Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 512. 544

ФИНИТНО АППРОКСИМИРУЕМЫЕ ГРУППЫ С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯМИ ПАР ПОДГРУПП

А. И. Созутов

Аннотация: Доказано, что финитно аппроксимируемая группа, в которой пересечение любых двух собственных подгрупп нетривиально, изоморфна либо конечной группе кватернионов, либо конечной циклической p-группе, либо финитно аппроксимируемой подгруппе группы рациональных чисел по сложению. Библиогр. 14.

Юрию Леонидовичу Ершову
к его шестидесятилетию

До 70-х гг. были известны только три типа групп, в которых любые две собственные подгруппы пересекаются нетривиально, — это абелевы группы без кручения ранга 1, (локально) циклические p-группы и (обобщенные) группы кватернионов, причем, как показал В. П. Шунков [1], в классе 2-групп приведенный список полон.

Первый некоммутативный аналог групп рациональных чисел в классе групп без кручения был построен С. И. Адяном в [2]. Группа Адяна $A(m,n)$ является центральным нерасщепляемым расширением бесконечной циклической группы с помощью свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ ($m \geq 2$, n нечетное, ≥ 665). В [3–6] (см. также [7, 8]) был указан прием получения из групп типа $A(m,p^k)$ некоммутативных аналогов групп кватернионов для всех нечетных простых p.

А. Ю. Ольшанский и И. С. Ашманов существенно расширили арсенал примеров периодических групп и групп без кручения, в которых любые две собственные подгруппы имеют нетривиальное пересечение, определив строение мультипликатора Шура для многих групп «свободного бернсайдова типа» (см., например, [6, пп. 31.2–31.5, 31.7, 31.8, 34.1, 34.15]).

Периодические группы с нетривиальными пересечениями любых двух собственных подгрупп интересны, например, тем, что вложимы в группы регулярных автоморфизмов абелевых групп [5, 8], некоторые из них являются M-группами [7, теорема 31.8], с их помощью решен ряд известных вопросов.

В данной заметке показано, что в классе финитно аппроксимируемых (резидуально конечных [9]) групп не существует некоммутативного аналога группы рациональных чисел. Тем самым дано полное описание финитно аппроксимируемых групп с нетривиальными пересечениями пар собственных подгрупп. Отметим, что полученные результаты противоречат теореме 4 из [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00542).

Теорема. *Неабелева финитно аппроксимируемая группа, в которой пересечение любых двух собственных подгрупп нетривиально, является конечной (обобщенной) группой кватернионов.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Если она конечна, то ввиду теорем Силова является p-группой и содержит единственную подгруппу простого порядка. По теореме 12.5.2 из [11] G — (обобщенная) группа кватернионов.

Предположим теперь, что теорема неверна и существует бесконечная неабелева группа G, удовлетворяющая условиям теоремы. Легко убедиться, что группа G не может быть периодической, так как в этом случае она должна быть p-группой с единственной подгруппой порядка p, которая, в свою очередь, обязана содержаться в любой собственной нормальной подгруппе, что противоречит финитной аппроксимируемости группы G. Также понятно, что она не может быть и смешанной группой. Следовательно, G не имеет кручения. Отметим также простой, но полезный факт, что любая неабелева подгруппа из G является контрпримером к теореме.

Ввиду теоремы о разложимости конечно порожденных абелевых групп в прямую сумму циклических подгрупп [12] абелевы подгруппы в G локально циклические. В частности, для любого элемента $g \in G$ подгруппа $\langle g, Z(G)\rangle$ локально циклическая.

Лемма 1. *Любая абелева подгруппа группы G содержится в центре своего нормализатора, и каждая абелева нормальная в G подгруппа содержится в $Z(G)$.*

Доказательство. Пусть подгруппа $A \leq G$ абелева. Предположим, что в $N_G(A)$ найдется элемент g, индуцирующий в A нетривиальный автоморфизм ψ. Поскольку $\langle g\rangle \cap A \neq 1$ по условиям теоремы, порядок автоморфизма ψ конечен. Так как A — абелева группа ранга 1 и единственным нетривиальным периодическим автоморфизмом таких групп в аддитивной записи является отображение $\psi : a \to -a$ [13, с. 294, пример 5], то для любого $a \in A$ имеет место $a^g = a^{-1}$, что противоречит неравенству $\langle g\rangle \cap A \neq 1$. Следовательно, $N_G(A) = C_G(A)$, и лемма доказана.

Как уже отмечалось, свойства финитной аппроксимируемости и взаимной непростоты любых двух собственных подгрупп группы G наследуются ее подгруппами. Поэтому мы можем считать группу G двупорожденной, в которой в силу ее основного свойства центр нетривиален. Пусть p — произвольное простое число, для которого найдется элемент $a \in G \setminus Z(G)$ такой, что $a^p \in Z(G)$. Элемент a не может быть перестановочным с любым своим сопряженным элементом, так как в противном случае он содержался бы в абелевой нормальной подгруппе и, как показано в лемме 1, в центре всей группы вопреки выбору. Таким образом, найдется элемент $b \in a^G$, неперестановочный с элементом a, и можно считать, что группа G порождена именно этими элементами (при этом, быть может, теряется их сопряженность). Очевидно, что имеют место равенства $a^p = b^p = z \in Z(G)$. Обозначим $Z = \langle z\rangle$.

Лемма 2. *Неабелева подгруппа группы G не может быть конечным расширением своего центра. В частности, $p \neq 2$.*

Доказательство. Действительно, если $B \leq G$ и $|B : Z(B)| < \infty$, то по теореме Шура [14, теорема 1.4] коммутант B' конечен, следовательно, $B = 1$, и подгруппа B абелева. Далее, если $p = 2$, то ввиду периодичности любой фактор-группы группы G по собственной неединичной подгруппе, $G/Z = \langle aZ, bZ\rangle$ — конечная группа диэдра и по первому утверждению леммы G абелева, что противоречит выбору элементов a, b. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть N — нормальная в G — подгруппа конечного индекса и множество $\pi = \pi(ZN/N) \setminus \{2\}$ непусто. Тогда в фактор-группе G/N существует циклическая холловская π-подгруппа H/N, обладающая нормальным π'-дополнением M/N. В частности, для полного прообраза M группы M/N фактор-группа G/M — циклическая π-группа порядка $|H/N|$.*

Доказательство. Очевидно, что $ZN/N \leq Z(G/N)$. Так как для любого $t \in G$ подгруппа $T = \langle t, Z\rangle$ циклическая, то ввиду изоморфизма $TN/N \simeq T/(T \cap N)$ каждая элементарная абелева q-подгруппа TN/N, где $q \in \pi$, имеет порядок q и содержится в ZN/N. Более того, нетрудно убедиться, что любая подгруппа из G/N, порядок которой делит ZN/N, единственна в G/N и содержится в ZN/N. По теореме 12.5.2 из [11] для всех $q \in \pi$ силовские q-подгруппы QN/N в G/N циклические. Поскольку q'-автоморфизмы циклических q-групп ($q \neq 2$) действуют на них регулярно (см., например, [11, с. 102]), а в нашем случае $\Omega_1(QN/N) \leq Z(G/N)$, то QN/N содержится в G/N в центре своего нормализатора и по теореме 14.3.1 из [11] в G/N существует нормальная холловская q'-подгруппа M_q/N. Положим $M = \bigcap M_q$, где $q \in \pi$. По теореме Ремака [12] G/M — подпрямое произведение конечного числа циклических q-групп $G/M_q \simeq QN/N$ взаимно простых порядков, и нетрудно убедиться, что $G/M = \langle aM\rangle = \langle bM\rangle$ — циклическая π-группа порядка $n = \prod |QN/N|$, где $q \in \pi$. Так как M/N — π'-группа, в подгруппе G/N существует циклическая холловская подгруппа H/N порядка n, и лемма доказана.

Построенную в лемме 3 нормальную подгруппу M индекса n обозначим через M_n. Пусть M — еще одна такая же подгруппа индекса n в G, $N = M_n \cap M$ и $\pi = \pi(n)$. По теореме Ремака фактор-группа G/N есть подпрямое произведение двух циклических групп G/M_n и G/M порядка n, причем очевидно, что $\pi(ZN/N) = \pi$. Тогда по лемме 3 G/N — циклическая π-группа, а это возможно только при $N = M = M_n$. Итак, в G для любого нечетного числа n существует не более одной подгруппы M_n. Пусть M_n, M_k — две различные подгруппы, т. е. $n \neq k$ и соответствующие этим числам подгруппы типа M существуют, при этом пусть $\pi_1 = \pi(n)$, $\pi_2 = \pi(k)$. Рассмотрим фактор-группу G/N, где $N = M_n \cap M_k$. Так как $\pi_1 = \pi(ZM_n/M_n) = \pi(ZN/M_kN) \subseteq \pi(ZN/N) = \pi$, аналогично $\pi_2 \subseteq \pi$, а по теореме Ремака $\pi(G/N) = \pi_1 \cup \pi_2$, то по лемме 3 G/N — циклическая π-группа типа M_m. При этом из очевидных теоретико-числовых взаимоотношений следует, что m — наименьшее общее кратное чисел n и k. Таким образом, если множество подгрупп типа M_n непусто, то оно замкнуто относительно пересечений. Применяя доказанный выше результат для случая, когда n делит k ($n < k$), получаем включение $M_n > M_k$.

Лемма 4. *Если множество нормальных подгрупп типа M_n группы G непусто, то оно конечно и относительно включения является нижней полурешеткой с единственным минимальным элементом $M = M_m$.*

Доказательство. Предположим, что множество X подгрупп типа M_n бесконечно. Так как по доказанному выше каждому нечетному натуральному числу n соответствует не более одной подгруппы типа M_n, то множество $J = \{n \mid M_n \in X\}$ бесконечно. Как доказано ранее, J замкнуто относительно взятия наименьшего общего кратного. Поэтому в J найдется бесконечная последовательность $n_1, n_2, n_3, \ldots$ чисел n_i такая, что n_i делит n_{i+1}. Этой последовательности соответствует бесконечная цепочка подгрупп с пересечением M:

$$M_{n_1} > M_{n_2} > M_{n_3} > \ldots, \quad M = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_{n_i}. \tag{1}$$

Так как по лемме 3 G/M_{n_i} циклические (и порождены образами aM_{n_i} одного и того же элемента $a \in G$), то фактор-группа G/M есть бесконечная циклическая группа. Но тогда $\langle a \rangle \cap M = 1$, и из условий теоремы следует, что $M = 1$. Однако в этом случае $G = \langle a \rangle$ — бесконечная циклическая группа и полученное противоречие означает, что множество X конечно. По доказанному выше и по теореме Пуанкаре [12] пересечение всех подгрупп M_n есть подгруппа $M = M_m$ конечного индекса m. Лемма доказана.

Если множество подгрупп типа M_n из леммы 4 в группе G пусто, положим $M = G$. Обозначим $A = Z \cap M$.

Лемма 5. *Пусть $N < M$ — нормальная в G подгруппа конечного индекса и $|AN/N| \geq 4$. Тогда $|AN/N| = 2^k$, силовская 2-подгруппа Q/N из M/N циклическая порядка $2^n \geq 2^k$ и $M/N = (O_n/N)\lambda(Q/N)$, где O_n — полный прообраз подгруппы $O(M/N)$ в G. В частности, M/O_n — циклическая 2-группа порядка $2^n \geq |AN/N|$.*

Доказательство. Если $\pi = \pi(AN/N) \setminus \{2\}$ непусто, то по лемме 2 в M/N существует циклическая холловская π подгруппа H/N с нормальным π'-дополнением K/N, полный прообраз K которого инвариантен в G и строго содержится в M. Так как ввиду лемм 3, 4 порядок $n = |G/K|$ нечетен и Z накрывает нижние слои в G/M и M/K, то K совпадает с подгруппой M_n при $n = m \cdot |M/K|$. Однако последнее противоречит лемме 4 и определению подгруппы M. Следовательно, $\pi(AN/N) = \{2\}$.

Итак, $|AN/N| = 2^k \geq 4$. Очевидно, что $AN/N \leq Z(M/N)$, и так как для любого $t \in G$ подгруппа $T = \langle t, A \rangle$ циклическая, то ввиду изоморфизма $TN/N \simeq T/(T \cap N)$ инволюция из TN/N совпадает с инволюцией из AN/N. Более того, каждая абелева подгруппа порядка $2^r \leq 2^k$ из M/N совпадает с центральной циклической подгруппой порядка 2^r из AN/N, и потому в M/N только одна абелева подгруппа порядка 2^k. По теореме 12.5.2 из [11] силовская 2-подгруппа Q/N в M/N циклическая порядка $2^n \geq 2^k$, и по известной теореме Бернсайда в M/N существует нормальная холловская $2'$-подгруппа $O_n = O(M/N)$. Итак, $M/O_n \simeq Q/N$ — циклическая группа порядка 2^n, и лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Из лемм 3–5 следует, что фактор-группа G/O_n — циклическая группа порядка $m2^n$, здесь O_n — нормальная в G подгруппа, построенная в лемме 5. Покажем, что множество подгрупп типа O_n в G бесконечно. Так как G — финитно аппроксимируемая группа и A — бесконечная циклическая группа, то для любого наперед заданного числа 2^k найдется нормальная в G подгруппа $N < M$, для которой $|A/(A \cap N)| \geq 2^k$. Из $AN/N \simeq A/(A \cap N)$ вытекает, что $|AN/N| \geq 2^k$. В силу леммы 5 последнее неравенство означает, что числа n, для которых существует подгруппа O_n, могут быть как угодно большими. Следовательно, множество различных подгрупп типа O_n бесконечно.

Таким образом, пересечение D всех подгрупп типа O_n имеет бесконечный индекс в G. Так как каждая из подгрупп O_n содержит коммутант G' группы

G, то $|G : G'| = \infty$ и G/G' — бесконечная абелева группа. Значит, хотя бы одна из циклических подгрупп $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$, порождающих группу G, имеет тривиальное пересечение с коммутантом G'. Из условий теоремы вытекает, что $G' = 1$ и G — абелева группа вопреки первоначальному предположению. Теорема доказана.

Согласно доказанной теореме бесконечная финитно аппроксимируемая группа, в которой пересечение любых двух собственных подгрупп нетривиально, изоморфна подгруппе H группы R рациональных чисел по сложению типа $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, где $a_i < \infty$ для всех i (см., например, [9, 13]). Подгруппу $H \leq R$ обозначим через $R(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$. Напомним, что через Q_{2^n} обозначается (обобщенная) группа кватернионов порядка $2^n \geq 8$ и через Z_{p^n} — циклическая p-группа порядка p^n, p — простое число.

Следствие. *Финитно аппроксимируемая группа, в которой пересечение любых двух собственных подгрупп нетривиально, изоморфна одной из групп* Q_{2^n}, Z_{p^n}, $R(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, *где* $a_m < \infty$ *для всех* m.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484–496.
2. *Адян С. И.* О некоторых группах без кручения // Изв. АН СССР. 1971. Т. 35, № 3. С. 459–468.
3. *Ольшанский А. Ю.* Замечание о счетной нетопологизируемой группе // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1980. № 3. С. 103.
4. *Созутов А. И.* О существовании в группе бесконечных подгрупп с нетривиальным локально конечным радикалом. Красноярск, 1980. С. 11–19. (Препринт / ВЦ СО АН СССР).
5. *Созутов А. И.* Пример бесконечной конечнопорожденной группы Фробениуса // VII Всесоюз. симпоз. по теории групп. Красноярск, 1980. С. 116.
6. *Ширванян В. Л.* Некоммутативные периодические группы с нетривиальным пересечением всех циклических подгрупп // VII Всесоюз. симпоз. по теории групп. Красноярск, 1980. С. 137.
7. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
8. *Созутов А. И.* О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 893–901.
9. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
10. *Obraztsov V. N.* Infinite periodic residually finite groups with prescribed propertties // Kurosh algebraic conference′98, abstracts of talks. M., 1998. P. 94–95.
11. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
12. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
13. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2.
14. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 13 ноября 1998 г.

г. Красноярск
Красноярская гос. архитектурно-строительная академия
root@sozutov.krasnoyarsk.su