в формулу Ω_0.

Так как на правило введения квантора всеобщности справа распространяется ограничение на переменные, переменная a не содержится в формуле Φ.

Из $\Phi \to \Omega_0(a)$ по правилу введения квантора всеобщности справа (его можно применить, так как переменная a не входит в формулу Φ) получаем, что формула $\Phi \to \forall x \Omega_0(x)$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Из $\Omega_0(a) \to \Psi_0$ по правилу введения квантора всеобщности слева получаем, что формула $\forall x \Omega_0(x) \to \Psi_0$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Отсюда применением правила введения квантора всеобщности справа приходим к выводу, что формула $\forall x \Omega_0(x) \to \Psi$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$. Тогда формула $\forall x \Omega_0(x)$ является интерполянтом для формулы $\Gamma \to \forall x A(x)$.

(b) Формула F является заключением $\forall x A(x) \to C$ правила введения квантора всеобщности слева. Посылка этого правила выглядит следующим образом: $A(a) \to C$.

Рассмотрим следующие два случая.

(α) Главное звено заключения $\forall x A(x)$ не входит в список Φ.

Формула Ψ_0 получается из формулы $A(a) \to C$ вычеркиванием передних звеньев, содержащихся в Φ.

По индукционному предположению существует формула Ω_0 такая, что формулы $\Phi \to \Omega_0$ и $\Omega_0 \to \Psi_0$ выводимы в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$, причем $[\Omega_0] \subseteq [\Phi] \cap [\Psi_0]$.

Из $\Omega_0 \to \Psi_0$ по правилу введения квантора всеобщности слева (с использованием перестановок) следует, что формула $\Omega_0 \to \Psi$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$.

Получили, что Ω_0 является интерполяционной формулой для $\forall x A(x) \to C$.

(β) Главное звено заключения $\forall x A(x)$ содержится в Φ.

Пусть Φ_0 — список (возможно, пустой) тех передних звеньев C, которые входят в Φ. Формула Ψ_0 получается из C вычеркиванием передних звеньев, содержащихся в Φ_0.

По индукционному предположению существует формула Ω_0 такая, что формулы $A(a) \to (\Phi_0 \to \Omega_0)$ и $\Omega_0 \to \Psi_0$ выводимы в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$, причем $[\Omega_0] \subseteq [A(a) \to \Phi_0] \cap [\Psi_0]$.

Из $A(a) \to (\Phi_0 \to \Omega_0)$ по правилу введения квантора всеобщности слева (возможно, с использованием перестановок) получаем, что формула $\Phi \to \Omega_0$ выводима в исчислении $\boldsymbol{LJ}^{\{\wedge,\forall,\to,\perp\}}$.

Тогда формула Ω_0 является интерполянтом для формулы $\forall x A(x) \to C$.

Теорема доказана.

Введем некоторые определения.

Предложение $\Phi(P)$ *неявно определяет* в исчислении L n-местный предикат P, если в исчислении L выводима формула

$$(\Phi(P) \& \Phi(P')) \to \forall x_1 \ldots \forall x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P'(x_1, \ldots, x_n)),$$

где P' — новый n-местный предикатный символ.

Предложение $\Phi(P)$ *явно определяет* n-местный предикат P в исчислении L, если существует формула $C(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что все предикатные символы формулы C содержатся в множестве предикатных символов предложения $\Phi(P)$, отличных от P, и в исчислении L выводима формула

$$\Phi(P) \to \forall x_1 \ldots \forall x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow C(x_1, \ldots, x_n)).$$

Исчисление L имеет *свойство Бета*, если предложение, неявно определяющее предикат в исчислении L, определяет его в логике L явно.

Хорошо известно, что обычное интерполяционное свойство влечет свойство Бета. Доказательство следующей леммы получается некоторой модификацией стандартного доказательства (см., например, предложение 6.11 из [6]).

Лемма 6. *Если исчисление обладает слабым интерполяционным свойством, то оно обладает свойством Бета.*

Доказательство. Допустим, что предложение $\Phi(P)$ неявно определяет n-местный предикат P в исчислении L. По определению это означает, что в исчислении L выводима формула

$$(\Phi(P) \& \Phi(P')) \to \forall x_1 \ldots \forall x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P'(x_1, \ldots, x_n)),$$

где P' — новый n-местный предикатный символ. Значит, в исчислении L выводима формула

$$(\Phi(P) \& \Phi(P')) \to (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P'(x_1, \ldots, x_n)).$$

Отсюда следует, что в исчислении L выводима формула

$$(\Phi(P) \& \Phi(P')) \to (P(x_1, \ldots, x_n) \to P'(x_1, \ldots, x_n)).$$

Поэтому в исчислении L выводима формула

$$(\Phi(P)\&P(x_1,\dots,x_n)) \to (\Phi(P') \to P'(x_1,\dots,x_n)).$$

Если исчисление L имеет слабое интерполяционное свойство, то для формулы

$$(\Phi(P)\&P(x_1,\dots,x_n)) \to (\Phi(P') \to P'(x_1,\dots,x_n))$$

должен существовать интерполянт C, причем в формулу C входят лишь те предикатные символы, которые входят и в формулу $\Phi(P)\&P(x_1,\dots,x_n)$, и в формулу $\Phi(P') \to P'(x_1,\dots,x_n)$, т. е. все предикатные символы формулы C содержатся во множестве предикатных символов предложения $\Phi(P)$, отличных от P. При этом в исчислении L выводимы формулы $(\Phi(P)\&P(x_1,\dots,x_n)) \to C$ и $C \to (\Phi(P') \to P'(x_1,\dots,x_n))$.

Если формула C содержит свободные переменные, не входящие в множество $\{x_1,\dots,x_n\}$, свяжем их квантором всеобщности, применив правило введения квантора всеобщности справа и слева к формулам $(\Phi(P)\&P(x_1,\dots,x_n)) \to C$ и $C \to (\Phi(P') \to P'(x_1,\dots,x_n))$ соответственно. Применение правила введения квантора всеобщности справа возможно, так как в формулу $\Phi(P)\&P(x_1,\dots,x_n)$ входят свободно только переменные из множества $\{x_1,\dots,x_n\}$. Тем самым в исчислении L выводимы формулы $(\Phi(P)\&P(x_1,\dots,x_n)) \to C'(x_1,\dots,x_n)$ и $C'(x_1,\dots,x_n) \to (\Phi(P') \to P'(x_1,\dots,x_n))$, при этом все свободные переменные формулы C' содержатся в множестве $\{x_1,\dots,x_n\}$.

Отсюда следует, что в исчислении L выводима формула

$$\Phi(P) \to (P(x_1,\dots,x_n) \to C'(x_1,\dots,x_n)).$$

Подставляя P вместо P', получаем, что в исчислении L выводима формула $\Phi(P) \to (C'(x_1,\dots,x_n) \to P(x_1,\dots,x_n))$. Следовательно, формула $\Phi(P) \to (P(x_1,\dots,x_n) \to C'(x_1,\dots,x_n))$ выводима в исчислении L.

Применив перестановку, введение квантора всеобщности слева и перестановку, приходим к выводу, что в исчислении L выводима формула

$$\Phi(P) \to \forall x_1 \dots \forall x_n (P(x_1,\dots,x_n) \to C'(x_1,\dots,x_n)).$$

Итак, предложение $\Phi(P)$ явно определяет n-местный предикат P в исчислении L, значит, исчисление L обладает свойством Бета. Лемма доказана.

Таким образом, фрагмент предикатной интуиционистской логики конечных предметных областей в языке без квантора существования и дизъюнкции имеет слабое интерполяционное свойство и, следовательно, свойство Бета, а сама логика не имеет даже свойства Бета [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gurevich Yu.* Toward logic tailored for computational complexity // Computation and proof theory. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1984. P. 175–216. (Lecture Notes in Math; 1104).
2. *Шрайнер П. А.* Отсутствие интерполяции в некоторых предикатных суперинтуиционистских логиках // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 1. С. 105–117.
3. *Schütte K.* Schlu*β*weisen-Kalküle der Prädikatenlogik // Math. Ann. 1950. Bd 122. S. 47–65.
4. *Schütte K.* Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik // Math. Ann. 1962. Bd 148. S. 192–200.
5. *Komori Y.* Predicate logics without the structure rules // Studia Logica. 1986. V. 45, N 4. P. 393–404.
6. *Такеути Г.* Теория доказательств. М.: Мир, 1978.

Статья поступила 1 октября 1998 г.

г. Новосибирск
paul@nspu.nsu.su