Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 517.11

О ТИПАХ СХОДСТВА И РЕКУРСИВНОГО ИЗОМОРФИЗМА ОГРАНИЧЕННЫХ ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. В. Литвинов

Аннотация: Изучаются типы рекурсивного изоморфизма внутри типов сходства ограниченных (т. е. принимающих конечное число значений) ЧРФ. Доказано, что тип сходства ограниченной функции состоит из конечного числа типов рекурсивного изоморфизма. Дана верхняя оценка числа типов рекурсивного изоморфизма в типе сходства ограниченной ЧРФ, зависящая от мощности области значений этой ЧРФ. Приведены формулы для числа типов рекурсивного изоморфизма в типах сходства некоторых ограниченных функций. Библиогр. 2.

Через $\mathbb{N}$ обозначим множество всех целых неотрицательных чисел; $A \setminus B$ — разность множеств A, B. Если $A \subseteq \mathbb{N}$, то дополнение $\mathbb{N} \setminus A$ обозначим через $\overline{A}$, $|A|$ — мощность множества A.

Под функцией, если не оговорено противное, понимаем частично рекурсивную функцию (ЧРФ). Термин «рекурсивная функция» будем применять к всюду определенным на $\mathbb{N}$ ЧРФ. Обозначать ЧРФ будем греческими буквами: α, β, γ, $\dots$, а рекурсивные функции — латинскими: f, g, h, $\dots$. Через $\delta\alpha$ обозначим область определения, а через $\rho\alpha$ — область значений функции α. Под рекурсивной перестановкой понимаем разнозначную рекурсивную функцию, отображающую $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$. Множество $\{x \mid \alpha(x) = a\}$ назовем a-уровнем функции α (обозначение α^a).

Если $|\rho\alpha| < \infty$, то ЧРФ α назовем *ограниченной*.

На множестве всех ЧРФ введем два отношения: сходства и рекурсивного изоморфизма. Будем говорить, что функция α *сходна* с функцией β (обозначение $\alpha \sim \beta$), если существуют рекурсивные перестановки f, g такие, что $\alpha = f^{-1}\beta g$; функция α *рекурсивно изоморфна* функции β (обозначение $\alpha \equiv \beta$), если $\alpha = f^{-1}\beta f$ для некоторой рекурсивной перестановки f. Оба введенных отношения являются отношениями эквивалентности. Классы эквивалентных элементов по эквивалентности $\sim$ назовем *типами сходства*, а по эквивалентности $\equiv$ — *типами рекурсивного изоморфизма*. Если две функции рекурсивно изоморфны, то они сходны. Обратное, вообще говоря, не верно. Таким образом, типы сходства состоят из типов рекурсивного изоморфизма. Типы сходства и рекурсивного изоморфизма ЧРФ изучались в [1, 2].

В данной работе доказано, что типы сходства ограниченных функций состоят из конечного числа типов рекурсивного изоморфизма, дана верхняя оценка числа типов рекурсивного изоморфизма в данном типе сходства ограниченной функции, а также приведены формулы для числа типов рекурсивного изоморфизма в типах сходства некоторых ограниченных функций.

Лемма. *Пусть α — ЧРФ. Тогда для всякой функции $\beta \sim \alpha$ найдется рекурсивная перестановка f такая, что $\beta \equiv f\alpha$.*

Доказательство. Пусть $\beta = g\alpha h$ для некоторых рекурсивных перестановок g, h. Обозначим через f рекурсивную перестановку hg. Тогда $h\beta h^{-1} = hg\alpha = f\alpha \equiv \beta$. Лемма доказана.

Таким образом, воздействуя внешней рекурсивной перестановкой на произвольную ЧРФ α, можно получить функцию, принадлежащую любому типу рекурсивного изоморфизма из типа сходства функции α.

Пусть α — ограниченная функция, принимающая $n \geq 1$ значений, $\rho\alpha = \{\alpha_0 < a_1 <, \dots, < a_{n-1}\}$. Введем следующие обозначения:

$$L_a^0 = \alpha^{a_0}, \quad L_\alpha^1 = \alpha^{a_1}, \dots, L_\alpha^{n-1} = \alpha^{a_{n-1}}, \quad L_\alpha^n = \overline{\delta\alpha}.$$

Пусть g — произвольная рекурсивная перестановка. Матрицу

$$g_\alpha = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)n} \end{pmatrix},$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } g(i) \in L_\alpha^j, \\ 0, & \text{если } g(i) \notin L_\alpha^j, \end{cases}$$

назовем *α-матрицей* рекурсивной перестановки g.

На множестве всех рекурсивных перестановок определим отношение эквивалентности $\approx_\alpha$ следующим образом: $g \approx_\alpha f \Leftrightarrow g_\alpha = f_\alpha$. Выберем из каждого класса эквивалентных элементов по одной рекурсивной перестановке. Их объединение обозначим через $\mathscr{P}_\alpha$.

Теорема 1. *Пусть α — ограниченная ЧРФ. Тогда тип сходства α состоит из конечного числа типов рекурсивного изоморфизма.*

Доказательство. Если $\rho\alpha = \varnothing$, то, очевидно, тип сходства α состоит из одного типа рекурсивного изоморфизма.

Пусть α — ограниченная ЧРФ, принимающая $n \geq 1$ значений, $\rho\alpha = \{a_0 < a_1 <, \dots, < a_{n-1}\}$, g — произвольная рекурсивная перестановка. Так как множество $\mathscr{P}_\alpha$ конечно, согласно лемме достаточно показать, что $g\alpha \equiv f\alpha$ для некоторой рекурсивной перестановки f из $\mathscr{P}_\alpha$. Выберем из множества $\mathscr{P}_\alpha$ элемент f такой, что $f \approx_\alpha g$. Определим рекурсивную перестановку

$$h(x) = \begin{cases} g(i), & \text{если } x = f(i), \\ & \qquad\qquad\qquad i \in \rho\alpha,\ f(i) \neq g(i), \\ f(i), & \text{если } x = g(i), \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Покажем, что $g\alpha = h^{-1}f\alpha h$. По определению $\approx_\alpha$-эквивалентности $g(i)$, $f(i)$ принадлежат одному и тому же множеству L_α^j для любого $i \in \rho\alpha$. Поэтому $h(L_\alpha^j) = L_\alpha^j$ для всех $0 \leq j \leq n$. Следовательно, $h^{-1}f\alpha h = h^{-1}f\alpha = g\alpha$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Тип сходства ограниченной функции α, принимающей $n \geq 0$ значений, состоит из конечного числа типов рекурсивного изоморфизма, не превышающего $(n+1)^n$.*

Доказательство. Если $n = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $n > 0$. В этом случае количество различных типов рекурсивного изоморфизма в типе сходства функции α не может превышать мощности множества $\mathscr{P}_\alpha$, которая, в свою очередь, равна числу классов рекурсивных перестановок по $\approx_\alpha$-эквивалентности или числу различных вариантов α-матриц. Для всякого i $(0 \leq i \leq n-1)$ i-я строка любой α-матрицы содержит в точности одну единицу, а каждый j-й $(0 \leq j \leq n)$ столбец — произвольное (но не превосходящее мощности L_α^j) число единиц. С учетом этого нетрудно подсчитать, что количество всевозможных α-матриц (а значит, и количество типов рекурсивного изоморфизма в типе сходства α) не превосходит $(n+1)^n$.

Следствие 2. *Тип сходства ограниченной рекурсивной функции α, принимающей $n \geq 1$ значений, состоит из конечного числа типов рекурсивного изоморфизма, не превышающего n^n.*

Доказательство. В случае, когда функция α рекурсивна, $L_\alpha^n = \varnothing$. Поэтому n-й столбец любой α-матрицы будет нулевым. Следовательно, число различных вариантов α-матриц не будет превышать n^n.

Теорема 2. *Пусть α — ограниченная функция, принимающая $n \geq 0$ значений, и*

(a) $(\forall i)\big(0 \leq i \leq n \Rightarrow \big|L_\alpha^i\big| \geq n\big)$;

(b)$(\forall i)(\forall j)(i \in \rho\alpha \wedge j \in \rho\alpha \wedge i \neq j \Rightarrow \alpha^i \not\equiv \alpha^j)$.

Тогда тип сходства α состоит из $(n+1)^n$ типов рекурсивного изоморфизма.

Доказательство. Если $n = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $n > 0$. Допустим, что число типов рекурсивного изоморфизма в типе сходства α строго меньше $(n+1)^n$.

Из п. (a) и следствия 1 вытекает, что $|\mathscr{P}_\alpha| = (n+1)^n$. Значит, $f_1\alpha \equiv f_2\alpha$ для некоторых различных рекурсивных перестановок f_1, f_2 из $\mathscr{P}_\alpha$. Пусть $f_1\alpha = h^{-1}f_2\alpha h$ для некоторой рекурсивной перестановки h. Так как f_1, f_2 принадлежат различным классам по эквивалентности $\approx_\alpha$, то найдется $k \in \rho\alpha$ такое, что $f_1(k) \in L_\alpha^i$, а $f_2(k) \in L_\alpha^j$ $(i \neq j)$. Поскольку согласно п. (b) α не имеет рекурсивно изоморфных уровней, для всякого $i \in \rho\alpha$ будет $h\big(L_\alpha^i\big) = L_\alpha^i$. Поэтому $h^{-1}f_2\alpha h = h^{-1}f_2\alpha \neq f_1\alpha$. Противоречие.

Теорема 3. *Пусть α — ограниченная рекурсивная функция, принимающая $n \geq 1$ значений, и*

(a) $(\forall i)\big(0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow \big|L_\alpha^i\big| \geq n\big)$;

(b)$(\forall i)(\forall j)(i \in \rho\alpha \wedge j \in \rho\alpha \wedge i \neq j \Rightarrow \alpha^i \not\equiv \alpha^j)$.

Тогда тип сходства α состоит из n^n типов рекурсивного изоморфизма.

Доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поляков Е. А.* О типах сходства и рекурсивного изоморфизма частично рекурсивных функций // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 6. С. 188–192.

2. *Rogers H.* On universal functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16, N 1. P. 39–44.

Статья поступила 15 февраля 1999 г.

г. Шуя Ивановской обл.