Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 512.542

О РЕГУЛЯРНЫХ АВТОМОРФИЗМАХ ПОРЯДКА 3 И ПАРАХ ФРОБЕНИУСА

А. Х. Журтов

Аннотация: Группа A автоморфизмов группы G называется *регулярной*, если каждый неединичный автоморфизм из A оставляет неподвижным только тривиальный элемент из G. Доказывается, что периодическая регулярная группа автоморфизмов абелевой группы, порожденная элементами порядка 3, конечна. Это дает ответ на вопрос 14.57б) из «Коуровской тетради», поставленный В. Д. Мазуровым. Кроме того, доказывается гипотеза В. П. Шункова о нильпотентности ядра группы Фробениуса, дополнение которой содержит элемент порядка 3, и изучается строение пар Фробениуса (G, H), в которых группа H содержит элемент порядка 3. Библиогр. 7.

Введение

Автоморфизм группы G называется *регулярным* автоморфизмом, если он оставляет неподвижным только тривиальный элемент из G. Группа A автоморфизмов группы G называется *регулярной*, если каждый неединичный автоморфизм из A является регулярным автоморфизмом. В работе доказывается, что периодическая регулярная группа автоморфизмов абелевой группы, порожденная элементами порядка 3, конечна. Это дает ответ на вопрос 14.57 б) из «Коуровской тетради» [1], поставленный В. Д. Мазуровым. Более точно, мы доказываем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть A — нетривиальная регулярная группа автоморфизмов абелевой группы G, порожденная элементами порядка 3. Если выполнено любое из следующих условий:*

а) *группа A периодическая,*

б) *группа G содержит нетривиальный элемент конечного порядка, и порядок произведения любых двух элементов порядка 3 из A конечен,*

то группа A конечна и изоморфна группе порядка 3, группе $SL_2(3)$ порядка 24 или группе $SL_2(5)$ порядка 120.

Эта теорема, в частности, дает возможность изучить строение некоторых расщепляемых групп.

Теорема 2. *Пусть X — собственная подгруппа группы H и $M = H \setminus X$. Пусть порядок каждого элемента из M конечен и взаимно прост с порядком любого элемента конечного порядка из X. Тогда подгруппа X нормальна в H и H/X содержит такую конечную нормальную подгруппу N/X, что*

а) *множество $H \setminus N$ не содержит элементов порядка 3,*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00550).

б) *либо группа* N/X *изоморфна* $SL_2(3)$ *или* $SL_2(5)$, *либо ее порядок — делитель числа* 3.

Более того, если $|N/X| = 3$, *то группа* X *двуступенно нильпотентна. Если* $|N/X| > 3$, *то* X *абелева.*

Следующая теорема доказывает гипотезу В. П. Шункова о нильпотентности ядра группы Фробениуса, дополнительный множитель которой содержит элемент порядка 3.

Теорема 3. *Пусть* FH *— группа Фробениуса с ядром* F *и периодическим дополнением* H, *содержащим элемент* a *порядка* 3. *Тогда группа* F *двуступенно нильпотентна, группа* $\langle a^H \rangle$ *конечна и либо центр группы* H *содержит инволюцию, а группа* F *коммутативна, либо* $\langle a \rangle$ *— нормальная подгруппа группы* H.

Напомним, что согласно В. П. Шункову [2] *группой Фробениуса с ядром* F *и дополнением* H называется полупрямое произведение $G = FH$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) H — собственная подгруппа в G, и $H \cap H^f = 1$ для любого неединичного элемента $f \in F$,

б) $F \setminus \{1\} = G \setminus \{H^f | f \in F\}$.

Из этой теоремы вытекает утвердительный ответ на следующий вопрос В. П. Шункова из «Коуровской тетради» [1, вопрос 6.56] для случая, когда простое число p равно трем.

Пусть $G = F\langle a \rangle$ — группа Фробениуса, причем дополнение $\langle a \rangle$ имеет простой порядок p.

(а) Если G бинарно конечна, то будет ли она локально конечной?

(б) Если подгруппы $\langle a, a^g \rangle$ конечны для всех $g \in G$, то будет ли F локально конечной группой?

На самом деле справедливо более общее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* G *— группа Фробениуса с ядром* F *и дополнением* H, *порожденная конечным множеством элементов порядка* 3. *Если выполнено любое из условий:*

а) *дополнение* H *периодично,*

б) *ядро* F *содержит нетривиальный элемент конечного порядка, и произведение любых двух элементов порядка* 3 *из* H *имеет конечный порядок,*

то группа G *конечна.*

Кроме того, из теоремы 3 вытекает, что периодическая группа Фробениуса, порожденная элементами порядка 3, локально конечна. Приводится пример, показывающий, что аналогичное утверждение для групп Фробениуса с периодическим дополнением неверно.

Как заметил А. И. Созутов, из теорем 1, 3 и результатов его работы [3] непосредственно вытекает следующий факт.

Следствие 1. *Для* $\{2,3\}$*-группы* T *эквивалентны утверждения:*

(а) T *изоморфна группе регулярных автоморфизмов некоторой абелевой группы;*

(б) T *изоморфна подгруппе дополнения некоторой группы Фробениуса;*

(в) *все элементы порядка порядка 2 и 3 из* T *порождают подгруппу* C, *которая либо является циклической, либо изоморфна* $SL_2(3)$.

Отметим, что в случае, когда подгруппа из п. (в) следствия 1 изоморфна $SL_2(3)$, группа T конечна и индекс C в T не превосходит числа 2.

Теоремы 1, 3 дают также возможность уточнить и обобщить один результат А. И. Созутова и В. П. Шункова [4] о фробениусовой паре (G, H) в случае, когда H содержит элемент порядка 3. По определению (G, H) — пара Фробениуса, если H — собственная подгруппа группы G и $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$. А. И. Созутов и В. П. Шунков доказали, что для пары Фробениуса (G, H), обладающей свойством:

(∗) H содержит элемент a простого порядка $p > 2$, и для любого элемента $a \in G \setminus H$ подгруппа $L_a = \langle a, a^g \rangle$ конечна,

справедливы следующие утверждения: G — полупрямое произведение периодической нормальной подгруппы F на H, и если подгруппа F некоммутативна, то подгруппа $\langle a \rangle$ нормальна в H. Заметим, что в условии (∗) подгруппа L_a всегда является группой Фробениуса.

Теорема 5. *Пусть (G, H) — пара Фробениуса и H содержит такой элемент a порядка 3, что для любого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $\langle a, a^g \rangle$ является группой Фробениуса и один из элементов $aa^g, [a, g]$ имеет конечный порядок. Тогда $G = FH$, где F — нормальная периодическая двуступенно нильпотентная подгруппа группы G и $F \cap H = 1$. Кроме того, $U = \langle a^H \rangle$ — конечная группа, изоморфная группе порядка 3 или одной из групп $SL_2(3), SL_2(5)$. Если подгруппа U нециклическая, то F коммутативна. В любом случае FU — группа Фробениуса с ядром F и дополнением U.*

Предварительные результаты

Пусть A — группа автоморфизмов абелевой группы G. Тогда A — подгруппа мультипликативной полугруппы кольца $E = \mathrm{End}(G)$ группы G. Если B — подмножество в E, то через $L(B)$ обозначим *линейную оболочку* множества B, т. е. аддитивную подгруппу кольца E, порожденную элементами из B. Таким образом, $L(B)$ состоит из *линейных комбинаций* $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_s b_s$, где s — натуральное число, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ — целые числа, $b_1, \dots, b_s \in B$. Элемент $a \in A$ называется *квадратичным автоморфизмом*, если в E справедливо равенство $a^2 + \alpha a + \beta \cdot 1 = 0$ для некоторых чисел α и β или, другими словами, a^2 *линейно выражается* через a и 1, т. е. $a^2 \in L(a, 1)$.

Автоморфизмы a и b назовем *почти перестановочными*, если $ab \in L(1, a, b, ba)$ и $ba \in L(1, a, b, ab)$. Пару (a, b) почти перестановочных автоморфизмов будем называть *почти перестановочной парой*.

Лемма 1. *Пусть A — группа автоморфизмов абелевой группы G.*

1. *Порождающий элемент регулярной группы автоморфизмов порядка 3 или 4 из A является квадратичным. Если a и b — квадратичные автоморфизмы конечного порядка из A и $\langle ab \rangle$ — регулярная группа порядка 3 или 4, то a и b почти перестановочны.*

2. *Если U — подгруппа из A, порожденная элементами $u_k, k = 1, 2, \dots,$ такая, что аддитивная группа $L(U)$ конечно порождена, а a_1, a_2 — квадратичные автоморфизмы такие, что $a_1 a_2$ — элемент конечного порядка, и любая пара $(u_k, a_i), k = 1, 2, \dots, i = 1, 2,$ почти перестановочна, то $S = L(\langle U, a_1, a_2 \rangle)$ — конечно порожденная аддитивная подгруппа в $\mathrm{End}(G)$. В частности, группа $H = \langle U, a_1, a_2 \rangle$ является группой автоморфизмов конечно порожденной абеле-*

вой группы S. При этом S может быть выбрана так, что ее период совпадает с периодом группы G.

Доказательство. Будем использовать для G аддитивную запись.

1. Если x — регулярный автоморфизм порядка 3 группы G, то для любого элемента $g \in G$

$$g(x^2+x+1)(x-1) = g(x^3-1) = 0,$$

откуда $g(x^2+x+1)x = g(x^2+x+1)$. Так как автоморфизм x регулярный, то $g(x^2+x+1) = 0$, т. е. $(x^2+x+1) = 0$. В частности, x — квадратичный автоморфизм.

Поскольку a — квадратичный автоморфизм, то $a^2 \in L(a,1), a^3 \in L(a,1)a = L(a^2,a) \subseteq L(a,1)$ и аналогично $a^m \in L(a,1)$ для любого натурального числа m. В частности, $a^{-1} \in L(a,1)$, т. е. $a^{-1} = \alpha a + \beta \cdot 1$ для некоторых целых чисел α, β. Аналогично $b^{-1} = \gamma b + \delta \cdot 1$ для некоторых целых чисел γ, δ.

Если теперь ab — регулярный автоморфизм порядка 3, то по доказанному выше $abab+ab+1 = 0$, откуда $ba = a^{-1}(-ab-1)b^{-1} = -1-a^{-1}b^{-1} = -1-(\alpha a+\beta\cdot 1)(\gamma b+\delta\cdot 1) \in L(1,a,b,ab)$.

Если x — регулярный автоморфизм порядка 2 группы G, то $g(x+1)(x-1) = 0$ для любого элемента $g \in G$, откуда $g(x+1) = 0$ и $x = -1$. Поэтому если $\langle ab\rangle$ — регулярная группа порядка 4, то $abab = -1$ и $ba = -a^{-1}b^{-1} = -(\alpha a+\beta\cdot 1)(\gamma b+\delta\cdot 1) \in L(1,a,b,ab)$. П. 1 доказан.

2. Пусть порядок элемента a_1a_2 равен n. Положим $L_0 = L(U), L_1 = L_0a_1, L_2 = L_1a_2, \dots, L_{2s+1} = L_{2s}a_1, L_{2s+2} = L_{2s+1}a_2, \dots$. Очевидно, что $L_i, i = 1,2,\dots$ — аддитивная подгруппа в $\mathrm{End}(G)$, число порождающих которой совпадает с числом порождающих группы L_0. По условию подгруппа L_0 конечно порождена, поэтому $S = L_0+L_1+\dots+L_{2n-1}$ — конечно порожденная абелева группа. Покажем, что она H-инвариантна, где $H = \langle U, a_1, a_2\rangle$.

По определению подгруппы L_i имеет место равенство $L_ia_j = L_{i+1}$, если i и j — числа разной четности. Если i и j одновременно четны или нечетны и $i > 0$, то $L_ia_j = L_{i-1}a_ja_j = L_{i-1}a_j^2 \le L_{i-1}a_j + L_{i-1} = L_i + L_{i-1} \le S$. Если же $i = 0, j = 2$, то $L_0 = L_0(a_1a_2)^n = L_{2n} = L_{2n-1}a_2$ и $L_0a_2 = L_{2n-1}a_2^2 \le L_{2n}+L_{2n-1} = L_0+L_{2n-1} \le S$. В любом случае $Sa_j \le S$, $j = 1,2$.

Теперь индукцией по i покажем, что $L_iu_k \le S$. Для $i = 0$ это очевидно. Пусть $i > 0$ и $L_{i-1}u_k \le S$. Если число i четно, то $L_i = L_{i-1}a_2$ и $L_iu_k = L_{i-1}a_2u_k \le L_{i-1}u_ka_2 + L_{i-1}a_2 + L_{i-1}u_k + L_{i-1} \le Sa_2 + S = S$. Аналогично если i нечетно, то $L_i = L_{i-1}a_1$, и такие же рассуждения показывают, что $L_iu_k \le S$. Суммируя, получим, что $Su_k \le S$, $k = 1,2,\dots$, $Sa_j \le S$, $j = 1,2$ и, следовательно, $SH \le S$. Поскольку S содержит 1, $H \subseteq S$ и $L(H)$ — подгруппа в группе S. Так как группа S конечно порождена, то и $L(H)$ конечно порождена. В силу того, что период группы G совпадает с периодом аддитивной группы кольца $\mathrm{End}(G)$ и равен аддитивному порядку элемента 1. Лемма доказана.

Следующий результат доказан в [5, теорема 1].

Лемма 2. *Пусть A — группа, порожденная двумя квадратичными автоморфизмами a и b абелевой группы G. Если выполнено любое из условий:*

(а) *период группы G и порядок элемента ab конечны,*

(б) *A — периодическая группа,*

то A — конечная группа.

Нам потребуются также следующие результаты из [5] (лемма 1, п. 3 леммы 2 и п. 1 теоремы 2).

Лемма 3. *Периодическая группа автоморфизмов конечно порожденной абелевой группы конечна.*

Лемма 4. *Пусть A — нециклическая периодическая группа регулярных автоморфизмов абелевой группы, порожденная множеством B элементов порядка* 3. *Если выполнено одно из дополнительных условий:*

(а) *группа A конечна,*

(б) *множество B состоит из двух элементов,*

то A изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$.

Все утверждения следующей леммы хорошо известны.

Лемма 5. 1. *Пусть $H = A_5$ — знакопеременная группа степени* 5. *Тогда*

(а) *любой элемент порядка* 3 *из H содержится в подгруппе, изоморфной A_4, и все подгруппы из H, изоморфные A_4, составляют класс сопряженных максимальных в H подгрупп;*

(б) *если элементы a, b порядка* 3 *из H порождают подгруппу, изоморфную A_4, то найдется элемент c порядка* 3 *из H такой, что $\langle a, b, c\rangle = H$, $\langle a, c\rangle \simeq \langle b, c\rangle \simeq A_4$.*

2. *Пусть $K = SL_2(5)$. Тогда K обладает единственной инволюцией t и группа $H = K/\langle t\rangle$ изоморфна A_5. Если $U/\langle t\rangle$ — подгруппа из H, изоморфная A_4, то U изоморфна $SL_2(3)$.*

Доказательство теоремы 1

Пусть выполнено условие теоремы 1. Если G содержит элемент x простого порядка, то A является регулярной группой автоморфизмов элементарной абелевой группы $\langle x^A\rangle$, поэтому можно предполагать, что группа G либо элементарная абелева, либо без кручения.

Отметим, что любой автоморфизм порядка 3 из A является квадратичным. Можно считать, что A — нециклическая группа.

Предположим вначале, что любая пара различных подгрупп порядка 3 из A порождает подгруппу, изоморфную $SL_2(3)$. Пусть x, y — элементы порядка 3 из A, порождающие нециклическую подгруппу. Тогда $H = \langle x, y\rangle \simeq SL_2(3)$. Если $H \neq A$, то найдется элемент z порядка 3 из $A \setminus H$. По условию $\langle x, z\rangle \simeq \langle y, z\rangle \simeq SL_2(3)$. Очевидно, $L(\langle x\rangle)$ — конечно порожденная подгруппа аддитивной группы кольца $\mathrm{End}(G)$. По лемме 1.1 пары (x, y) и (x, z) почти перестановочны, и порядок элемента yz конечен. По лемме 1.2 $L(\langle x, y, z\rangle)$ — конечно порожденная группа и $\langle x, y, z\rangle$ — ее группа автоморфизмов. По условию и п. (а) леммы 2 группа $\langle x, y, z\rangle$ конечна. По лемме 3 $\langle x, y, z\rangle \simeq SL_2(5)$. Это противоречит нашему допущению, поскольку $SL_2(5)$ порождается двумя элементами порядка 3.

Пусть найдутся такие элементы x, y порядка 3 из A, что подгруппа$H = \langle x, y\rangle$ нециклическая и не изоморфна $SL_2(3)$. По лемме 3 $H \simeq SL_2(5)$. Предположим, что $H \neq A$. Тогда найдется элемент z порядка 3 из $A \setminus H$. Если $\langle x, z\rangle \simeq \langle y, z\rangle \simeq SL_2(3)$, то, как и выше, $\langle x, y, z\rangle \simeq SL_2(5)$, что невозможно.

Пусть $L = \langle x, z\rangle \simeq SL_2(5)$, и пусть $U = H \cap L$. Если U содержит две различные циклические подгруппы $\langle a\rangle, \langle b\rangle$ порядка 3, то по лемме 5 $U \simeq SL_2(3)$ и найдется такой элемент c порядка 3 в H, что $\langle a, c\rangle \simeq \langle b, c\rangle \simeq SL_2(3)$ и $\langle a, b, c\rangle = H$. Аналогично в L найдется такой элемент d порядка 3, что $\langle a, d\rangle \simeq \langle b, d\rangle \simeq SL_2(3)$ и $\langle a, b, d\rangle = L$. По лемме 1 группа $L(\langle a, b, c, d\rangle)$ конечно порождена. По леммам 2–4 группа $\langle a, b, c, d\rangle$ изоморфна $SL_2(5)$, что невозможно.

Если в U содержится только одна циклическая подгруппа $\langle a\rangle$ порядка 3, то по лемме 5 в H найдется элемент b порядка 3, порождающий вместе с a подгруппу, изоморфную $SL_2(3)$. Аналогично в L найдется элемент c порядка 3, порождающий вместе с a подгруппу, изоморфную $SL_2(3)$. Снова по леммам 1, 2 и 4 подгруппа $K=\langle a,b,c\rangle$ изоморфна $SL_2(5)$. Теперь замена L на K возвращает нас к уже рассмотренному случаю. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2

Напомним, что автоморфизм a конечного порядка n группы X называется расщепляющим, если $x^{a^{n-1}}\cdots x^{a^2}x^a x=1$ для любого элемента $x\in X$. В. Д. Мазуров обратил внимание автора на следующий факт, доказательство которого использует идеи работы [6].

Лемма 6. *Пусть a — расщепляющий автоморфизм порядка 3 группы X. Тогда группа X нильпотентна, ступень нильпотентности группы X не превосходит числа 3 и порядок каждого нетривиального элемента из третьего члена нижнего центрального ряда группы X равен 3.*

Доказательство. Пусть $x,y\in X$. Тогда

$$(x^{-1})^{a^2}=x^a x,\quad y^{a^2}=(y^{-1})^a y^{-1},$$

$$\begin{aligned}(y^{-1})^a x^a y^{-1}x=((x^{-1}y)^{-1})^a(x^{-1}y)^{-1}&=(x^{-1}y)^{a^2}\\ &=(x^{-1})^{a^2}y^{a^2}=(x^{-1})^{a^2}(y^{-1})^a y^{-1}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$(x^{-1})^{a^2}(y^{-1})^a=(y^{-1})^a x^a y^{-1}xy=(y^{-1})^a x^a x x^{-1}y^{-1}xy=(y^{-1})^a(x^{-1})^{a^2}[x,y].$$

Следовательно,

$$[x,y]=x^{a^2}y^a(x^{-1})^{a^2}(y^{-1})^a=[(x^{-1})^{a^2},(y^{-1})^a].$$

Итак, для любых элементов $x,y\in X$

$$[x,y]=[(x^{-1})^{a^2},(y^{-1})^a].$$

Подставив в это равенство вместо x элемент $(x^{-1})^{a^2}$, а вместо y элемент $(y^{-1})^a$, получим $[(x^{-1})^{a^2},(y^{-1})^a]=[x^a,y^{a^2}]$. Точно так же $[x^a,y^{a^2}]=[x^{-1},y^{-1}]$, т. е. $[x,y]=[x^{-1},y^{-1}]$ или $(xy)(yx)=(yx)(xy)$. Положим $xy=z$. Тогда $yx=x^{-1}(xy)x=z^x$. Так как элемент z одновременно с y для фиксированного элемента x пробегает всю группу X, то при всех $x,z\in X$ выполняется равенство $zz^x=z^x z$, эквивалентное равенству $[z,z^x]=1$. Группы с таким тождеством изучены в работе [7], из результатов которой вытекает заключение леммы.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Очевидно, подгруппа X инвариантна в H. Если $M=H\setminus X$ не содержит элементов порядка 3, то заключение теоремы верно. Пусть a — элемент порядка 3 из M. Если $x\in X$, то $ax\in M$ и $(ax)^3\in X$. Если порядок элемента $(ax)^3$ бесконечен, то порядок элемента ax тоже бесконечен, что противоречит условию. Если порядок элемента $(ax)^3$ конечен и равен m, то порядок элемента ax равен $3m$, и по условию $m=1$. Итак, $1=(ax)^3=x^{a^2}x^a x$, т. е. a индуцирует в X при сопряжении расщепляющий автоморфизм порядка 3. По лемме 6 группа X нильпотентна и $x^3=1$ для любого элемента x из третьего члена T нижнего центрального ряда группы X. По условию $T = 1$ и группа X двуступенно нильпотентна.

Пусть Z — центр группы X. Из условия вытекает, что $C_G(Z) = X$, поэтому G/X изоморфна периодической группе регулярных автоморфизмов абелевой группы Z. Если N/X порождена элементами порядка 3 из G/X, то по теореме 1 группа N/X конечна и изоморфна циклической группе, группе $SL_2(3)$ или группе $SL_2(5)$. В последних двух случаях M содержит элемент b порядка 2. Как и выше, убеждаемся, что $(bx)^2 = 1$ для любого элемента $x \in X$, поэтому $x^b x = 1, x^b = x^{-1}$, откуда вытекает коммутативность группы X. Теорема доказана.

О группах Фробениуса, содержащих элемент порядка 3

Лемма 7. 1. *Если G — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H и U — нетривиальная подгруппа из H, то FU — группа Фробениуса с ядром F и дополнением U.*

2. *Пусть $G = FH$ — полупрямое произведение нетривиальной нормальной подгруппы F и нетривиальной подгруппы H. Следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *G — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H;*

(б) *для любого неединичного элемента h из H отображение $\varphi : F \to F$, определенное равенством $f^\varphi = [f, h] = f^{-1}f^h$, является взаимно однозначным отображением F на F.*

3. *Пусть G — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H и $a \in G \setminus F$. Тогда $a^F = Fa = aF$ и $F \leq \langle a^F \rangle$. Если порядок элемента a конечен, то при сопряжении a индуцирует в F расщепляющий автоморфизм.*

4. *Центр группы Фробениуса тривиален.*

Доказательство. 1. Если $h^f \in FU$, где $1 \neq h \in H, f \in F$, то $h^f = [f, h^{-1}]h = f_1 h = f_2 u$ для некоторых $f_1, f_2 \in F, u \in U$, откуда $h \in U$.

2. Пусть выполнено утверждение (а). В свете п. 1 можно считать, что $H = \langle h \rangle$. Теперь по [4] справедливо утверждение (б).

Пусть справедливо утверждение (б). Если $h \in H^f \cap H$, то $[f^{-1}, h^{-1}] = fhf^{-1}h^{-1} \in H \cap F = 1$, откуда $f = 1$ или $h = 1$. Далее, если $g \in G \setminus F$, то $g = f_1 h$, где $f_1 \in F, h \in H$ и $h \neq 1$. По условию существует элемент $f \in F$ такой, что $f_1 = [f, h^{-1}]$ и $f_1 h = f^{-1}hfh^{-1}h = h^f$. Поэтому $G \setminus F = \{h^f | 1 \neq h \in H, f \in F\}$, и G — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H.

Поскольку $FU \setminus F \leq FH \setminus F = \{h^f \mid 1 \neq h \in H,\ f \in F\}$, любой элемент x из $FU \setminus F$ представим в виде $x = u^f$, где $u \in U,\ f \in F$.

3. Так как $a^f = h \in H$ для некоторого элемента $f \in F$ и $Fh = Fa$, можно считать, что $a \in H$. Если теперь $x \in F$, то по п. 1 найдется элемент $y \in F$ такой, что $y^{-1}(a^{-1})^y = x$. Но тогда $xa = a^y$ и $Fa \subseteq a^F$. Обратное включение очевидно. Поэтому $a^F = Fa = aF$. Если $f \in F$, то $f = faa^{-1} \in \langle fa, a \rangle = \langle a^g, a \rangle$ для некоторого элемента $g \in F$ и $F \leq \langle a^F \rangle$. Если $a^n = 1$ и $x \in F$, то $ax \in a^F$ и поэтому $x^{a^{n-1}} \cdots x^{a^2} x^a x = a^n x^{a^{n-1}} \cdots x^{a^2} x^a x = (ax)^n = 1$. Следовательно, a индуцирует в F расщепляющий автоморфизм.

4. Доказательство вытекает непосредственно из определения. Лемма доказана.

Пусть выполнены условия теоремы 3. По п. 3 (а) леммы 7 индуцирует в F расщепляющий автоморфизм порядка 3. По лемме 6 группа нильпотентна ступени 3 и $z^3 = 1$ для любого элемента z из $Z = [[F,F],F]$. Если $z \neq 1$, то $\langle z, z^a, z^{a^2}\rangle$ — конечная a-инвариантная подгруппа из F, следовательно, a централизует в ней неединичный элемент, что противоречит определению группы Фробениуса. Итак, $z = 1$, и F двуступенно нильпотентна. Группа H является регулярной группой автоморфизмов центра $Z(F)$ группы F. По теореме 1 группа $\langle a^H\rangle$ либо совпадает с $\langle a\rangle$, либо изоморфна одной из групп $SL_2(3), SL_2(5)$. Во втором случае инволюция из H индуцирует в F расщепляющий автоморфизм порядка 2, что влечет коммутативность группы F. Теорема 3 доказана.

Следствие 2. *Пусть $G = F\langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a\rangle$ порядка 3. Если подгруппы $\langle a, a^g\rangle$ конечны для всех $g \in F$, то G локально конечна.*

Следствие 3. *Периодическая группа Фробениуса, порожденная элементами порядка 3, локально конечна.*

Действительно, эта группа по теореме 3 содержит нильпотентную периодическую подгруппу конечного индекса.

Пусть G — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H, порожденная конечным множеством элементов порядка 3. Это, в частности, означает, что подгруппа H порождена элементами порядка 3. По п. 2 лемме 7 группа $F\langle a\rangle$, где a — элемент порядка 3 из H, является группой Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a\rangle$. По теореме 3 подгруппа F двуступенно нильпотентна и, следовательно, H является регулярной группой автоморфизмов центра группы F. Если выполнено любое из условий:

а) дополнение H периодично,

б) ядро F содержит нетривиальный элемент конечного порядка, и произведение любых двух элементов порядка 3 из H имеет конечный порядок,

то по теореме 1 подгруппа H конечна. Подгруппа F, будучи подгруппой конечного индекса в конечно порожденной группе, сама конечно порождена. Пусть C — коммутант группы F. Если F/C — периодическая группа, то она конечна и, следовательно, F конечна. Но тогда и вся группа G конечна.

Предположим, что группа F/C не является периодической. Пусть T/C — подгруппа группы F/C, состоящая из всех элементов конечного порядка группы F/C. Тогда подгруппа T является H-инвариантной и $D = F/T$ — нетривиальная конечно порожденная абелева группа без кручения. В частности, $D \neq D^3 = \{d^3 \mid d \in D\}$. Пусть $d \in D \setminus D^3$. По п. 1 леммы 7 найдется элемент $e \in D$ такой, что $d = e^{-1}e^a$, а затем — элемент $f \in D$ такой, что $e = f^{-1}f^a$. Так как по п. 3 леммы 7 $f^{a^2}f^a f = 1$, то $ff^{a^2} = (f^{-1})^a$, и поэтому $d = e^{-1}e^a = (f^{-1})^a f (f^{-1})^a f^{a^2} = ((f^{-1})^a)^3 \in D^3$, что противоречит выбору элемента d. Теорема 4 доказана.

Следующий пример показывает, что группа Фробениуса с периодическим дополнением, порожденная элементами порядка 3, не всегда локально конечна.

Пример. Аддитивно записанная группа $F = \langle x_i, y_i, i = 0,1,2,\dots \mid x_i y_j = y_j x_i, 3x_k = x_{k-1}, 3y_k = y_{k-1}$ для $i,j = 0,1,2,\dots$, $k = 1,2,3,\dots\rangle$ является абелевой группой без кручения, и гомоморфизм $a : F \to F$, продолжающий отображение $x_i \to y_i$, $y_i \to -x_i - y_i$, $i = 0,1,2,\dots$, представляет собой автоморфизм порядка 3 группы F. Пусть $G = F\langle a\rangle$ — естественное полупрямое произведение. Каждый элемент f из F — конечная линейная комбинация элементов x_i, y_j. Пусть $m = m(f)$ — максимум индексов элементов x_i, y_j, участвующих в этой линейной комбинации. Тогда $f = \alpha x_m + \beta y_m$ для некоторых целых чисел α, β и $[f, a] = -f+f^a = -(\alpha+\beta)x_m+(\alpha-2\beta)y_m$. Если $[f, a] = 0$, то $-(\alpha+\beta) = \alpha-2\beta = 0$ и $\alpha = \beta = 0$. Это означает, что отображение $f \to [f, a]$ однозначно. Аналогично показывается, что отображение $f \to [f, a^{-1}]$ также однозначно. Если теперь $f_1 = (\beta - 2\alpha)x_{m+1} - (\alpha + \beta)y_{m+1}$, то $[f_1, a] = \alpha x_m + \beta y_m = f$. Это означает, что $f \to [f, a]$ — отображение F на F. Таким же является и отображение $f \to [f, a^{-1}]$. По п. 1 леммы 7 группа G является группой Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a\rangle$. По п. 2 леммы 7 эта группа порождается множеством a^F элементов порядка 3, но не локально конечна.

Этот же пример показывает, что в отличие от конечных групп Фробениуса фактор-группа группы Фробениуса по собственной подгруппе ядра не обязательно является группой Фробениуса. Действительно, $N = \langle x_0, y_0\rangle$ — нормальная подгруппа из G, содержащаяся в F, и $N \neq N + x_1 - y_1 = (N + x_1 - y_1)^a$. Это означает, что $N + x_1 - y_1$ — нетривиальный центральный элемент группы G/N и G/N не может быть группой Фробениуса по п. 4 леммы 7.

О парах Фробениуса

Доказательство теоремы 5 использует следующее утверждение.

Лемма 8. *Группа Фробениуса, порожденная двумя элементами порядка* 3, *порядок произведения которых конечен, является конечной.*

Доказательство. Пусть G — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H и $H = \langle x, y\rangle$, где x, y — элементы порядка 3, произведение которых имеет конечный порядок. Тогда один из элементов x, y, скажем элемент x, не принадлежит F. По определению группы Фробениуса можно считать, что $x \in H, y = fh$, где $f \in F, h \in H$. При этом $H = \langle x, h\rangle$, $G = \langle x, h, f\rangle$ и $F = \langle f^H\rangle$. По теореме 3 группа F двуступенно нильпотентна. Пусть C — коммутант группы F. Подгруппа H при сопряжении индуцирует в F/C группу автоморфизмов, порожденную двумя квадратичными элементами, порядок произведения которых конечен. По п. 2 леммы 1 подгруппа F/C конечно порождена. Если F/C — периодическая группа, то она конечна и, следовательно, F конечна. Но тогда и вся группа G конечна.

Предположим, что группа F/C не является периодической. Пусть T/C — подгруппа группы F/C, состоящая из всех элементов конечного порядка группы F/C. Тогда подгруппа T является H-инвариантной, и $D = F/T$ — нетривиальная конечно порожденная абелева группа без кручения. В частности, $D \neq D^3 = \{d^3 \mid d \in D\}$. Пусть $d \in D \setminus D^3$. По п. 1 леммы 7 найдется элемент $e \in D$ такой, что $d = e^{-1}e^x$, а затем — элемент $g \in D$ такой, что $e = g^{-1}g^x$. Так как по п. 3 леммы 7 $g^{x^2}g^xg = 1$, то $g^{x^2} = (g^{-1})^x$, и поэтому

$$d = e^{-1}e^x = (g^{-1})^x g (g^{-1})^x g^{x^2} = ((g^{-1})^x)^3 \in D^3,$$

что противоречит выбору элемента d. Лемма доказана.

Пусть теперь выполнены условия теоремы 5. По лемме 10 выполнены условия теоремы Созутова — Шункова [4], поэтому $G = FH$, где F — периодическая нормальная подгруппа группы G и $F \cap H = 1$. Далее, как показано в [4], либо группа F коммутативна, либо каждый элемент из F содержится в ядре некоторой (конечной) группы Фробениуса вида $\langle a, a^g\rangle$ с дополнением $\langle a\rangle$ и $\langle a^H\rangle = \langle a\rangle$.

Во втором случае a индуцирует при сопряжении в F расщепляющий автоморфизм порядка 3, действующий без неподвижных точек, поэтому F двуступенно нильпотентна и $F\langle a\rangle = F\langle a^H\rangle$ — группа Фробениуса. Если же группа F

коммутативна, то строение группы $C = \langle a^H \rangle$ определяется теоремой 1. В частности, группа C конечна, тем самым для любого неединичного элемента $f \in F$ подгруппа $\langle fC \rangle$ — конечная группа Фробениуса, ядро $\langle f^C \rangle$ которой содержит f. Поэтому для любого неединичного элемента $c \in C$ соответствие $x \to [x, c]$ является взаимно однозначным отображением F на F, и по п. 1 леммы 7 FC — группа Фробениуса. Теорема доказана.

Автор благодарен В. Д. Мазурову за всестороннюю помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нерешенные* вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.
2. *Шунков В. П.* Об одном признаке непростоты групп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 5. С. 576–603.
3. *Созутов А. И.* О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 893–901.
4. *Созутов А. И., Шунков В. П.* Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы. // Мат. сб. 1976. Т. 100, № 4. С. 495–506.
5. *Журтов А. Х.* О квадратичных автоморфизмах абелевых групп // Алгебра и логика (в печати).
6. *Neumann B. H.* Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed // Arch. Math. 1956. Bd 7, N 1. S. 1–5.
7. *Levi F. W.* Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraical conditions // J. Indian Math. Soc. 1942. Ser. 6. P. 87–97.

Статья поступила 6 июля 1999 г.

г. Нальчик
archil@ns.kbsu.ru