Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 514

О КРИВИЗНЕ РИЧЧИ ОДНОРОДНЫХ МЕТРИК НА НЕКОМПАКТНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ю. Г. Никоноров

Аннотация: Исследуются свойства кривизны Риччи для специального класса однородных метрик на некомпактных однородных пространствах. В частности, для некоторых некомпактных пространств доказывается отсутствие однородных метрик Эйнштейна. Библиогр. 2.

Рассмотрим полупростую некомпактную группу Ли G, ее компактную подгруппу H, $H \subset K \subset G$, где K — максимальная компактная подгруппа, $H \neq K$. Пусть $[\cdot,\cdot]$ — скобка Ли, а $B(\cdot,\cdot)$ — форма Киллинга алгебры Ли g, и пусть

$$g = k \oplus p' = h \oplus p'' \oplus p',$$

где первое равенство есть разложение Картана алгебры g группы G, и $k = h \oplus p''$, p'' ортогонален h относительно B.

Рассмотрим класс ad_h-инвариантных метрик M на $p = p'' \oplus p'$ (ad_h-инвариантном дополнении к h) такой, что для любой метрики $(\cdot,\cdot) \in M$ p'' ортогонален p' относительно $(\cdot,\cdot)$. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle = B|_{p'} - B|_{p''}$, метрики $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ одновременно приводятся к диагональному виду, т. е. имеют место следующие разложения:

$$p' = p_1 \oplus \dots \oplus p_u, \quad p'' = p_{u+1} \oplus \dots \oplus p_v,$$

где p_i — попарно ортогональные относительно обеих метрик ad_h-инвариантные неприводимые модули, и $(\cdot,\cdot)|_{p_i} = x_i \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{p_i}$ для некоторых $x_i > 0$. Можно считать, что $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_u$ и $x_{u+1} \le \dots \le x_v$.

Форма кривизны Риччи $\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot)$ для метрики $(\cdot,\cdot)$ является также ad_h-инвариантной на p, поэтому $\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot)|_{p_i} = r_i \cdot (\cdot,\cdot)|_{p_i}$ для некоторых вещественных r_i. Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Если $r_1 \ge r_u$, то $r_v > 0$.*

В частности, из этой теоремы выводится утверждение об отсутствии среди метрик класса M эйнштейновых. С учетом того, что для ряда однородных пространств метриками класса M исчерпываются все ad_h-инвариантные метрики на p, доказывается отсутствие метрик Эйнштейна на некоторых некомпактных однородных пространствах.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–00436) и гранта С-Петербург. ун-та.

Пусть векторы e_i^j образуют ортонормированный базис в p относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$, согласованный с разложением p на неприводимые модули p_i, а именно $e_i^j \in p_i$ при $1 \le j \le d_i = \dim p_i$.

Рассмотрим также ортонормированный относительно $-B$ базис $\{e_0^j\}$ в алгебре h, где $1 \le j \le d_0 = \dim h$. Очевидно, что базис $\{e_i^j\}$, $0 \le i \le v$, является ортонормированным относительно метрики $B|_{p'} - B|_k$ в алгебре g. Известно, что в таком базисе операторы присоединенного действия $\mathrm{ad}_x : g \mapsto g$ являются кососимметричными для всех $x \in k$ и симметричными для всех $x \in p'$ [1, с. 241].

Определим теперь числа $\begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix}$ для модулей p_i, p_j и p_k:

$$\begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \left(\left\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma \right\rangle\right)^2,$$

где α, β, γ изменяются в пределах от 1 до d_i, d_j, d_k соответственно.

Отметим очевидное равенство $\begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ j\,i \end{bmatrix}$ и покажем, что $\begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ i\,k \end{bmatrix}$. Действительно, если $p_i \subset p''$, то операторы $\mathrm{ad}_{e_i^\alpha} : g \mapsto g$ кососимметричны относительно выбранного базиса, поэтому

$$\left\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma \right\rangle = -\left\langle e_j^\beta, [e_i^\alpha, e_k^\gamma] \right\rangle, \quad \begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ i\,k \end{bmatrix}.$$

Если $p_i \subset p'$, то операторы $\mathrm{ad}_{e_i^\alpha} : g \mapsto g$ симметричны, таким образом,

$$\left\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta]_p, e_k^\gamma \right\rangle = \left\langle e_j^\beta, [e_i^\alpha, e_k^\gamma] \right\rangle, \quad \begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ i\,k \end{bmatrix}.$$

Лемма 1. *Для всех i выполняется неравенство*

$$\sum_{j,k} \begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix} \le d_i,$$

где суммирование распространяется на все j, k от 1 до v. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $[h, p_i] = 0$.

Доказательство. Имеем

$$\sum_{j,k} \begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ 1\le j,k\le v}} \left(\left\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma \right\rangle\right)^2 \le \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ 0\le j,k\le v}} \left(\left\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma \right\rangle\right)^2$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ 0\le j\le v}} \left\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], [e_i^\alpha, e_j^\beta] \right\rangle = \Bigl| \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ 0\le j\le v}} \left\langle e_j^\beta, [e_i^\alpha, [e_i^\alpha, e_j^\beta]] \right\rangle \Bigr| = \Bigl| \sum_\alpha B\left(e_i^\alpha, e_i^\alpha\right) \Bigr| = d_i.$$

Здесь мы воспользовались тем, что операторы $\mathrm{ad}_{e_i^\alpha} : g \mapsto g$ симметричны (кососимметричны) при $p_i \subset p'$ ($p_i \subset p''$). Нетрудно убедиться в том, что неравенство в этой цепочке обращается в равенство тогда и только тогда, когда $[p_i, h] = 0$.

Пусть b_i таковы, что $b_i = -1$ при $p_i \subset p'$ и $b_i = 1$ при $p_i \subset p''$.

Лемма 2. *Для вычисления чисел r_i справедлива формула*

$$r_i = \frac{b_i}{2x_i} + \frac{1}{4d_i} \sum_{1\le j,k\le v} \begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix} \left(\frac{x_i}{x_j x_k} - \frac{x_k}{x_i x_j} - \frac{x_j}{x_i x_k} \right).$$

Доказательство. Векторы $\frac{1}{\sqrt{x_i}}e_i^\alpha$, где $1 \le i \le v$, $1 \le \alpha \le d_i$, образуют ортобазис в p относительно метрики $(\cdot,\cdot)$. Воспользуемся утверждением 7.38 из [2], согласно которому кривизна Риччи вычисляется по формуле

$$\mathrm{Ric}(X,X) = -\frac{1}{2}\sum_i |[X,X_i]_p|^2 - \frac{1}{2}B(X,X) + \frac{1}{4}\sum_{i,j}([X_i,X_j]_p, X)^2$$

для унимодулярной группы G, метрики $(\cdot,\cdot)$ на p и ортонормированного относительно $(\cdot,\cdot)$ базиса $\{X_i\}$. Для выбранного нами базиса получаем

$$d_i r_i = -\frac{1}{2x_i}\sum_\alpha B\big(e_i^\alpha, e_i^\alpha\big) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\\ 1\le j,k\le v}} \big(\big\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma\big\rangle\big)^2 \frac{x_k}{x_j x_i} + \frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\\ 1\le j,k\le v}} \big(\big\langle [e_j^\beta, e_k^\gamma], e_i^\alpha\big\rangle\big)^2 \frac{x_i}{x_j x_k}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{1\le j,k\le v} \big(\big\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma\big\rangle\big)^2 = \begin{bmatrix} k\\ i\,j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\\ j\,i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\\ j\,k\end{bmatrix}, \quad B(e_i^\alpha, e_i^\alpha) = -b_i,$$

имеем

$$d_i r_i = \frac{b_i d_i}{2x_i} + \frac{1}{4}\sum_{1\le j,k\le v} \begin{bmatrix} k\\ i\,j\end{bmatrix} \left(\frac{x_i}{x_j x_k} - \frac{x_k}{x_i x_j} - \frac{x_j}{x_i x_k}\right),$$

что и требовалось.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что для $1 \le i \le u$

$$r_i = \frac{b_i}{2x_i} + \frac{1}{4d_i}\sum_{1\le j,k\le v} \begin{bmatrix} k\\ i\,j\end{bmatrix} \left(\frac{x_i}{x_j x_k} - \frac{x_k}{x_i x_j} - \frac{x_j}{x_i x_k}\right) = \frac{b_i}{2x_i} + \frac{1}{2d_i}\sum_{\substack{1\le j\le u\\ u<k\le v}} \begin{bmatrix} k\\ i\,j\end{bmatrix} \left(\frac{x_i}{x_j x_k} - \frac{x_k}{x_i x_j} - \frac{x_j}{x_i x_k}\right),$$

так как $[p',p'] \subset p'' \oplus h$, $[p',p''] \subset p'$ и $\begin{bmatrix} k\\ i\,j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\\ i\,k\end{bmatrix}$. В силу предположения относительно упорядочения p_i имеем $\frac{x_1}{x_j} - \frac{x_j}{x_1} \le 0$ при $1 \le j \le u$. Таким образом,

$$r_1 = -\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2d_1}\sum_{\substack{1\le j\le u\\ u<k\le v}} \begin{bmatrix} k\\ 1\,j\end{bmatrix} \left(\left(\frac{x_1}{x_j} - \frac{x_j}{x_1}\right)\frac{1}{x_k} - \frac{x_k}{x_1 x_j}\right) \le -\frac{1}{2x_1}.$$

Поскольку $\frac{x_u}{x_j} - \frac{x_j}{x_u} \ge 0$ при $1 \le j \le u$ и $\frac{x_k}{x_u x_j} \le \frac{x_v}{x_u x_1}$ при $1 \le j \le u$, $u < k \le v$, то

$$r_u \ge -\frac{1}{2x_u} + \frac{1}{2d_u}\sum_{\substack{1\le j\le u\\ u<k\le v}} \begin{bmatrix} k\\ u\,j\end{bmatrix} \left(\left(\frac{x_u}{x_j} - \frac{x_j}{x_u}\right)\frac{1}{x_k} - \frac{x_k}{x_u x_j}\right)$$
$$\ge -\frac{1}{2x_u} + \frac{1}{2d_u}\sum_{\substack{1\le j\le u\\ u<k\le v}} \begin{bmatrix} k\\ u\,j\end{bmatrix} \left(-\frac{x_v}{x_u x_1}\right) = -\frac{1}{2x_u} - \frac{x_v}{2d_u x_1 x_u}\sum_{\substack{1\le j\le u\\ u<k\le v}} \begin{bmatrix} k\\ u\,j\end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2x_u} - \frac{x_v}{4d_u x_1 x_u}\sum_{1\le j,k\le v} \begin{bmatrix} k\\ u\,j\end{bmatrix} \ge -\frac{1}{2x_u} - \frac{x_v}{4d_u x_1 x_u} d_u = -\frac{1}{2x_u} - \frac{x_v}{4x_1 x_u}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались леммой 2. Далее, по условию теоремы

$$-\frac{1}{2x_1} \geq r_1 \geq r_u \geq -\frac{1}{2x_u} - \frac{x_v}{4x_1x_u},$$

откуда $2x_u \leq 2x_1+x_v$. Из последнего неравенства следует, что $|x_j-x_k| < x_v$ для всех $1 \leq j,k \leq u$, чем мы вскоре воспользуемся. Учитывая, что $[p'',p''] \subset p'' \oplus h$, $[p',p''] \subset p'$, нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\begin{aligned} r_v = \frac{1}{2x_v} + \frac{1}{4d_v} \sum_{1\leq j,k\leq v} \begin{bmatrix} k \\ v\, j \end{bmatrix} \left(\frac{x_v}{x_jx_k} - \frac{x_k}{x_vx_j} - \frac{x_j}{x_vx_k} \right) \\ = \frac{1}{2x_v} + \frac{1}{4d_v} \sum_{\substack{1\leq j\leq u \\ 1\leq k\leq u}} \begin{bmatrix} k \\ v\, j \end{bmatrix} \left(\frac{x_v}{x_jx_k} - \frac{x_k}{x_vx_j} - \frac{x_j}{x_vx_k} \right) \\ + \frac{1}{4d_v} \sum_{\substack{u< j\leq v \\ u< k\leq v}} \begin{bmatrix} k \\ v\, j \end{bmatrix} \left(\frac{x_v}{x_jx_k} - \frac{x_k}{x_vx_j} - \frac{x_j}{x_vx_k} \right). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что для $1 \leq j,k \leq u$ выполнено неравенство $|x_j - x_k| < x_v$, равносильное неравенству $x_j^2 - 2x_jx_k + x_k^2 < x_v^2$ или

$$\frac{x_v}{x_jx_k} - \frac{x_k}{x_vx_j} - \frac{x_j}{x_vx_k} > -\frac{2}{x_v}.$$

Поскольку $x_v \geq x_j$ для $u < j \leq v$, то $|x_j - x_k| < x_v$ для любых $u < j,k \leq v$, и мы получаем то же неравенство, что и выше.

Воспользуемся им для оценки снизу величины r_v:

$$\begin{aligned} r_v \geq \frac{1}{2x_v} + \frac{1}{4d_v} \sum_{\substack{1\leq j\leq u \\ 1\leq k\leq u}} \begin{bmatrix} k \\ v\, j \end{bmatrix} \left(-\frac{2}{x_v}\right) + \frac{1}{4d_v} \sum_{\substack{u< j\leq v \\ u< k\leq v}} \begin{bmatrix} k \\ v\, j \end{bmatrix} \left(-\frac{2}{x_v}\right) \\ = \frac{1}{2x_v} - \frac{1}{2d_vx_v} \sum_{1\leq j,k\leq v} \begin{bmatrix} k \\ v\, j \end{bmatrix} \geq \frac{1}{2x_v} - \frac{d_v}{2d_vx_v} = 0. \end{aligned}$$

Для выполнения равенства $r_v = 0$ необходимо и достаточно выполнения равенств $\begin{bmatrix} k \\ v\, j \end{bmatrix} = 0$ при $1 \leq j,k \leq v$ и $[p_v, h] = 0$, т. е. $[p_v, g] = 0$. Таким образом, p_v должен быть коммутативным идеалом в g, что противоречит полупростоте g. Значит, $r_v > 0$, что и требовалось.

Отметим, что никакая метрика из класса M не может быть метрикой Эйнштейна на однородном пространстве G/H, поскольку условие эйнштейновости в случае некомпактного пространства влечет отрицательность кривизны Риччи. Для ряда пространств все ad_h-инвариантные метрики на p принадлежат классу M для некоторого разложения Картана алгебры g. Справедлива следующая

Теорема 2. *Произвольная* ad_h*-инвариантная метрика* $(\cdot,\cdot)$ *на* p *принадлежит классу* M *для некоторого разложения Картана алгебры* g *тогда и только тогда, когда для любого* ad_h*-гомоморфизма* $\phi : p'' \mapsto p'$ *выполняются следующие условия:*

1) $[\phi(x), \phi(y)] \subset h \oplus \operatorname{Ker} \phi$,

2) $\phi([x,y]|_{p''}) = [x, \phi(y)] + [\phi(x), y]$

для всех $x, y \in p''$.

При выполнении этих условий однородное пространство G/H не допускает однородной эйнштейновой метрики.

Докажем предварительно две леммы.

Лемма 3. *Пусть $p = q'' \oplus q'$, где q'' — ad_h-инвариантный модуль, q' — ортогональное дополнение к q'' относительно $B(\cdot,\cdot)$, форма Киллинга $B(\cdot,\cdot)$ отрицательно определена на q'' и положительно определена на q'. Тогда существует ad_h-гомоморфизм $\phi : p'' \mapsto p'$ такой, что любой вектор из q'' единственным образом представляется в виде $x + \phi(x)$ для некоторого $x \in p''$.*

Доказательство. В силу закона инерции квадратичных форм размерности модулей q'' и p'' совпадают. Пусть $\mathrm{Pr}_1 : q'' \mapsto p''$ и $\mathrm{Pr}_2 : q'' \mapsto p'$ — ортогональные относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ проекции модуля q'' на модули p'' и p'. Если $\mathrm{Pr}_1(x) = 0$, то $x \in p'$ и $B(x,x) \geq 0$, откуда $x = 0$, поскольку B отрицательно определена на q''. Таким образом, Pr_1 — изоморфизм модулей. Пусть $\phi = \mathrm{Pr}_2 \circ \mathrm{Pr}_1^{-1}$. Тогда очевидно, что q'' состоит из векторов вида $x + \phi(x)$. Покажем ad_h-инвариантность ϕ. Поскольку q'' ad_h-инвариантен, для любых $x \in p''$, $t \in h$ существует $y \in p''$ такой, что

$$[t, x + \phi(x)] = y + \phi(y).$$

Значит, $y = [t,x]$, $\phi(y) = [t, \phi(x)]$ и $\phi([t,x]) = [t, \phi(x)]$, что и требовалось.

Лемма 4. *Пусть $\phi : p'' \mapsto p'$ — ad_h-гомоморфизм. Тогда модуль $q'' = x + \lambda\phi(x)$ и ортогональный ему относительно $B(\cdot,\cdot)$ модуль q' являются ad_h-инвариантными. Для λ, близких к 0, $B(\cdot,\cdot)$ отрицательно определена на q'' и положительно определена на q'.*

Доказательство. Пусть $t \in h$. Тогда

$$[t, x + \lambda\phi(x)] = [t,x] + \lambda[t, \phi(x)] = [t,x] + \lambda\phi([t,x]).$$

Таким образом, q'' ad_h-инвариантен. Поскольку B биинвариантна, из равенства $B(q', [h, q'']) = 0$ следует, что $B([h,q'], q'') = 0$, т. е. q' также ad_h-инвариантен. Пусть $\mu = \|\phi\|$ в метрике $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на p. Это означает, что $B(\phi(x), \phi(x)) \leq \mu^2 |B(x,x)|$. Пусть теперь $|\lambda| < \mu^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} B(x + \lambda\phi(x), x + \lambda\phi(x)) &= B(x,x) + \lambda^2 B(\phi(x), \phi(x)) \\ &\leq B(x,x) + (\lambda\mu)^2 |B(x,x)| = (1 - (\lambda\mu)^2) B(x,x) < 0, \end{aligned}$$

т. е. B отрицательно определена на q''. Поскольку $\dim q'' = \dim p''$, то в силу закона инерции квадратичных форм B положительно определена на q'.

Доказательство теоремы 2. Пусть $(\cdot,\cdot)$ — произвольная ad_h-инвариантная метрика на p. Приведем одновременно $(\cdot,\cdot)$ и $B(\cdot,\cdot)$ к диагональному виду. Рассмотрим теперь соответствующее разложение $p = q'' \oplus q'$, где q'' и q' — ad_h-инвариантные ортогональные друг другу относительно $(\cdot,\cdot)$ и $B(\cdot,\cdot)$ модули, причем $B(\cdot,\cdot)$ отрицательно (положительно) определена на q'' (q'). Согласно закону инерции квадратичных форм $\dim q'' = \dim p''$. По лемме 3 существует ad_h-гомоморфизм модулей $\phi : q'' \mapsto q'$ такой, что $q'' = \{x + \phi(x)\}$ для $x \in p''$. Для того чтобы метрика $(\cdot,\cdot)$ принадлежала классу M, достаточно показать, что $h \oplus q''$ — подалгебра в g (она будет максимальной компактной в силу совпадения размерностей q'' и p''). Это равносильно тому, что

$$[q'', q''] \subset h \oplus q'',$$

т. е.

$$[x+\phi(x), y+\phi(y)] = [x,y] + [\phi(x),\phi(y)] + [x,\phi(y)] + [\phi(x),y] \subset h \oplus q''.$$

В силу условия теоремы $[\phi(x),\phi(y)] \subset h \oplus \mathrm{Ker}\,\phi$ и $\phi([x,y]|_{p''}) = [x,\phi(y)] + [\phi(x),y]$. Таким образом,

$$[x+\phi(x), y+\phi(y)] = [x,y]|_h + [\phi(x),\phi(y)]|_{h\oplus \mathrm{Ker}\,\phi} + [x,y]|_{p''} + \phi([x,y]|_{p''}) \subset h \oplus q'',$$

значит, $h \oplus q''$ — подалгебра и метрика $(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу M относительно разложения Картана $g = (h \oplus q'') \oplus q'$.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\phi : p'' \mapsto p'$ — некоторый ad_h-гомоморфизм. Согласно лемме 4 для близких к 0 значений λ отображение B отрицательно определено на модуле q'' и положительно — на модуле q'. Рассмотрим метрику $(\cdot,\cdot) = -B|_{q''} + B|_{q'}$. Она ad_h-инвариантна. Для того чтобы эта метрика принадлежала классу M, необходимо, чтобы модуль $h \oplus q''$ был подалгеброй g для всех λ, близких к 0, т. е.

$$[x+\lambda\phi(x), y+\lambda\phi(y)] = [x,y] + \lambda^2[\phi(x),\phi(y)] + \lambda[x,\phi(y)] + \lambda[\phi(x),y] \subset h \oplus q''$$

или, что эквивалентно,

$$\phi(([x,y] + \lambda^2[\phi(x),\phi(y)])|_{p''}) = [x,\phi(y)] + [\phi(x),y].$$

В силу произвольности λ получаем, что необходимо выполняются два соотношения:

$$[\phi(x),\phi(y)]) \subset h \oplus \mathrm{Ker}\,\phi$$

и

$$\phi([x,y]|_{p''}) = [x,\phi(y)] + [\phi(x),y],$$

что и требовалось.

То, что пространство G/H, удовлетворяющее условиям теоремы 2, не допускает однородной метрики Эйнштейна, следует из теоремы 1 и того факта, что для такой метрики на некомпактном однородном пространстве форма кривизны Риччи отрицательно определена [2, теорема 7.4].

Следствие. *Пусть не существует* ad_h*-изоморфных неприводимых модулей* $p_i \subset p''$ *и* $p_j \subset p'$. *Тогда на однородном пространстве* G/H *нет однородной эйнштейновой метрики.*

Доказательство. Существование нетривиального ad_h-гомоморфизма модулей $\phi : p'' \mapsto p'$ в силу леммы Шура влечет наличие ad_h-изоморфных неприводимых модулей $p_i \subset p''$ и $p_j \subset p'$. Следовательно, $\phi \equiv 0$. Осталось применить теорему 2.

Теорема 2 и, в частности, следствие из нее дают множество примеров некомпактных однородных пространств G/H, не допускающих однородных метрик Эйнштейна. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим реализацию алгебры $g = so(n,2)$, $n \geq 2$ в виде матричной алгебры, элементами которой служат матрицы размера $n+2$ вида $\begin{pmatrix} A & S \\ S^t & B \end{pmatrix}$, где A, B — кососимметричные матрицы размеров n и 2 соответственно, S — произвольная матрица. Пусть $h = so(n)$ — подалгебра g, представленная матрицами вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Исследуем однородное пространство G/H, где группам G и H соответствуют алгебры g и h, на наличие на нем однородных метрик Эйнштейна. Скобка Ли задается с помощью матричного умножения $[X,Y]=XY-YX$. Форма Киллинга на g задается равенством $B(X,Y)=n\cdot\operatorname{tr}XY$, где под tr подразумевается след матрицы. Пусть p_1, p_2, p_3 — модули следующего вида:

$$p_1=\left\{\begin{pmatrix}0 & x & 0\\ x^t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\quad p_2=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & y\\ 0 & 0 & 0\\ y^t & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\quad p_3=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & z\\ 0 & -z & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Отметим, что p_i попарно ортогональны и ортогональны h относительно формы Киллинга. Нетрудно также показать, что модули p_i неприводимы под действием алгебры h (это следует из неприводимости пространства $SO(n,1)/SO(n)$). Отметим, что $[p_i,p_i]\subset h$, $[p_3,h]=0$, $[p_1,p_2]\subset p_3$, $[p_1,p_3]\subset p_2$, $[p_2,p_3]\subset p_1$, $d_1=\dim p_1=d_2=\dim p_2=n$, $d_3=\dim p_3=1$. Обозначим через $T_{i,j}$ квадратную матрицу, у которой лишь два элемента $t_{ij}=t_{ji}$ равны 1, а остальные равны 0. Пусть

$$e_i=\frac{1}{\sqrt{2n}}T_{n+1,i},\quad f_i=\frac{1}{\sqrt{2n}}T_{n+2,i},\quad 1\le i\le n,\quad z_1=\frac{1}{\sqrt{2n}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Отметим, что векторы e_i, f_i и z_1 попарно ортогональны относительно B. Кроме того, $B(e_i,e_i)=B(f_i,f_i)=1$, $B(z_1,z_1)=-1$. Нетрудно получить коммутационные соотношения

$$[z_1,f_i]=\frac{1}{\sqrt{2n}}e_i,\quad [z_1,e_i]=-\frac{1}{\sqrt{2n}}f_i,\quad [e_i,f_i]=\frac{1}{\sqrt{2n}}z_1,$$
$$[e_i,f_j]=0,\quad [e_i,e_j]\subset h,\quad [f_i,f_j]\subset h \text{ при } i\ne j.$$

Очевидно, при $n\ge 2$ получаем, что модуль p_3 не изоморфен модулям p_1 и p_2 в силу несовпадения размерностей. Таким образом, пространство G/H не допускает однородных метрик Эйнштейна.

Мы более подробно рассмотрим этот пример, чтобы показать существование на G/H метрик отрицательной кривизны Риччи.

Пусть метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $(\cdot,\cdot)$ таковы, что $\langle\cdot,\cdot\rangle=B|_{p_1\oplus p_2}-B|_{p_3}$, $(\cdot,\cdot)=x_1\cdot B|_{p_1}+x_2\cdot B|_{p_2}-x_3\cdot B|_{p_3}$ для положительных x_i. Отметим, что векторы $\frac{1}{\sqrt{x_1}}e_i$, $\frac{1}{\sqrt{x_2}}f_i$ и $\frac{1}{\sqrt{x_3}}z_1$ образуют ортонормированный базис относительно $(\cdot,\cdot)$ в p. Поскольку для кривизны Риччи справедлива формула 7.38 из [2], то для ортобазиса $\{X_i\}$ относительно $(\cdot,\cdot)$ и векторов X, Y выполняется равенство

$$\operatorname{Ric}(X,Y)=-\frac{1}{2}\sum_i([X,X_i]_p,[Y,X_i]_p)-\frac{1}{2}B(X,Y)$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i,j}([X_i,X_j]_p,X)([X_i,X_j]_p,Y).$$

Так как в нашем случае $[p_1,p_2]\subset p_3$, $[p_1,p_3]\subset p_2$, $[p_2,p_3]\subset p_1$, то

$$\operatorname{Ric}(e_i,f_j)=\operatorname{Ric}(e_i,z_1)=\operatorname{Ric}(f_i,z_1)=0,$$

т. е. модули p_1, p_2 и p_3 попарно ортогональны относительно формы Риччи метрики $(\cdot,\cdot)$. Далее, $\begin{bmatrix}k\\ i\,j\end{bmatrix}=0$ при двух совпадающих индексах, а $\begin{bmatrix}3\\ 1\,2\end{bmatrix}=1/2$. Поэтому согласно лемме 2

$$r_1=-\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{4n}\left(\frac{x_1}{x_2x_3}-\frac{x_2}{x_1x_3}-\frac{x_3}{x_1x_2}\right),$$

$$r_2 = -\frac{1}{2x_2} + \frac{1}{4n}\left(\frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2}\right),$$

$$r_3 = \frac{1}{2x_3} + \frac{1}{4}\left(\frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3}\right).$$

Пусть $x_1 = 1$, $x_2 = 2+\varepsilon$, $x_3 = 1$. Тогда $r_1 < 0$, $r_2 < 0$, $r_3 < 0$ при $0 < \varepsilon < 1$. Таким образом, для рассмотренных метрик кривизна Риччи на p отрицательна.

Пример 2. Этот пример более общий, чем предыдущий. Рассмотрим вложение $H = SO(a)\times SO(b)\times SO(c)\times SO(d) \subset SO(a+b, c+d)$, характеризуемое вложением алгебры h в g, где $g = \left\{\begin{pmatrix} A & S \\ S^t & B\end{pmatrix}\right\}$, A, B — кососимметричные размера $a+b$ и $c+d$,

$$h = \left\{\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D\end{pmatrix}\right\},$$

A, B, C, D — кососимметричные размера a, b, c, d соответственно. В данном случае мы имеем четыре неприводимых модуля p_1, p_2, p_3, p_4, в p' размерностей ac, ad, bc, bd и два неприводимых модуля p_5, p_6 размерностей ab и cd. Если $a,b,c,d \geq 2$, то модули p_i и p_j при $i \leq 4$, $j \geq 5$, не являются изоморфными, что нетрудно проверить. Таким образом, пространство

$$SO(a+b, c+d)/SO(a)\times SO(b)\times SO(c)\times SO(d)$$

не допускает однородных метрик Эйнштейна при $a,b,c,d \geq 2$.

Пример 3. Аналогично предыдущему примеру разберем конструкцию, построенную с помощью симплектических групп. Пусть $Sp(a)\times Sp(b) \subset Sp(a+b)$, $Sp(c)\times Sp(d) \subset Sp(c+d)$, $Sp(a+b)\times Sp(c+d) \subset Sp(a+b, c+d)$ — стандартные вложения. Рассмотрим индуцированное ими вложение

$$Sp(a)\times Sp(b)\times Sp(c)\times Sp(d) \subset Sp(a+b, c+d).$$

В разложении p'', соответствующем разложению Картана, получим четыре неприводимых модуля и в p' — два, причем модули из p'' не будут изоморфными модулям из p'. Согласно следствию из теоремы 2 пространство

$$Sp(a+b, c+d)/Sp(a)\times Sp(b)\times Sp(c)\times Sp(d)$$

не допускает однородных метрик Эйнштейна.

Пример 4. Пусть $G = SL(n+1)$, $H = SO(n)$ с естественными вложениями $SO(n) \subset SO(n+1) \subset SL(n+1)$, $n \geq 2$. Ясно, что $g = \{A\}$ представляет собой матричную алгебру Ли, где матрицы A имеют размер $n+1$, $\operatorname{tr} A = 0$, и $h = \left\{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$, где B кососимметрична. Форма Киллинга вычисляется по формуле $B(X,Y) = 2(n+1)\cdot \operatorname{tr} XY$. Рассмотрим модули

$$p_1 = \left\{\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}, \quad p_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ x^t & 0\end{pmatrix}\right\},$$

$$p_3 = \left\{\begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & -n\lambda\end{pmatrix}\right\}, \quad p_4 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x^t & 0\end{pmatrix}\right\},$$

$\operatorname{tr} C = 0$, $C = C^t$. Нетрудно показать, что все они ad_h-инвариантны и неприводимы. Также легко проверить, что они попарно ортогональны относительно формы Киллинга и $d_1 = n^2 - 1$, $d_2 = n$, $d_3 = 1$, $d_4 = n$. Таким образом, $p'' = p_4$, $p' = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3$. Заметим, что модули p_4 и p_2 изоморфны, а именно существует однопараметрическое семейство изоморфизмов $\psi_\lambda : p_4 \mapsto p_2$,

$$\psi_\lambda \left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x^t & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda x \\ \lambda x^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Любой ad_h-гомоморфизм $\phi : p'' \mapsto p'$ в силу леммы Шура имеет вид $\phi = \psi_\lambda$ для некоторого λ. Поскольку $[p_2, p_2] \subset h$ и $[p_4, p_4] \subset h$, для проверки выполнения условий теоремы 2 достаточно показать, что

$$[x, \phi(y)] + [\phi(x), y] = 0$$

или, что равносильно,

$$[x, \psi_1(y)] + [\psi_1(x), y] = 0.$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x^t & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y^t & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^t & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $C = \psi_1(A)$, $D = \psi_1(B)$. Покажем, что $[A, D] + [C, B] = 0$ или $AD + CB = DA + BC$. Последнее равенство проверяется непосредственным умножением. Поскольку условия теоремы 2 выполняются, пространство $SL(n+1)/SO(n)$ не допускает однородных метрик Эйнштейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
2. *Бессе А. Л.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

Статья поступила 6 июля 1998 г.

г. Рубцовск Алтайского края