Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 517.9

ВОЗМУЩЕНИЕ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА

О. М. Киселев

Аннотация: Получено формальное асимптотическое решение задачи Гурса для возмущенного нелинейного уравнения Клейна — Гордона с уединенной волной в главном члене. Выведены уравнения модуляции параметров волны. Исследованы асимптотические свойства первой поправки. Библиогр. 22.

1. Введение

В статье проводится асимптотический анализ задачи Гурса для возмущенного уравнения Клейна — Гордона, известного под названием фи-четыре (ϕ^4):

$$\partial_t \partial_x \Phi - \Phi/2 + \Phi^3/2 = \varepsilon f(\Phi). \tag{1}$$

Здесь ε — малый положительный параметр.

В полосе $x \in \mathbf{R}$, $0 \le t < \varepsilon^{-1} T_0$, где $T_0 = \mathrm{const} > 0$, получено асимптотическое по $\operatorname{mod} O(\varepsilon^{2+\alpha})$, где $\alpha > 0$, решение (1) с главным членом в виде уединенной волны (кинка) невозмущенного уравнения:

$$\phi_0(z) = \tanh(z).$$

Фазовая переменная z зависит от x, t и параметра возмущения ε.

Построена первая поправка асимптотического решения при больших значениях $|z|$ (вне уединенной волны). Здесь решение имеет вид $\pm 1 + \varepsilon u + O(\varepsilon^{1+\alpha})$. Функция u определяет в главном существенную, т. е. отличную от ± 1, часть асимптотики по ε решения (1) вне уединенной волны.

Исследование задач о возмущении уединенных волн имеет большую библиографию. Наиболее полные результаты получены для диссипативных нелинейных уравнений [1–3] и для возмущений уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [4–10].

Для неинтегрируемых МОЗР волновых уравнений, каким является ϕ^4, следует отметить монографию [11], где построены сингулярные асимптотические решения нелинейных уравнений Клейна — Гордона, в частности и уравнения ϕ^4, с переменными коэффициентами. В работе [12] исследовано решение уравнения ϕ^4 в виде уединенной волны в цилиндрической системе координат. Взаимодействие кинка с локализованной волной малой амплитуды для уравнения ϕ^4 рассмотрено в [13].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00459) и Международного научного фонда (NMB000).

Асимптотические решения некоторых возмущенных нелинейных неинтегрируемых недиссипативных уравнений, с главным членом в виде уединенной волны невозмущенного уравнения изучены в [14]. В работе [14] определен главный член асимптотики при $t \ll \varepsilon^{-1}$, где ε — параметр возмущения, t — время.

Как известно, на больших временах на главный член асимптотики влияют высшие поправки теории возмущений. В настоящей работе для построения в главном асимптотики на большом масштабе времени (при $t \sim \varepsilon^{-1}$) используется метод Крылова — Боголюбова. В рамках этого метода исследуются первая и вторая поправки теории возмущений. Здесь асимптотическое решение возмущенного уравнения ϕ^4 с кинком в главном члене изучено с той же полнотой, что и для задачи о возмущении уединенных волн (солитонов) интегрируемых уравнений [4–10].

Остановимся подробнее на методе построения решения. Асимптотическое решение уравнения (1) строится в виде

$$\phi(x,t,\varepsilon) = \phi_0(z) + \varepsilon u(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^2 v(x,t,\varepsilon). \tag{2}$$

Функция z определяется формулой

$$z = -\eta(x/2 + \theta/\varepsilon) + b. \tag{3}$$

При $\varepsilon = 0$ решение уравнения (1) — кинк:

$$\phi_0 = \tanh(-\tilde{\eta}x/2 + t/(2\tilde{\eta}) + \tilde{b}).$$

В главном члене асимптотики (2), в отличие от решения уравнения ϕ^4 при $\varepsilon = 0$, параметры кинка медленно меняются. Их асимптотика строится методом Крылова — Боголюбова:

$$\eta(\tau,\varepsilon) = \eta_0(\tau) + \varepsilon\eta_1(\tau); \quad b(\tau,\varepsilon) = b_0(\tau) + \varepsilon b_1(\tau). \tag{4}$$

Здесь $\tau = t\varepsilon$ — медленное время.

Функция θ в (3) имеет вид

$$\theta(\tau,\varepsilon) = -\int\limits_0^\tau \frac{d\sigma}{2\eta^2(\sigma,\varepsilon)}. \tag{5}$$

Уравнения модуляции по τ главных членов в разложении (4) обычно (см., например, [14]) определяются из анализа уравнения для u — первой поправки в асимптотическом решении уравнения (1). Сама поправка при этом не строится. Вопрос о том, достаточно ли этих уравнений модуляции для ограниченности первой поправки асимптотического решения (2), не обсуждается. В настоящей работе построена первая поправка и доказана ее ограниченность, если главные члены параметров кинка удовлетворяют некоторым уравнениям модуляции. Этого достаточно для построения асимптотического решения (1) по $\operatorname{mod} O(\varepsilon^2)$.

Далее, из анализа второй поправки в (2) — функции v — получаются уравнения модуляции для η_1 и b_1. В результате окончательно определяется главный член асимптотического решения уравнения (1) при $t \sim \varepsilon^{-1}$.

Вне уединенной волны основной вклад вносит интеграл типа Фурье из первой поправки. В работе получено интегродифференциальное уравнение для модуляции коэффициентов Фурье первой поправки. Ядро интегрального оператора содержит произведение ядра Коши и быстро осциллирующей функции.

Аналогичный результат ранее получен для уравнения sine-Gordon [10]. В работе [15] показано, что подобные интегродифференциальные уравнения носят универсальный характер в теории возмущений солитонов уравнений, интегрируемых МОЗР. Кроме того, в [15] доказана разрешимость таких интегродифференциальных уравнений в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.

Для вывода уравнения модуляции коэффициентов Фурье первой поправки в работе проведен подробный анализ второй поправки асимптотического решения. Это также позволяет решить вопрос о точности, с которой построены главный член асимптотики и первая поправка вне кинка.

Первая и вторая поправки асимптотического решения ϕ^4 удовлетворяют линеаризованному на кинке уравнению (лϕ^4). Поэтому важное место занимает исследование линеаризованного уравнения. Ключом к этому является работа [16]. В ней построена функция Грина для уравнения, линеаризованного на кинке, неподвижном в системе координат $T = x+t$, $X = x-t$. Здесь результаты [16] используются для решения методом Фурье уравнения лϕ^4, линеаризованного на движущемся кинке с медленно меняющимися параметрами.

Обоснование построенного здесь асимптотического решения для возмущенного уравнения ϕ^4 представляется интересной задачей, но выходит за рамки настоящей работы. Заметим, что этот вопрос решен для некоторых параболических уравнений [17] и для возмущений некоторых интегрируемых уравнений со специальным начальным условием с солитоном в главном члене [18, 19].

2. Постановка задачи и основной результат

Для уравнения (1) поставим задачу Гурса

$$\Phi|_{t=0} = \tanh(-\tilde{\eta}x/2 + \tilde{b}), \quad \Phi|_{x\to-\infty} = 1. \tag{6}$$

Здесь $\tilde{\eta} > 0$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}$. Возмущение $f(\Phi)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям $f(-1) = f(1) = 0$. Требуется построить формальное асимптотическое решение по $\operatorname{mod} O(\varepsilon^{2+\alpha})$ для $\alpha > 0$ равномерно по $t = O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \to 0$.

Основной результат работы составляет

Теорема 1. *Существуют $\alpha_0 > 0$, $T_0 > 0$ такие, что при $x \in \mathbb{R}$, $0 \le t < T_0\varepsilon^{-1}$ существует формальное асимптотическое решение* (2) *задачи* (1), (6) *по $\operatorname{mod} O(\varepsilon^{2+\alpha})$, где $0 < \alpha < \alpha_0$. Это решение определено формулами* (2)–(5) *и при $\varepsilon \to 0$ имеет асимптотику*

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon u + O(\varepsilon^{1+\alpha}) \tag{7}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$, $0 \le t < T_0\varepsilon^{-1}$.

Параметры η_0, η_1, b_0 являются решениями задач Коши

$$\partial_\tau \eta_0 = C_1, \quad \eta_0|_{\tau=0} = \tilde{\eta},$$

$$\eta_0\partial_\tau b_0 - b_0\partial_\tau\eta_0 = C_2, \quad b_0|_{\tau=0} = \tilde{b},$$

$$\partial_\tau\eta_1 = -H_1(\tau), \quad \eta_1|_{\tau=0} = 0,$$

где постоянные C_1, C_2 вычисляются по формулам

$$C_1 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \frac{f(\phi_0(z))}{\cosh^2(z)}, \quad C_2 = 3\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \frac{zf(\phi_0(z))}{\cosh^2 z},$$

функция $H_1(\tau)$ *определена в* (40).

Первая поправка $u(x,t,\varepsilon)$ *определяется из* (33), (34) *и* (43), (29).

В разд. 3 приведены формулы метода Фурье для решения лϕ^4. Далее в разд. 4, 5 строится формальное асимптотическое решение задачи (1), (6).

Уравнение модуляции коэффициентов Фурье интегральной части в первой поправке получено в разд. 6.

3. Решение задачи Гурса для уравнения лϕ^4

Этот раздел состоит из двух частей. В первой части приведены формулы метода Фурье для решения уравнения лϕ^4, линеаризованного на кинке с постоянными параметрами η и b. Во второй предполагается, что параметры η и b зависят от медленного времени $\tau = t\varepsilon$. В этом случае некоторая модификация формул, полученных в первой части раздела позволяет получить формальное асимптотическое по ε решение уравнения лϕ^4.

3.1. Метод Фурье для лϕ^4. Поправки u, v в формуле (2) являются решениями задачи Гурса для неоднородного уравнения лϕ^4:

$$\partial_t\partial_x Y + Y - \frac{3}{2}\frac{Y}{\cosh^2(z)} = h(x,t). \tag{8}$$

Начальное и граничное условия в задачах для первой и второй поправок нулевые, поэтому здесь рассматривается задача с данными Гурса вида

$$Y|_{t=0} = 0, \quad Y|_{x\to-\infty} = 0. \tag{9}$$

В этом пункте всюду предполагается, что $\eta, b = \mathrm{const}$, $z = -\eta(x/2 - t/(2\eta^2)) + b$.

Известно решение однородного уравнения лϕ, зависящее от параметра $\zeta \in \mathbb{C}$ [13]:

$$\psi(x,t,\zeta) = \exp(i\zeta(x+\mu(\zeta,t))) \times \frac{3\eta^2\zeta^2\tanh^2(z) + 3i\eta\zeta(\zeta^2-\eta^2)\tanh(z) - (\zeta^4 - \zeta^2\eta^2 + \eta^4)}{(\zeta-\zeta_1^*)^2(\zeta-\zeta_2^*)(\zeta-\zeta_3^*)}, \tag{10}$$

где

$$\zeta_1 = i\eta, \quad \zeta_2 = \eta\exp\left(\frac{i\pi}{6}\right), \quad \zeta_3 = \eta\exp\left(\frac{5i\pi}{6}\right), \quad \mu(t,\zeta) = \int_0^t \frac{ds}{\zeta^2}.$$

Функция (10) получается из приведенного в [16] решения лϕ^4, зависящего от комплексного параметра. Ниже наряду с ψ понадобятся функции

$$\varphi(x,t,\zeta) = \frac{\psi(x,t,-\zeta)}{a(\zeta,\eta)}, \quad \text{где} \quad a(\zeta,\eta) = \frac{(\zeta+i\eta)^2(\zeta-\zeta_2^*)(\zeta-\zeta_3^*)}{(\zeta-i\eta)^2(\zeta-\zeta_2)(\zeta-\zeta_3)}. \tag{11}$$

Семейство функций ψ при $\zeta \in \mathbb{R}$, $\zeta = \zeta_j$, $j = 1,2,3$, и $\partial_\zeta\psi$ при $\zeta = \zeta_1$ образует базис в пространстве функций L_1, удовлетворяющих условию Дини [13].

Этот результат используется для построения решения задачи (8), (9) методом Фурье. Решение задачи (8), (9) можно представить в виде

$$Y(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta a(\zeta,\eta)\psi(x,t,\zeta)\widehat{Y}(\zeta,t) + \psi_1\widehat{Y}_0(t) + \psi_0\widehat{Y}_1(t) + \psi_2\widehat{Y}_2(t) + \text{к.с.} \tag{12}$$

Здесь и ниже под сокращением к. с. понимаются слагаемые, комплексно сопряженные написанным в формуле. Коэффициенты Фурье $\widehat{Y}$ и $\widehat{Y}_j$, $j = 0, 1, 2$, определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$i\zeta\partial_t\widehat{Y} = \breve{h}(\zeta, t), \quad \widehat{Y}|_{t=0} = 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

$$\partial_t\widehat{Y}_1 = \breve{h}_1, \quad \widehat{Y}_1|_{t=0} = 0, \tag{14}$$

$$\partial_t\widehat{Y}_0 = \breve{h}_0 - \breve{h}_1 + \frac{1}{\eta}\widehat{Y}_1, \quad \widehat{Y}_0|_{t=0} = 0, \tag{15}$$

$$\partial_t\widehat{Y}_2 = \breve{h}_2, \quad \widehat{Y}_2|_{t=0} = 0. \tag{16}$$

Базисные функции ψ_j имеют вид

$$\psi_1 = \frac{3}{2\cosh^2 z}, \quad \psi_0 = \frac{3z}{2\cosh^2 z}, \quad \psi_2 = i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\tanh z}{\cosh z}\exp\left(i\sqrt{3}\left(z + 2\eta\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\right).$$

Коэффициенты $\breve{h}$, $\breve{h}_j$ вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}\breve{h}(\zeta, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\varphi(x, t, \zeta)h(x, t),\\ \breve{h}_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\frac{h(x, t)}{\cosh^2(z)}, \quad \breve{h}_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\frac{h(x, t)z}{\cosh^2(z)},\\ \breve{h}_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\frac{h(x, t)\tanh(z)}{\cosh(z)}\exp(-i\sqrt{3}(z + 2\eta\frac{\theta}{\varepsilon})).\end{gathered} \tag{17}$$

При решении задачи Гурса с ненулевым начальным условием необходимы начальные условия для коэффициентов $\widehat{Y}$, $\widehat{Y}_j$; соответствующие формулы приведены в [13].

3.2 Асимптотическое решение лϕ^4. Если параметры кинка постоянны, то возмущения нет — тогда функция (10) является решением однородного уравнения лϕ^4. Однако в нашем случае из-за влияния возмущения параметры η и b зависят от медленного времени εt. Это приводит к изменению уравнения для коэффициента $\widehat{Y}_2$.

Представление (12) удовлетворяет (8), (9) по $\mathrm{mod}(\varepsilon)$, если $\widehat{Y}_2$ вместо уравнения из (16) удовлетворяет уравнению

$$\partial_t\widehat{Y}_2 + \left(2i\theta\sqrt{3}\partial_\tau\eta_0\right)\widehat{Y}_2 = \breve{h}_2, \quad \widehat{Y}_2|_{t=0} = \hat{g}_2|_{t=0}. \tag{18}$$

Формулы (12), (13)–(15), (17), (18) дают решение задачи (8), (9) с параметрами η, b и переменной z, определенными в (3), (4).

Замечание. Уравнение (18) при $\breve{h}_2 = 0$ определяет зависимость фазы колебаний асимптотического по $\mathrm{mod}(\varepsilon)$ локализованного около кинка осциллирующего по времени решения однородного уравнения лϕ^4 вида $\widehat{Y}_2\psi_2$. По аналогии с теорией солитонов это решение называется *бризером.*

4. Задача для первой поправки

В этом разделе построена первая поправка в формуле (2) — функция u — и уравнения модуляции $b_0(\tau)$ и η_0 в (4).

Рассмотрим задачу (1), (6). Уравнения для поправок u и v получаются стандартным образом. Подставим (2)–(5) в (1), (6). Сгруппируем члены в получившемся выражении так, чтобы разложение по степеням ε было равномерным при $x \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le O(\varepsilon^{-1})$. В результате получаем задачи для u и v.

Для первой поправки $u(x,t,\varepsilon)$ получается задача Гурса

$$\partial_t \partial_x u + u - \frac{3}{2}\frac{u}{\cosh^2(z)} = h(z,\tau), \tag{19}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x\to-\infty} = 0, \tag{20}$$

где

$$h(z,\tau) = f(\phi_0) - (\eta_0\partial_\tau b_0 - b_0\partial_\tau\eta_0)\frac{\tanh z}{\cosh^2 z} - \partial_\tau\eta_0\left[\frac{z\tanh(z)}{\cosh^2(z)} - \frac{1}{2\cosh^2(z)}\right]. \tag{21}$$

Теорема 2. *Решение задачи Гурса* (19), (20) *равномерно ограничено в полосе* $x \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le O(\varepsilon^{-1})$, *если параметры* $\eta_0(\tau)$ *и* $b_0(\tau)$ *являются решениями задач Коши*

$$\partial_\tau\eta_0 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\frac{f(\phi_0(z))}{\cosh^2(z)}, \tag{22}$$

$$\eta_0\partial_\tau b_0 - b_0\partial_\tau\eta_0 = 3\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\frac{zf(\phi_0(z))}{\cosh^2 z}, \tag{23}$$

$$\eta_0|_{\tau=0} = \tilde{\eta}, \quad b_0|_{\tau=0} = \tilde{b}.$$

Доказательство. Решение задачи (19), (20) дается формулами (12), (13)–(15), (17), (18). Перейдем к построению коэффициентов Фурье формального асимптотического решения задачи. Из формул (13)–(15), (17) следует, что коэффициент $\hat{u}_1(t)$ — решение задачи Коши

$$\partial_t\hat{u}_1 = \frac{2}{\eta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\frac{h(z,\tau)}{\cosh^2(z)}, \quad \hat{u}_1|_{t=0} = 0. \tag{24}$$

Требование ограниченности по t решения этой задачи приводит к уравнению (22). При выполнении (22) правая часть уравнения в (24) оказывается равной нулю и, следовательно, решение (24) — тождественный нуль.

Решение задачи для $\hat{u}_0$ также равно нулю, если b_0 удовлетворяет (23).

Задача Коши для $\hat{u}_2(t)$ имеет вид

$$\partial_t\hat{u}_2 + 2i\sqrt{3}\theta\partial_\tau\eta_0\hat{u}_2 = \breve{h}_2(\tau,\varepsilon), \quad \hat{u}_2|_{t=0} = 0. \tag{25}$$

Функция $\breve{h}(\tau,\varepsilon)$ такова:

$$\breve{h}_2(\tau,\varepsilon) = \frac{2}{\eta}c_1\exp\left(i2\sqrt{3}\eta\frac{\theta}{\varepsilon}\right),$$

где

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(\phi_0(z)) \frac{\tanh(z)}{\cosh(z)} \exp(-i\sqrt{3}z). \tag{26}$$

Решение задачи (25) равномерно ограничено при $0 \le t \le O(\varepsilon^{-1})$.

Внеинтегральная часть в представлении (12) для $u(x,t,\varepsilon)$ имеет вид

$$\hat{u}_2\psi_2 = B(\tau)\frac{\tanh(z)}{\cosh(z)} \exp\left(i\sqrt{3}\left(z + \frac{S(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right) + A\frac{\sqrt{3}\tanh(z)}{2\cosh(z)} \exp(2i\sqrt{3}z) + O(\varepsilon), \tag{27}$$

где

$$S = 2\eta\theta - 2\int_0^{\tau} d\sigma\theta\partial_\sigma\eta_0, \quad A = \frac{-2ic_1}{\sqrt{3}}, \tag{28}$$

а для функции $B(\tau)$ известны лишь начальные условия:

$$B(\tau)|_{\tau=0} = B_0 = \frac{-2ic_1}{\sqrt{3}}.$$

Уравнение для $B(\tau)$ выписывается при построении следующего члена асимптотики — функции $v(x,t,\varepsilon)$. Оно является одним из необходимых условий для ограниченности $v(x,t,\varepsilon)$ в рассматриваемой полосе плоскости x,t.

Интегральную составляющую в представлении (12) решения задачи (21), (22) можно записать в виде

$$u_{\text{н}} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta a(\zeta,\eta)\psi(x,t,\zeta)\widehat{W}_{\text{н}}(\zeta,\tau,\varepsilon) + w(z,\eta,\varepsilon) + O(\varepsilon),$$

где

$$\widehat{W}_{\text{н}}|_{\tau=0} = \left.\frac{G(\zeta,\eta,\tau)}{1+(\zeta/\eta)^2}\right|_{\tau=0}, \tag{29}$$

$$G(\zeta,\eta,\tau) = \frac{2}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} dz h(z,\tau) g(z,\zeta,\eta), \tag{30}$$

$$g(z,\zeta,\eta) = \varphi(x,t,\zeta)\exp\left(i\zeta\left(\mu(\zeta,t) - 2\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\right). \tag{31}$$

Функция $w(z)$ гладкая, быстро убывает по z и представима в виде

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta a(\zeta,\eta)\frac{G(\zeta,\eta,\tau)}{1+(\zeta/\eta)^2}\exp\left(i\frac{\zeta}{\eta}z\right)\tilde{\psi}(\zeta,z,\eta), \tag{32}$$

где

$$\tilde{\psi}(\zeta,z,\eta) = \psi(x,t,\zeta)\exp\left(-i\zeta\left(\mu(\zeta,t) - 2\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\right).$$

Функция $\widehat{W}_{\text{н}}(\zeta,\tau,\varepsilon)$ здесь определена при $\tau = 0$. При $\tau > 0$ эта функция определяется из требования отсутствия секулярных членов в интегральной части представления (12) для второй поправки. Уравнение модуляции $\widehat{W}_{\text{н}}$ по τ получено в разд. 6. Существование решений подобных уравнений и их свойства исследовались в работе [15] в связи с теорией возмущений солитонов интегрируемых уравнений. Здесь сформулируем свойства, которым удовлетворяет решение уравнения модуляции — функция $\widehat{W}_{\text{н}}(\zeta,\tau,\varepsilon)$.

Лемма 1 [15]. *Существуют* α_0 *и* T_0, $0 < \alpha_0 < 1$, $T_0 > 0$, *такие, что при* $0 \le \tau < T_0$ *функция* $\widehat{W}_{\text{н}}(\zeta,\tau,\varepsilon)$ *интегрируема по* ζ *и удовлетворяет по* ζ *условию Гёльдера степени* α, *где* $0 < \alpha < \alpha_0 < 1$.

При этих условиях функция $u_{\text{н}}$ равномерно ограничена в полосе $x \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le O(\varepsilon^{-1})$. Теорема доказана.

Следствие. *Решение задачи* (19), (20) *имеет вид*

$$u(x,t,\varepsilon) = w(z) + A\frac{\sqrt{3}\tanh(z)}{2\cosh(z)}\exp(2i\sqrt{3}z) + U(z,\tau,\varepsilon) + W_{\text{н}}(x,t,\varepsilon) + \text{к.с.} + O(\varepsilon). \tag{33}$$

Первые два слагаемых в (33) — решения неоднородного лϕ^4. Третье и четвертое слагаемые — асимптотические решения однородного уравнения лϕ^4. Зависимость от медленного времени τ этих решений определяется из условия отсутствия секулярных членов во второй поправке.

Функция $U(z,\tau,\varepsilon)$ — локализованное по z осциллирующее по времени асимптотическое решение однородного уравнения лϕ^4 — бризер:

$$U(z,\tau,\varepsilon) = B(\tau)\frac{\tanh(z)}{\cosh(z)}\exp\left(i\sqrt{3}\left(z + \frac{S(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right).$$

Функция $W_{\text{н}}$ имеет вид

$$W_{\text{н}}(x,t,\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta a(\zeta,\eta)\psi(x,t,\zeta)\widehat{W}_{\text{н}}(\zeta,\tau,\varepsilon). \tag{34}$$

Она определяет существенную (отличную от ± 1) часть асимптотики по ε вне кинка (при $|z| \to \infty$). При больших значениях времени $1 \ll t \le C\varepsilon^{-1}$ правая часть в формуле (34) представляет собой интеграл с быстро осциллирующей фазой. Пользуясь свойствами $\widehat{W}_{\text{н}}$, сформулированными в лемме 1, можно показать, что этот интеграл мал.

5. Решение задачи для второй поправки

В этом разделе получены уравнения модуляции первых поправок параметров кинка. При этом уточняется внеинтегральная часть первой поправки $u(x,t,\varepsilon)$: получено уравнение модуляции $B(\tau)$ — амплитуды бризера.

Задача для $v(x,t,\varepsilon)$ имеет вид

$$\partial_t\partial_x v + \left(1 - \frac{3}{2\cosh^2 z}\right)v = F(x,t,\varepsilon), \tag{35}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v|_{x\to-\infty} = 0, \tag{36}$$

где

$$F(x,t,\varepsilon) = f'(\phi_0(z))u - \partial_\eta\partial_x\phi_0\partial_\tau\eta_1 - \partial_b\partial_x\phi_0\partial_\tau b_1 - \frac{3}{2}\phi_0 u^2 - \partial_\tau\partial_x u.$$

Теорема 3. *Внеинтегральная часть в представлении (12) решения задачи (35), (36) равномерно ограничена при $x \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le O(\varepsilon^{-1})$, если η_1, b_1 и B удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{i2\eta}{\sqrt{3}}\partial_\tau B + c_2 B = 0, \tag{37}$$

$$\partial_\tau \eta_1 = -H_1(\tau), \tag{38}$$

$$\partial_\tau b_1 \eta_0 + \partial_\tau b_0 \eta_1 - \partial_\tau \eta_1 b_0 - \partial_\tau \eta_0 b_1 = 3H_0(\tau) \tag{39}$$

и начальным условиям

$$B|_{\tau=0} = \frac{-2i}{\sqrt{3}}c_1, \quad b_1|_{\tau=0} = 0, \quad \eta_1|_{\tau=0} = 0.$$

Здесь постоянная c_1 определена в (26),

$$c_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\tanh^2(z)}{\cosh^2(z)} f'(\phi_0(z)),$$

$$\begin{aligned} H_1(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\cosh^2(z)} \Bigg(f'(\phi_0)\Bigg(A\frac{\tanh(z)}{\cosh(z)}\exp(2i\sqrt{3}z) + w(z) + \text{к.с.}\Bigg) \\ - \partial_\tau \partial_x \Bigg(w(z) + A\frac{\tanh(z)}{\cosh(z)}\exp(2i\sqrt{3}z) + \text{к.с.}\Bigg) \\ - \frac{3}{2}\tanh(z)\Bigg(w(z) + A\frac{\tanh(z)}{\cosh(z)}\exp(2i\sqrt{3}z) + \text{к.с.}\Bigg)^2\Bigg); \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} H_0(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \frac{z}{\cosh^2(z)} \Bigg(f'(\phi_0)\Bigg(A\frac{\tanh(z)}{\cosh(z)}\exp(2i\sqrt{3}z) + w(z) + \text{к.с.}\Bigg) \\ - \partial_\tau \partial_x \Bigg(w(z) + A\frac{\tanh(z)}{\cosh(z)}\exp(2i\sqrt{3}z) + \text{к.с.}\Bigg) \\ - \frac{3}{2}\tanh(z)\Bigg(w(z) + A\frac{\tanh(z)}{\cosh(z)}\exp(2i\sqrt{3}z) + \text{к.с.}\Bigg)^2 + |B|^2\frac{\tanh^3(z)}{\cosh^2(z)}\Bigg), \end{aligned}$$

величина A определена в (28), функция $w(z)$ вычисляется из (11), (30)–(32).

Доказательство. Решение задачи (35), (36) будем искать в виде (12). Рассмотрим коэффициенты Фурье $\hat{v}$ во внеинтегральных слагаемых. Поставим задачу Коши для $\hat{v}_2$: $\partial_t \hat{v}_2 + 2i\sqrt{3}\theta\partial_\tau\eta_0\hat{v}_2 = \breve{F}_2(t,\varepsilon)$, $\quad \hat{v}_2|_{t=0} = 0$. Условие ограниченности v_2 приводит к уравнению (37) для $B(\tau)$. В уравнение (37) включены те члены из правой части уравнения для $\hat{v}_2$, частота осцилляций по t которых совпадает с собственной частотой колебаний решений уравнения для $\hat{v}_2$. Остальные слагаемые в правой части уравнения для $\hat{v}_2$ либо осциллируют по t, но не являются резонансными, либо равны $o(1)$ при $t \in [\varepsilon^{-\gamma}c_0, \varepsilon^{-1}T_0)$, где $0 < \gamma < 1$, $c_0 > 0$. Эти слагаемые не приводят к секулярным членам в решении $v(x,t,\varepsilon)$.

Коэффициент $\hat{v}_1$ — решение задачи Коши $\partial_t \hat{v}_1 = \breve{F}_1(t,\varepsilon)$, $\quad \hat{v}_1|_{t=0} = 0$. Из структуры правой части следует, что решение этой задачи равномерно ограничено на рассматриваемом интервале времени t, если η_1 удовлетворяет уравнению (38).

Рассмотрим задачу Коши для $\hat{v}_0$:

$$\partial_t \hat{v}_0 = \breve{F}_0(t,\varepsilon) - \breve{F}_1(t,\varepsilon) + \frac{1}{\eta_0}\hat{v}_1, \quad \hat{v}_0|_{t=0} = 0. \tag{41}$$

В правой части уравнения (41) есть неосциллирующие по t слагаемые, имеющие порядок $O(1)$. Чтобы они не приводили к секулярным членам в решении, приравняем их сумму к нулю. В результате получается уравнение модуляции для $b_1(\tau)$ (39).

В настоящей работе определяется лишь главный член формальной асимптотики (2). Функция $b_1(\tau)$ не участвует в его построении. Уравнения (37)–(39) — достаточные условия ограниченности решения (35), (36) во внеинтегральной части его представления вида (18). Теорема доказана.

6. Модуляция коэффициента Фурье в интегральной части первой поправки

Здесь получено уравнение модуляции коэффициента Фурье интегральной составляющей решения задачи для первой поправки.

Интегральная составляющая определяет асимптотическое по ε решение задачи (1), (6) в области $|z| \geq \varepsilon^{-\gamma}$, где $\gamma > 0$.

Коэффициент Фурье $\widehat{W}_{\text{н}}$ при $\tau > 0$ еще не определен. Его зависимость от τ выясняется при анализе интегральной составляющей решения задачи (35), (36). Этот анализ аналогичен проведенному в [10].

Обозначим интегральную часть в представлении асимптотического решения задачи для второй поправки v через $V_{\text{н}}(x,t,\varepsilon)$:

$$V_{\text{н}}(x,t,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta a(\zeta,\eta)\psi(x,t,\zeta)\widehat{V}_{\text{н}}(\zeta,\tau,\varepsilon). \tag{42}$$

В (42) могут содержаться секулярные члены такие, что при $|z| \geq \varepsilon^{-\gamma}$, где $\gamma > 0$, величины $\varepsilon^2 v(x,t,\varepsilon)$ и $\varepsilon u(x,t,\varepsilon)$ одного порядка. Причина появления секулярных членов в (42) стандартна. В правой части уравнения для v содержатся решения однородного уравнения лϕ^4. Их можно представить в виде интеграла типа Фурье из формулы (12). В результате во второй поправке секулярными будут те слагаемые, коэффициенты Фурье которых растут пропорционально времени t. Если их не уничтожить, разложение (2) будет неравномерно по ε при $t = O(\varepsilon^{-1})$ и соответственно будет неверна формула (7). Секулярные члены уничтожаются модуляцией по τ коэффициента $\widehat{W}_{\text{н}}$.

Теорема 4. *Пусть $\widehat{W}_{\text{н}}(\zeta,\tau,\varepsilon)$ — интегрируемая по ζ функция, являющаяся решением задачи Коши для уравнения*

$$i\zeta\partial_\tau \widehat{W}_{\text{н}} + M(\zeta,\eta)\widehat{W}_{\text{н}} = 2\exp(-i\varepsilon^{-1}\tau\omega(\tau,\zeta))K(\zeta,\eta) \times v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda \widehat{W}_{\text{н}}(\lambda,\tau,\varepsilon)}{\sinh(\pi(\zeta-\lambda)/\eta)}\exp(i\varepsilon^{-1}\tau\omega(\tau,\lambda)) \tag{43}$$

с начальным условием (29). Тогда существуют $T_0 > 0$ и $0 < \alpha_0 < 1$ такие, что при $0 \leq t < T_0\varepsilon^{-1}, x \in \mathbb{R}$ формальное асимптотическое решение по $\mathrm{mod}(\varepsilon^{2+\alpha})$ задачи (1), (6) при $\varepsilon \to 0$ имеет имеет асимптотику (7), где $0 < \alpha < \alpha_0$. Первая поправка $u(x,t,\varepsilon)$ имеет вид (33).

Коэффициенты уравнения (43) *определяются формулами*

$$M(\zeta,\eta)=\eta_0' i\zeta\frac{\partial_\eta a(\zeta,\eta)}{a(\zeta,\eta)}-N,\quad K(\zeta,\eta)=\eta_0'\zeta\frac{\partial_\eta a(\zeta,\eta)}{a(\zeta,\eta)}+iP,$$

где

$$N=\frac{1}{2}\big(\lim_{z\to-\infty}f'(\phi_0(z))+\lim_{z\to\infty}f'(\phi_0(z))\big),\ P=\frac{1}{2}\big(\lim_{z\to\infty}f'(\phi_0(z))-\lim_{z\to-\infty}f'(\phi_0(z))\big).$$

Функция ω *имеет вид*

$$\omega(\tau,\lambda)=-2\frac{\theta(\tau,\eta)}{\tau}\lambda+\frac{1}{\lambda}.$$

Замечание. Асимптотика по ε при $\varepsilon^{1-\delta}<\tau<T_0$, где $0<\delta<1$, формального асимптотического решения (2) задачи (1), (6) в области $|z|\geq\varepsilon^{-\gamma}$ при $\gamma>0$ определяется интегралом (34), асимптотика интеграла $W_{\text{н}}$ при $\varepsilon\to\infty$ определяется стационарными точками фазы экспоненты в $\psi(x,t,\zeta)$ [20, с. 333]. Такие точки существуют при $x>0$. Используя гёльдеровость коэффициента $\widehat{W}_{\text{н}}$ по ζ, можно дать асимптотическую оценку интеграла (34):

$$W_{\text{н}}\sim\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)^{\alpha/2}\quad\text{при}\quad\varepsilon^{1-\delta}<\tau<T_0,\quad x/t=\text{const}>0.$$

При $x<0$ стационарных точек нет и поэтому

$$W_{\text{н}}\sim\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)^{\alpha}\quad\text{при}\quad\varepsilon^{1-\delta}<\tau<T_0,\quad x/t=\text{const}<0.$$

Таким образом, функция u в области $x/t=\text{const}>0$ больше по порядку величины ε, чем остаток асимптотики в формуле (7).

Доказательство. В правой части (35) объединим слагаемые, имеющие одинаковую структуру зависимости от пространственной переменной:

$$\begin{aligned}F&=g_1(z,\tau)+NW_{\text{н}}+P\tanh(z)W_{\text{н}}+g_2(z,\tau)W_{\text{н}}\\&\quad+g_3(z,\tau)\exp(i\sqrt{3}(2z+S/\varepsilon))+g_4(z,\tau)\exp(2i\sqrt{3}(2z+S/\varepsilon))\\&\quad+g_5(z,\tau)\exp(2i\sqrt{3}z+i\sqrt{3}S/\varepsilon)W_{\text{н}}+\frac{3}{2}\tanh(z)W_{\text{н}}^2\\&\quad-\eta_0'\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta i\zeta\partial_\eta\big[a(\zeta,\eta)\bar\psi(x,t,\zeta)\big]\widehat{W}_{\text{н}}(\zeta,\tau,\varepsilon)-\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta i\zeta a(\zeta,\eta)\bar\psi(x,t,\zeta)\partial_\tau\widehat{W}_{\text{н}}(\zeta,\tau,\varepsilon)\\&\quad-b_0'\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta i\zeta a(\zeta,\eta)\partial_b\big[\bar\psi(x,t,\zeta)\big]\widehat{W}_{\text{н}}(\zeta,\tau,\varepsilon)+\text{к.с.}\end{aligned}\tag{44}$$

Здесь g_i — гладкие по z быстро убывающие при $|z|\to\infty$ функции; $\bar\psi=\partial_x\psi/(i\zeta)$.

Коэффициент Фурье $\widehat{V}_{\text{н}}(\zeta,t,\varepsilon)$ состоит из нескольких слагаемых, каждое из которых соответствует тому или иному слагаемому в (44). Интегральную часть в решении задачи (35), (36) можно представить в виде интегралов типа Фурье от слагаемых, составляющих коэффициент Фурье $\widehat{V}_{\text{н}}$. Слагаемые в этой сумме являются кратными интегралами типа Фурье. Это можно заметить, если учесть, что, например, $W_{\text{н}}$ — однократный интеграл типа Фурье и этот интеграл содержится в выражении для соответствующих слагаемых в коэффициенте $\widehat{V}_{\text{н}}$.

Секулярные члены в интегральной части решения задачи (35), (36) появляются из-за тех слагаемых из правой части (44), которые при больших значениях $|z|$ имеют асимптотику $\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta\upsilon(\zeta)\widehat{W}_{\text{н}}\exp(i(x\zeta+t/\zeta))$, где $\upsilon(\zeta)$ — гладкая ограниченная по ζ функция.

Каждый такой член из правой части приводит к появлению слагаемого порядка $O(t)$ в коэффициентах Фурье интегральной части решения (35), (36). Это второе, третье, девятое и десятое слагаемые из (44). Уравнение (43) получается из требования равенства нулю суммы таких секулярных членов. Вычисления при выводе этого уравнения аналогичны сделанным в [10].

Покажем, что остальные слагаемые в (44) не приводят к секулярным членам в $V_{\text{н}}$.

Интегральная часть решения лϕ^4 с правой частью $g_1(z,\tau)$ имеет такой же вид, как и $u_{\text{н}}$, и соответственно оценивается величиной $O(1)$ при $x\in\mathbb{R}$, $0\le t<\varepsilon^{-1}\mathrm{const}$.

Кратный интеграл Фурье, соответствующий решению лϕ^4 с правой частью $g_2W_{\text{н}}$, рассматривался в [10]. Он оценивается величиной $O(1)$ при $x\in\mathbb{R}$, $0\le t<\varepsilon^{-1}\,\mathrm{const}$.

Интегралы Фурье, получающиеся в интегральной части решения лϕ^4 с правыми частями вида $g_3\exp(2i\sqrt{3}z+iS/\varepsilon)$ и $g_4\exp(4i\sqrt{3}z+2iS/\varepsilon)$, оцениваются так же, как в [21]. Такие интегралы имеют порядок $O(1)$ при $x\in\mathbb{R}$, $0\le t<\varepsilon^{-1}\,\mathrm{const}$.

Рассмотрим интегральную часть решения лϕ^4 с нулевыми граничным и начальным условиями и правой частью $g_5\exp(2i\sqrt{3}z+iS/\varepsilon)W_{\text{н}}$. Обозначим коэффициент Фурье этого решения через $\widehat{V}_5$. Задача Коши для $\widehat{V}_5$ имеет вид

$$i\zeta\partial_t\widehat{V}_5=\exp(i\sqrt{3}S/\varepsilon)\exp(-i\varepsilon^{-1}\tau\omega(\zeta,\tau)) \times\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda a(\lambda,\eta)\kappa(\zeta-\lambda,l,\zeta)\widehat{W}_{\text{н}}(\lambda,\tau,\varepsilon)\exp(i\varepsilon^{-1}\tau\omega(\lambda,\tau)),\quad \widehat{V}_5|_{t=0}=0, \tag{45}$$

где $\kappa(n,\lambda,\zeta)$ — гладкая быстро убывающая при $|n|\to\infty$ функция.

Для оценки интегральной части решения здесь тоже воспользуемся результатами [21]. Обозначим интеграл из (45) через I_4. При $0\le\tau<\varepsilon^{\gamma}$ для любого $\gamma\in(0,1)$ интеграл I_4 оценивается величиной $O(1)$. При больших значениях τ главный член асимптотики интеграла в (45) вычисляется с помощью метода, изложенного в [20, с. 333]. В результате при $\tau>\varepsilon^{\gamma}$ получим

$$I_4=\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)^{\alpha/2}\exp(-i\varepsilon^{-1}\tau\omega(\zeta,\tau))\sum_{1,2}C_{1,2}\kappa(\zeta-\lambda_{1,2})\exp(i\varepsilon^{-1}\tau\omega_{1,2}) +O\left(\frac{1}{1+(\tau/\varepsilon)^{\alpha}}\right)\kappa_2(\zeta).$$

Здесь $\lambda_{1,2}$ — стационарные точки фазы в интеграле I_4, $\omega_{1,2}$ — значения фазы в стационарных точках, $C_{1,2}$ — некоторые постоянные. Подставим эту формулу в выражение для интегральной части решения лϕ^4. Асимптотику главного члена посчитаем так же, как в [21]. Вклад главного члена из этой формулы в решение равен $O(1)$.

Вклад в интегральную часть решения V_5 остатка асимптотики имеет вид

$$J_3=\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta a(\zeta,\eta)\psi(x,t,\zeta)\frac{\varepsilon^{-1}}{i\zeta}\int\limits_0^{\tau} d\sigma O\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{\alpha}}\right)\kappa_2(\zeta).$$

Здесь $\kappa_2(n)$ — гладкая быстро убывающая при $|n| \to \infty$ функция. Выберем $\gamma \geq \alpha$. После интегрирования по σ получаем, что J_3 равен $O(\varepsilon^{\alpha-1})$. Функция V_5 — интеграл типа Фурье по ζ — имеет порядок $O(\varepsilon^{\alpha-1})$ при $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq t < \varepsilon^{-1}T_0$. Таким образом, это слагаемое не является секулярным.

Заметим, что при $\zeta \to 0$ подынтегральная функция в интеграле по ζ ограничена. Это можно показать, выделив интеграл по малой окрестности точки $\zeta = 0$, в которой не содержатся стационарные точки фазы экспоненты. Проинтегрируем по частям внутренний интеграл по σ. Этот интеграл равен $O(\zeta)$ в окрестности $\zeta = 0$. Поэтому, несмотря на множитель $1/\zeta$, подынтегральная функция ограничена при $\zeta \to 0$.

Осталось рассмотреть интеграл типа Фурье, соответствующий слагаемому $\tanh(z)W_{\text{н}}^2$ в правой части уравнения для второй поправки. Чтобы воспользоваться результатами об асимптотике интегралов [20–22], необходимо сделать некоторые преобразования.

Здесь интеграл Фурье имеет вид

$$J(x,t,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta a(\zeta,\eta)\psi(x,t,\zeta)\frac{1}{\zeta}\int\limits_{0}^{t} ds \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\bar{\psi}(y,s,\zeta)\tanh(-\eta(x/2+\theta)+b)W_{\text{н}}^2(y,s,\varepsilon). \quad (46)$$

Внутренний интеграл по y в (46) обозначим через β. Выделим из функций ψ, $\bar{\psi}$ осциллирующие по y экспоненты. Сделав преобразование Фурье по y, в результате получим

$$\beta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\ v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda a(\kappa,\eta)a(\lambda,\eta)\widehat{W}_{\text{н}}(k,\sigma,\varepsilon)\widehat{W}_{\text{н}}(\lambda,\sigma,\varepsilon) \times \frac{A\exp(i\sigma\varepsilon^{-1}(\omega(\lambda,\sigma)+\omega(k,\sigma)-\omega(\zeta,\sigma)))}{\sinh(\pi(\zeta-\lambda-k)/\eta)}$$
$$+ C\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\widehat{W}(k,\sigma,\varepsilon)\widehat{W}(\zeta-k,\sigma,\varepsilon)\exp(i\varepsilon^{-1}\sigma(\omega(k,\sigma)+\omega(\zeta-k,\sigma)-\omega(\zeta,\sigma)))$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda\widehat{W}_{\text{н}}(k,\sigma,\varepsilon)\widehat{W}_{\text{н}}(\lambda,\sigma,\varepsilon)a(\kappa,\eta)a(\lambda,\eta)\chi(\zeta-\lambda-k) \times \exp(i\sigma\varepsilon^{-1}(\omega(\lambda,\sigma)+\omega(k,\sigma)-\omega(\zeta,\sigma))).$$

Здесь $A, C = \text{const}$, $\sigma = s\varepsilon$, $\chi(n)$ — гладкая быстро убывающая при $|n| \to \infty$ функция.

При $0 \leq \tau \leq \text{const}\,\varepsilon^\gamma$, $\gamma > 0$ будет $\beta = O(1)$. При $c_0\varepsilon^\gamma \leq \tau \leq c_1$, где $c_0 > 0$, $0 < \gamma < 1$. Используя метод стационарной фазы [22], получим асимптотику

$$\beta = \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^{\alpha/2}\sum_{1,2} C_{1,2}\kappa_{1,2}(\zeta,\tau)\exp(i\varepsilon^{-1}\sigma(\omega(\lambda_{1,2},\sigma) + \omega(\zeta-\lambda_{1,2},\sigma)-\omega(\zeta,\sigma)))O\left(\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^{\alpha}\right)\kappa_3(\zeta),$$

где $\kappa_{1,2,3}(\zeta,\sigma)$ — гладкие по ζ быстро убывающие при $|\zeta|\to\infty$ функции, $C_{1,2}$ — некоторые постоянные, $\lambda_{1,2}$ — стационарные точки функции $\omega(\lambda,\sigma)$ по λ. Используя это представление, так же, как и при вычислении функции V_5, получим

$$J(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\alpha-1})\quad \text{при}\quad x\in\mathbb{R},\ 0\le t<\varepsilon^{-1}\,\mathrm{const}\,.$$

Таким образом, J не является секулярным членом. Этим заканчивается доказательство теоремы.

Благодарю Л. А. Калякина за обсуждение результатов и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А.* Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
2. *Вакуленко С. А.* Динамический принцип Уизема и его обоснование // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1990. Т. 179. С. 46–51.
3. *Данилов В. Г.* Асимптотические решения типа бегущих волн для полулинейных параболических уравнений с параметром // Мат. заметки. 1990. Т. 18, № 2. С. 118–150.
4. *Карпман В. И., Маслов Е. М.* Эволюция солитонов модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза под воздействием возмущения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 2. С. 581–585.
5. *McLaughlin D. W., Scott A. S.* Pertubation analysis of fluxon dynamics // Phys. Rev. A. 1977. V. 18, N 4. P. 1652–1697.
6. *Маслов Е .М.* К теории возмущений солитонов во втором приближении // Теор. и мат. физика. 1980. Т. 42. С. 362–373.
7. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Асимптотические солитонообразные решения с малой дисперсией // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 63–126.
8. *Kivshar Yu. S., Malomed B. A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems // Rev. Modern Phys. 1989. V. 61, N 4. P. 763–915.
9. *Калякин Л. А.* Возмущение солитона КдФ // Теор. и мат. физика. 1992. Т. 92, № 1. С. 62–77.
10. *Киселев О. М.* Асимптотика кинка возмущенного уравнения sine-Gordon // Теор. и мат. физика. 1992. Т. 93, № 1. С. 39–40.
11. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
12. *Malomed B., Maslov E. M.* Collapse of a spherical kink in the fi-four model // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 160. P. 233–236.
13. *Kiselev O. M.* The small breather-kink interaction in the ϕ^4-model // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5, N 1. P. 29–46.
14. *Вакуленко С. А.* Действие возмущения на солитоны некоторых нелинейных уравнений // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 89. С. 91–96.
15. *Калякин Л. А.* К задаче о первой поправке в теории возмущений солитонов // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 7. С. 51–76.
16. *Flesch R. J., Trullinger S. E.* Green's functions for nonlinear Klein — Gordon kink perturbation theory // J. Math. Phys. 1987. V. 28, N 7. P. 1619–1631.
17. *Вакуленко С. А.* Структурообразование и волны в нелинейных диссипативных неоднородных средах: Дис. … д-ра. физ.-мат. наук. СПб., 1992.
18. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Об условиях типа Гюгонио для бесконечно узких решений уравнения простых волн // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 5. С. 172–182.
19. *Maslov V. P., Omel'anov G. A.* Quasi-linear nonstationary equations and evolution of interior boundary layers: asymptotical soliton-like solutions // BAIL-IV. Dublin: Boole Press, 1986. P. 362–367.
20. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
21. *Калякин Л. А.* Асимптотика двойного интеграла типа Фурье из теории возмущения солитонов // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 1010–1024.
22. *Федорюк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

Статья поступила 22 декабря 1995 г.

г. Уфа
okiselev@nkc.bashkiria.su