Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 514.756.4

О НЕФОРМАЛЬНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

И. К. Бабенко, И. А. Тайманов

Аннотация: Построены первые примеры неформальных односвязных симплектических многообразий. Библиогр. 20.

§ 1. Введение и основные результаты

Гладкое многообразие M называется *симплектическим*, если на нем задана невырожденная замкнутая 2-форма ω, которая называется *симплектической формой*. В этом случае под *симплектическим многообразием* понимается пара (M, ω). Так как кососимметричная форма ω невырожденна, то M имеет четную размерность и, более того, такое многообразие всегда имеет почти комплексную структуру. Простейшими примерами симплектических многообразий являются кэлеровы многообразия.

Согласно результатам М. Л. Громова [1] и Тышлера [2] каждое компактное симплектическое многообразие диффеоморфно симплектическому подмногообразию комплексного проективного пространства. Вейнстейн поставил проблему: найти компактные симплектические многообразия, не допускающие кэлеровой структуры. Первый такой пример найден Терстоном [3], а первый односвязный пример такого многообразия построен МакДафф [4]. Позднее Гомпф построил односвязные примеры минимально возможной размерности, равной четырем [5].

Важным свойством кэлеровых многообразий является формальность, установленная в [6]. Формальность многообразия означает, что его рациональный гомотопический тип полностью определяется его кольцом рациональных когомологий. Формальность кэлеровых многообразий использовалась при нахождении неодносвязных симплектических многообразий без кэлеровой структуры в [7, 8]. Для неодносвязных пространств рациональный гомотопический тип определяется только для нильпотентных пространств, в то время как для односвязных пространств он определяется всегда. Проблема существования неформальных односвязных симплектических многообразий была открыта до сих пор и, более того, выдвинута гипотеза, что таких многообразий нет (гипотеза Лаптона — Опри [9]). Мы опровергаем эту гипотезу следующим фактом.

Основная теорема. *Для каждого $N \geq 5$ существует бесконечно много попарно гомотопически неэквивалентных неформальных односвязных симплектических многообразий размерности $2N$.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96–01–00182а (у первого автора) и 96–15–96877 и 98–01–00749 (у второго автора)).

Наметим схему доказательства. Возьмем симплектическое вложение многообразия Кодаиры — Терстона $\widetilde{M}$, которое является симплектическим четырехмерным нильмногообразием [3], в $\mathbb{C}P^N$ при $N \geq 5$ и симплектически раздуем $\mathbb{C}P^N$ вдоль $\widetilde{M}$, получив симплектическое многообразие $\widetilde{\mathbb{C}P}^N$. Именно МакДафф первая установила, что $\widetilde{\mathbb{C}P}^5$ является односвязным компактным симплектическим многообразием, не допускающим кэлеровой структуры [4]. Мы докажем, что $\widetilde{\mathbb{C}P}^N$ неформально при $N \geq 5$ (см. теорему 2).

Более того, мы построим бесконечную серию симплектических нильмногообразий $M(2m)$ размерности $2m \geq 4$ и докажем, что они неформальны (теорема 1) и раздутия $\mathbb{C}P^N$ вдоль этих многообразий, вложенных в $\mathbb{C}P^N$, односвязны и неформальны (теорема 2).

Так как раздутие в точке неформального односвязного многообразия неформально, с помощью последовательных раздутий в точках из одного неформального симплектического многообразия получаем бесконечно много попарно гомотопически неэквивалентных неформальных симплектических многообразий той же размерности.

Сформулируем следующее предположение.

Гипотеза. *Пусть $Y \to X$ — симплектическое вложение неформального односвязного многообразия в односвязное компактное многообразие X. Тогда раздутие X вдоль Y неформально.*

Отметим также, что поскольку все компактные односвязные многообразия размерности ≤ 6 формальны [10], следующая проблема остается открытой.

Проблема. *Существуют ли неформальные односвязные симплектические многообразия размерности 8?*

Результаты этой работы в несколько ослабленной форме, влекущей существование таких многообразий размерности $2N$ для $N \geq 6$, анонсированы в [11].

§ 2. Некоторые факты о симплектических многообразиях

Существование почти комплексной структуры на симплектическом многообразии доказывается следующим образом. Возьмем риманову метрику $(\cdot,\cdot)$ на M и определим оператор A условием $(Au, v) = \omega(u, v)$. Так как A кососимметричен, оператор $A^*A = -A^2$ симметричен и положителен. Возьмем положительный симметричный квадратный корень из него: $Q = \sqrt{-A^2} > 0$, и положим $J = AQ^{-1}$. Очевидно, $J^2 = -1$, и это означает, что J задает почти комплексную структуру и произведение $\langle u, v\rangle = \omega(u, Jv)$ является эрмитовой метрикой на M, т. е. римановой метрикой, по отношению к которой J кососимметричен. Следовательно, почти комплексная структура J совместна с симплектической структурой ω.

Эта процедура позволяет нам ввести гладкое семейство совместных почти комплексных структур на любом гладком семействе симплектических векторных пространств, т. е. векторных пространств с симплектическими формами.

В [1] доказано, что открытое почти комплексное многообразие M всегда имеет совместную симплектическую структуру.

Для компактных многообразий существование почти комплексной структуры не влечет существования симплектической структуры и простейшим дополнительным необходимым условием является существование замкнутой 2-формы

ω такой, что ее степени ω^j когомологически нетривиальны при $j = 1, \dots, N$: $[\omega]^j \neq 0$ в $H^{2j}(M)$.

Комплексное многообразие M называется *кэлеровым*, если на нем задана эрмитова метрика $h_{ij} dz^i d\bar{z}^j$ такая, что форма $\omega = h_{ij} dz^i d\bar{z}^j$ замкнута. Эта форма симплектическая, и, следовательно, каждое кэлерово многообразие имеет естественную симплектическую структуру.

Обозначим через $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ с кэлеровой формой ω_{FS}, заданной метрикой Фубини — Штуди. Эти симплектические многообразия служат универсальными симплектическими многообразиями в следующем смысле.

Предложение 1 $[1, 2]$. *Пусть (M, ω) — компактное симплектическое многообразие размерности $2n$ такое, что форма ω целочисленна, т. е. $[\omega] \in H^2(M; \mathbb{Z}) \subset H^2(M; \mathbb{R})$. Тогда существует вложение $f : M \to \mathbb{C}P^{2n+1}$ такое, что $f^*\omega_{FS} = \omega$.*

Рациональные формы, т. е. формы η с $[\eta] \in H^2(M; \mathbb{Q})$, плотны в $H^2(M; \mathbb{R})$, и, следовательно, для каждой симплектической формы ω на M существует малое возмущение $\omega + \widetilde{\omega}$ этой формы такое, что форма $K(\omega + \widetilde{\omega})$ замкнута, невырожденна и целочисленна для некоторого $K \in \mathbb{R}$, и поэтому $(M, K(\omega+\widetilde{\omega}))$ — симплектическое подмногообразие $(\mathbb{C}P^{2n+1}, \omega_{FS})$. Значит, симплектические подмногообразия комплексных проективных пространств задают все топологические типы компактных симплектических многообразий.

Первым примером компактного симплектического многообразия без кэлеровой структуры является многообразие Кодаиры — Терстона $\widetilde{M}$, задаваемое следующим образом.

Обозначим через $\mathscr{H}$ трехмерную группу Гейзенберга верхнетреугольных матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с $x, y, z \in \mathbb{R}$ и обычной операцией умножения. Матрицы с целыми коэффициентами x, y, z образуют равномерную решетку $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}$ в $\mathscr{H}$.

На окружности S^1 возьмем координату u, определенную по модулю 1, и положим

$$\widetilde{M} = (\mathscr{H}/\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}) \times S^1$$

с формой

$$\omega = dx \wedge du + dy \wedge dz. \tag{1}$$

Это четырехмерное симплектическое нильмногообразие, чьи одномерные вещественные когомологии порождены формами dx, dy и du, и, следовательно, первое число Бетти равно трем. Так как нечетномерные числа Бетти кэлеровых многообразий четны, $\widetilde{M}$ не имеет никакой кэлеровой структуры, но допускает комплексную структуру.

Позднее были найдены примеры четномерных симплектических нильмногообразий без комплексной структуры [12].

§ 3. О раздутии и односвязных симплектических многообразиях без кэлеровой структуры

Раздутие определяется для каждой пары $Y \subset X$ гладких многообразий такой, что структурная группа нормального пучка к Y редуцируется к $U(k)$, где $2k = \dim X - \dim Y$.

Пусть (X, ω) — компактное симплектическое многообразие размерности $2N$, и пусть Y — симплектическое подмногообразие X размерности $2(N-k)$. Для каждой точки $p \in Y$ рассмотрим пространство $E_p \subset T_pX$, которое является ортогональным дополнением к T_pY относительно формы ω. Эти пространства образуют пучок $E = E_Y$ над Y, изоморфный нормальному пучку к Y. Так как Y — симплектическое подмногообразие, то

1) ограничение ω на E_pY невырожденно для каждого $p \in Y$;

2) нормальный пучок к Y в X естественно отождествляется с E.

С помощью приема, изложенного в § 2, построим на E послойную почти комплексную структуру, совместную с ограничениями ω на слои. Тогда структурная группа E редуцируется к $U(k) = SO(2k) \cap Sp(k)$.

Пусть теперь Y — подмногообразие X и структурная группа нормального пучка E к Y есть $U(k)$. Отождествим слои E с $\mathbb{C}^k$ и рассмотрим другой пучок $\widetilde{E} \to Y$, слои которого изоморфны каноническому линейному расслоению над $\mathbb{C}P^{k-1}$. Это каноническое линейное расслоение имеет вид $L \to \mathbb{C}P^{k-1}$, где $L = \{(z, l) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}P^{k-1} \mid z \in l\}$. Условие $z \in l$ записывается так:

$$z_i l_j = z_j l_i \quad \text{при } i, j = 1, \ldots, k,$$

где $(l_1, \ldots, l_k)$ — однородные координаты на $\mathbb{C}P^{k-1}$. Этот пучок ассоциирован с E, т. е. действие структурной группы на $\widetilde{E}$ имеет вид

$$A \cdot (z, l) = (Az, Al),$$

где $A \cdot z = Az$ — соответствующее действие структурной группы на E.

Слои E снабжены эрмитовой метрикой. Обозначим через E_r и $\widetilde{E}_r$ подмногообразия E и $\widetilde{E}$, выделяемые неравенством $|z| \le r$.

Расслоенные пространства $(\widetilde{E}_1 \setminus \widetilde{E}_0) \to Y$ и $(E_1 \setminus E_0) \to Y$ канонически изоморфны, и их слои диффеоморфны проколотому диску $\{z \in \mathbb{C}^k \mid 0 < |z| \le 1\}$. Расслоенное пространство $E_0 \to Y$ является в точности нулевым сечением расслоения $E \to Y$, расслоенное пространство $\widetilde{Y} = \widetilde{E}_0 \to Y$ называется *проективизацией расслоения* $E \to Y$, и его слои диффеоморфны $\mathbb{C}P^{k-1}$.

Теперь мы можем построить раздутие X вдоль Y. Для этого возьмем замкнутую трубчатую окрестность V подмногообразия Y в X и естественным образом отождествим ее с E_1. Возьмем многообразие

$$\widetilde{X} = \overline{(X \setminus V)} \cup_{\partial V} \widetilde{E}_1,$$

где $\widetilde{E}_1$ приклеено к границе $\overline{(X \setminus V)}$ с помощью естественного изоморфизма $\partial E_1 = \partial \widetilde{E}_1$.

Многообразие $\widetilde{X}$ называется *раздутием* X *вдоль* Y и, грубо говоря, получается заменой замкнутой окрестности V, расслаивающейся на диски над Y, многообразием с границей $\widetilde{V}$, расслаивающимся на диски над $\widetilde{Y}$.

Существует естественная проекция $\pi : \widetilde{X} \to X$, являющаяся диффеоморфизмом вне Y, ограничение которой на $\pi^{-1}(Y)$ является расслоением $\widetilde{Y} \to Y$.

Заметим, что $\partial V = \partial E_1 = \partial \widetilde{E}_1$ расслаивается над Y с слоем S^{2k-1} и $\widetilde{E}_1$ расслаивается над Y со слоем $\overline{\mathbb{C}P^k \setminus D^{2k}}$, где черта означает замыкание. Слой последнего пучка гомотопически эквивалентен $\mathbb{C}P^{k-1}$, вложение $\tilde{\tilde{i}} : \partial V \to \widetilde{E}_1 = \widetilde{V}$ продолжается до коммутативной диаграммы расслоенных пространств

$$\begin{array}{ccc} \partial V = \partial \widetilde{E}_1 & \longrightarrow & \widetilde{E}_1 \\ {}_{S^{2k-1}} \searrow & & \swarrow_{\sim \mathbb{C}P^{k-1}} \\ & Y & \end{array}, \qquad (2)$$

и горизонтальное отображение $\tilde{\tilde{i}}$ сохраняет расслоения.

Из теоремы Лере — Хирша следует

Предложение 2. 1. *Кольцо когомологий проективизации $\pi : \widetilde{Y} \to Y$ векторного расслоения $E \to Y$ изоморфно*

$$H^*(\widetilde{Y}) = H^*(Y)[a]/\langle a^k + c_1 a^{k-1} + \dots + c_{k-1}a + c_k \rangle,$$

где $c_1, \dots, c_k$ — классы Черна векторного расслоения $E \to Y$. Индуцированный гомоморфизм $\pi^* : H^*(Y) \to H^*(\widetilde{Y})$ является мономорфизмом.

2. *Класс когомологий $a \in H^2(\widetilde{Y})$ может быть выбран так, что $\tilde{\tilde{i}}^*(a) = 0$ в $H^2(\partial V)$.*

Доказательство первого утверждения изложено, например, в [13]. Оно также может быть объяснено с помощью спектральных последовательностей расслоений из (2). Из функториальности этих последовательностей следует, что a, образующая группы $E_2^{0,2} = H^0(Y; H^2(\mathbb{C}P^{k-1}))$, отображается при $\tilde{\tilde{i}}^*$ в $H^0(Y; H^2(S^{2k-1})) = 0$. Предложение доказано.

С применением теоремы Ван Кампена доказывается следующее

Предложение 3 [4]. *Если $k \geq 2$, то $\pi_1(\widetilde{X}) = \pi_1(X)$.*

Простейшим примером является раздутие $2n$-мерного многообразия X в точке $p = Y$. Оно состоит в прибавлении комплексного проективного пространства: $\widetilde{X} = X \# \overline{\mathbb{C}P^n}$, где черта означает противоположную ориентацию.

В [14] дан набросок раздутия симплектических пространств, его подробное изложение представлено в [4].

Предложение 4 [14, 4]. *Если Y — компактное симплектическое подмногообразие симплектического многообразия (X, ω), то раздутие $\widetilde{X}$ многообразия X вдоль Y имеет симплектическую форму $\widetilde{\omega}$, которая совпадает с $\pi^*\omega$ вне окрестности $\pi^{-1}(Y)$.*

Форма (1) целочисленна, и поэтому по теореме Громова — Тышлера (предложение 1) существует симплектическое вложение многообразия Кодаиры — Терстона $\widetilde{M}$ в $\mathbb{C}P^5$. Определим многообразие МакДафф $\widetilde{\mathbb{C}P}^5$ как раздутие $\mathbb{C}P^5$ вдоль $\widetilde{M}$.

Предложение 5 [4]. *Размерность $H^3(\widetilde{\mathbb{C}P}^5; \mathbb{C})$ равна 3, и, следовательно, $\widetilde{\mathbb{C}P}^5$ не допускает кэлеровой структуры.*

§ 4. Минимальные модели и формальность

А) Дифференциальные градуированные алгебры и их минимальные модели. Напомним, что дифференциальная градуированная алгебра — это градуированная алгебра

$$\mathscr{A} = \oplus_{k \geq 0} \mathscr{A}^k$$

с дифференциалом $d : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ степени 1, т. е. $d(\mathscr{A}^k)) \subset \mathscr{A}^{k+1}$, таким, что

1) $x \wedge y = (-1)^{kl} y \wedge x$ при $x \in \mathscr{A}^k, y \in \mathscr{A}^l$;

2) $d(x \wedge y) = dx \wedge y + (-1)^k x \wedge dy$ при $x \in \mathscr{A}^k$ (правило Лейбница);

3) $d^2 = 0$.

Кольцо когомологий $H^*(\mathscr{A})$ алгебры $\mathscr{A}$, снабженное нулевым дифференциалом $d = 0$, также является дифференциальной градуированной алгеброй.

В дальнейшем мы будем рассматривать только алгебры над полем $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и также предполагать, что $\dim_F \mathscr{A}^k < \infty$ для каждого k.

Гомоморфизм f дифференциальных градуированных алгебр $(\mathscr{A}, d_{\mathscr{A}})$ и $(\mathscr{B}, d_{\mathscr{B}})$ — это гомоморфизм $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ алгебр такой, что $f(\mathscr{A}^k) \subset \mathscr{B}^k$ и $f(da) = df(a)$. Каждый такой гомоморфизм индуцирует гомоморфизм $f^* : H^*(\mathscr{A}) \to H^*(\mathscr{B})$ колец когомологий.

Алгебра называется *связной*, если $H^0(\mathscr{A}) = F$, где F — основное поле, и *односвязной*, если также $H^1(\mathscr{A}) = 0$. В дальнейшем мы ограничимся алгебрами с $\mathscr{A}^0 = H^0(\mathscr{A}) = F$, в которых умножение на элементы из $\mathscr{A}^0$ отождествляется с умножением на элементы из F.

Пусть $x_1, x_2, \dots$ — последовательность элементов с $\deg x_i \geq 1$ для каждого i. Обозначим через $\Lambda(x_1, \dots)$ свободную градуированно-коммутативную алгебру, порожденную $x_1, \dots$.

Дифференциальная градуированная алгебра $\mathscr{M}$ называется *минимальной*, если

1) $\mathscr{M} = \Lambda(x_1, \dots)$ для некоторого семейства свободных образующих, и при этом существует конечное число образующих каждой заданной степени;

2) $dx_i \in \Lambda(x_1, \dots, x_{i-1})$.

Заметим, что для односвязных алгебр условие 2 может быть заменено условием

2′) $d(\mathscr{M}) \subset \mathscr{M}^+ \wedge \mathscr{M}^+$, где $\mathscr{M}^+ = \bigoplus\limits_{k>0} \mathscr{M}^k$.

Будем говорить, что $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ — *минимальная модель алгебры* $\mathscr{A}$, если

1) $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ — минимальная алгебра;

2) существует гомоморфизм $h : \mathscr{M} \to \mathscr{A}$, индуцирующий изоморфизм колец когомологий.

Напомним фундаментальную теорему Сулливана.

Предложение 6 [15]. *Каждая односвязная дифференциальная градуированная алгебра имеет минимальную модель, единственную с точностью до изоморфизма.*

Сулливан показал, что односвязному полиэдру X сопоставляется минимальная алгебра над $\mathbb{Q}$, которая полностью описывает рациональный гомотопический тип X. В частности,

$$\operatorname{Hom}(\pi_*(X), \mathbb{Q}) = \mathscr{M}_X / \mathscr{M}_X \wedge \mathscr{M}_X. \tag{3}$$

Построение этой алгебры дается следующим предложением.

Предложение 7 [15]. 1. *Для каждого односвязного полиэдра X существуют дифференциальная алгебра $\mathscr{E}(X)$, образованная $\mathbb{Q}$-полиномиальными формами на X, и минимальная модель $\mathscr{M}_X$ алгебры $\mathscr{E}(X)$;*

2. *$\mathscr{M}_M \otimes \mathbb{R}$ — минимальная модель алгебры $\mathscr{E}^\infty(M)$ гладких дифференциальных форм на компактном многообразии M.*

Алгебра $\mathscr{M}_X$ называется минимальной моделью X.

Важное свойство минимальных моделей дается следующим предложением.

Предложение 8. *Каждое симплициальное отображение полиэдров или гладкое отображение многообразий $f : X \to Y$ индуцирует гомоморфизм минимальных моделей*

$$\hat{f} : \mathscr{M}_Y \to \mathscr{M}_X,$$

и при этом индуцированные гомоморфизмы $f^* : H^*(Y;\mathbb{Q}) \to H^*(X;\mathbb{Q})$ и $\hat{f}^* : H^*(\mathscr{M}_Y;\mathbb{Q}) \to H^*(\mathscr{M}_X;\mathbb{Q})$ удовлетворяют равенству

$$f^* h_Y^* = h_X^* \hat{f}^*,$$

где h_X и h_Y — отображения минимальных моделей $\mathscr{E}(X)$ и $\mathscr{E}(Y)$ в эти алгебры.

Подробное изложение минимальных моделей можно найти в [6, 16].

Б) Минимальные модели нильмногообразий. Минимальные модели определяются также для нильпотентных неодносвязных многообразий и, в частности, для нильмногообразий, т. е. компактных фактор-пространств $N = G/\Gamma$ нильпотентных односвязных групп G по равномерным решеткам Γ.

Для заданного нильмногообразия $X = G/\Gamma$ существует единственная (с точностью до изоморфизма) дифференциальная градуированная алгебра $\mathscr{M} = \mathscr{M}_X$ над $\mathbb{Q}$, удовлетворяющая, в частности, следующим условиям:

1) $\mathscr{M}$ свободно порождена элементами $x_1, \ldots, x_k$ степени 1;
2) $\mathscr{M}$ — минимальная алгебра;
3) $H^*(\mathscr{M}_X) = H^*(X;\mathbb{Q})$.

Эта алгебра называется *минимальной моделью нильмногообразия* X и имеет красивое и простое алгебраическое происхождение.

Пусть $\mathscr{G}$ — алгебра Ли нильпотентной группы G и $\mathscr{G}^*$ — алгебра, двойственная к $\mathscr{G}$. Скобки Ли задают отображение $\mathscr{G} \times \mathscr{G} \xrightarrow{[\cdot,\cdot]} \mathscr{G}$, и легко проверить, что двойственное отображение $d : \mathscr{G}^* \to \mathscr{G}^* \times \mathscr{G}^*$ является дифференциалом и при этом равенство $d^2 = 0$ эквивалентно тождеству Якоби. Нильпотентность $\mathscr{G}$ влечет минимальность алгебры $\Lambda(\mathscr{G}^*, d)$, которая будет минимальной моделью G/Γ.

Дифференциал этой минимальной модели выписывается в терминах структурных констант следующим образом. Пусть $\{e^1, \ldots, e^k\}$ — базис $\mathscr{G}$ и $\{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ — двойственный базис $\mathscr{G}^*$. Пусть в этом базисе скобки Ли имеют вид

$$[e^i, e^j] = \sum_k c_k^{ij} e^k.$$

Тогда дифференциал d равен

$$d\omega_k = \sum_{i,j} c_k^{ij} \omega_i \wedge \omega_j. \tag{4}$$

Элементы алгебры Ли естественно отождествляются с левоинвариантными векторными полями на G, а элементы $\mathscr{G}^*$ представляются при этом левоинвариантными 1-формами на G.

Предположим, что G имеет равномерные решетки. Из результатов А. И. Мальцева [17] следует, что это бывает тогда и только тогда, когда структурные константы c_k^{ij} рациональны в каком-то базисе. Пусть $\Gamma \subset G$ — равномерная решетка и $X = G/\Gamma$ — соответствующее нильмногообразие. По теореме

Номидзу [18] вложение левоинвариантных форм на X в алгебру форм на X индуцирует изоморфизм колец когомологий этих алгебр. При $F = \mathbb{Q}$ надо рассматривать формы с рациональными периодами, и при этом рациональность структурных констант гарантирует рациональность дифференциала (4).

Предложение 9. *Для n-мерного нильмногообразия $X = G/\Gamma$ его минимальная модель $\mathscr{M}_X$ корректно определена и имеет следующий вид:*

1) $\mathscr{M}_X = (\Lambda(x_1, \dots, x_n); d)$, *где* $\deg x_i = 1$ *при* $i = 1, \dots, n$;

2) $dx_k = \sum\limits_{i,j} c_k^{ij} x_i \wedge x_j$.

Пример. Минимальная модель многообразия Кодаиры — Терстона $\widetilde{M}$ свободно порождена элементами $\eta_1, \dots, \eta_4$ степени 1 такими, что

$$d\eta_1 = d\eta_2 = d\eta_4 = 0, \quad d\eta_3 = \eta_1 \wedge \eta_2. \tag{5}$$

Эти элементы реализуются согласно предложению 7 следующими левоинвариантными формами на $\widetilde{M}$:

$$\eta_1 = dx, \quad \eta_2 = dy, \quad \eta_3 = xdy + dz, \quad \eta_4 = du.$$

B) Формальность дифференциальных алгебр и пространств. Гомоморфизм дифференциальных градуированных алгебр

$$(\mathscr{A}, d_{\mathscr{A}}) \to (\mathscr{B}, d_{\mathscr{B}})$$

называется *квазиизоморфизмом*, если он индуцирует изоморфизм когомологий.

Минимальная алгебра $\mathscr{M}$ называется *формальной*, если существует квазиизоморфизм

$$(\mathscr{M}, d) \to (H^*(\mathscr{M}), 0).$$

В частности, отсюда следует, что $(\mathscr{M}, d)$ — минимальная модель своего кольца когомологий $(H^*(\mathscr{M}), 0)$ с нулевым дифференциалом.

Дифференциальная градуированная алгебра $\mathscr{A}$ называется *формальной*, если ее минимальная модель формальна.

Достаточное условие формальности, эффективное для приложений, вытекает из предложения 6: если существует квазиизоморфизм односвязной дифференциальной градуированной алгебры $(\mathscr{A}, d)$ на ее кольцо когомологий $(H^*(\mathscr{A}), 0)$ или существует квазиизоморфизм в обратном направлении, то алгебра $\mathscr{A}$ формальна.

Полиэдр или гладкое многообразие X называется *формальным*, если его минимальная модель формальна. Про такое пространство говорят, что его рациональный гомотопический тип является формальным следствием когомологий.

Примерами формальных пространств являются локально симметрические римановы многообразия [16], классифицирующие пространства [15], компактные кэлеровы многообразия [6] и односвязные компактные многообразия размерности ≤ 6 [10].

Простейшим примером неформального многообразия является трехмерное неодносвязное нильмногообразие $\mathscr{H}/\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}$.

Предложение 10. *Нильмногообразие $\mathscr{H}/\mathscr{H}_Z$ неформально.*

Согласно предложению 9 минимальная модель $\mathscr{M}$ многообразия $\mathscr{H}/\mathscr{H}_Z$ имеет следующий вид: $\mathscr{M} = \Lambda(x_1, x_2, x_3)$, $\deg x_i = 1$ и $dx_1 = dx_2 = 0$, $dx_3 = x_1 \wedge x_2$. Предполагая, что это многообразие формально, выберем гомоморфизм $\psi : \mathscr{M} \to H^*(\mathscr{M})$, тождественный на когомологиях. Заметим, что $\psi(x_1) \cup \psi(x_2) \in \psi(x_1) \cup H^1(\mathscr{M}) = 0$. Отсюда следует, что $\psi(x_1 \wedge x_3) = \psi(x_1) \cup \psi(x_3) = 0$. Элемент $x_1 \wedge x_3$ замкнут, но не точен в $\mathscr{M}$, и поэтому $\psi(x_1 \wedge x_3) \neq 0$. Мы приходим к противоречию, которое доказывает предложение.

С учетом (5) те же аргументы показывают, что многообразие Кодаиры — Терстона $\widetilde{M}$ также неформально.

Анализ этой ситуации ведет к следующему критерию. Минимальная модель односвязного пространства X изоморфна как градуированная коммутативная алгебра алгебре

$$\mathscr{M} = \bigotimes_{k \geq 0} \Lambda(V_k)_k,$$

где $V_k = \mathrm{Hom}(\pi_k(X), k), \mathbb{Q})$. В каждом V_k выберем подпространство C_k, образованное замкнутыми элементами.

Предложение 11 [6]. *$\mathscr{M}$ формальна тогда и только тогда, когда в каждом V_k существует дополнение N_k к C_k, $V_k = C_k \oplus N_k$, такое, что каждый замкнутый элемент из идеала I_N, порожденного элементами из N_k, $I_N = I(\oplus N_k)$, точен.*

Г) Произведения Масси. Мы определим только тройное произведение Масси.

Пусть $a \in \mathscr{M}^p, b \in \mathscr{M}^q$ и $c \in \mathscr{M}^r$ представляют нетривиальные классы когомологий такие, что $[a] \cup [b] = 0$ и $[b] \cup [c] = 0$. Следовательно, существуют $g \in \mathscr{M}^{p+q-1}$ и $h \in \mathscr{M}^{q+r-1}$ такие, что $a \wedge b = dg$ и $b \wedge c = dh$.

Определим цикл

$$k = g \wedge c + (-1)^{p-1} a \wedge h.$$

Его класс когомологий определен по модулю $([a]H^{q+r-1}(\mathscr{M}) + [c]H^{p+q-1}(\mathscr{M}))$ и называется *тройным произведением Масси*

$$\langle [a], [b], [c] \rangle \in H^{p+q+r-1}(\mathscr{M})/([a]H^{q+r-1}(\mathscr{M}) + [c]H^{p+q-1}(\mathscr{M})).$$

Из предложения 11 следует

Предложение 12. *Если существует нетривиальное тройное произведение Масси классов из $H^*(\mathscr{M})$, то алгебра $\mathscr{M}$ неформальна.*

§ 5. Когомологии раздутия симплектического многообразия

В этом параграфе мы изложим некоторые вычисления когомологий симплектических раздутий, часть которых была проведена в [4].

Пусть (X, ω) — компактное симплектическое многообразие размерности $2N$ и Y — его симплектическое подмногообразие размерности $2(N-k)$. Обозначим через $\widetilde{X}$ раздутие X вдоль Y, через $\pi : \widetilde{X} \to X$ — проекцию, которая является отображением степени единица, через V — замыкание достаточно малой трубчатой окрестности Y в X и через $\widetilde{V} = \pi^{-1}(V)$ — прообраз V при π. Границы $\widetilde{V}$ и V диффеоморфны S^{2k-1}-пучку над Y и диффеоморфны друг другу посредством π. Через j и $\tilde{j}$ обозначим вложения

$$j : V \to X \quad \text{и} \quad \tilde{j} : \widetilde{V} \to \widetilde{X},$$

а через f и $\tilde{f}$ — вложения пар

$$f : (X, \varnothing) \to (X, V) \quad \text{и} \quad \tilde{f} : (\widetilde{X}, \varnothing) \to (\widetilde{X}, \widetilde{V}).$$

Точные когомологические последовательности пар $(\widetilde{X}, \widetilde{V})$ и (X, V) связаны индуцированными гомоморфизмами π^*:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \leftarrow & H^{i+1}(\widetilde{X}) & \overset{\tilde{f}^*}{\leftarrow} & H^{i+1}(\widetilde{X}, \widetilde{V}) & \overset{\partial}{\leftarrow} & H^i(\widetilde{V}) & \overset{\tilde{j}^*}{\leftarrow} & H^i(\widetilde{X}) & \overset{\tilde{f}^*}{\leftarrow} & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\dots & \leftarrow & H^{i+1}(X) & \overset{f^*}{\leftarrow} & H^{i+1}(X, V) & \overset{\partial}{\leftarrow} & H^i(V) & \overset{j^*}{\leftarrow} & H^i(X) & \overset{f^*}{\leftarrow} & \\
& \leftarrow & H^i(\widetilde{X}, \widetilde{V}) & \overset{\partial}{\leftarrow} & H^{i-1}(\widetilde{V}) & \overset{\tilde{j}^*}{\leftarrow} & H^{i-1}(\widetilde{X}) & \leftarrow & \dots & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
& \leftarrow & H^i(X, V) & \overset{\partial}{\leftarrow} & H^{i-1}(V) & \overset{j^*}{\leftarrow} & H^{i-1}(X) & \leftarrow & \dots & &
\end{array} \tag{6}$$

Сформулируем некоторые простые свойства диаграммы последовательностей (6).

Предложение 13. *Вертикальный гомоморфизм*

$$\pi^* : H^i(X, V) \to H^i(\widetilde{X}, \widetilde{V})$$

является изоморфизмом при $i \geq 0$.

Доказательство. Обозначим через $\operatorname{Int} V$ и $\operatorname{Int} \widetilde{V}$ внутренности V и $\widetilde{V}$, которые являются расслоениями над Y, и заметим, что согласно лемме о вырезании вложения пар индуцируют изоморфизмы

$$H^i(\widetilde{X}, \widetilde{V}) = H^i(\widetilde{X} \setminus \operatorname{Int} \widetilde{V}, \widetilde{V} \setminus \operatorname{Int} \widetilde{V}), \quad H^i(X, V) = H^i(X \setminus \operatorname{Int} V, V \setminus \operatorname{Int} V).$$

Заметим, что $\pi^* : H^*(\widetilde{X} \setminus \operatorname{Int} \widetilde{V}, \widetilde{V} \setminus \operatorname{Int} \widetilde{V}) \to H^*(X \setminus \operatorname{Int} V, V \setminus \operatorname{Int} V)$ также является изоморфизмом. Предложение доказано.

Предложение 14. *Для* $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$ *вертикальный гомоморфизм*

$$\pi^* : H^i(X; F) \to H^i(\widetilde{X}; F)$$

является мономорфизмом при $i \geq 0$.

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что $F = \mathbb{R}$. Симплектические многообразия ориентированы, и поэтому для каждого нетривиального класса когомологий $[\tau] \in H^i(X; \mathbb{R})$ существует двойственный ему (по Пуанкаре) класс $[\eta] \in H^{2N-i}(X; \mathbb{R})$:

$$[\tau] \cup [\eta] = [\mathrm{vol}_X] \in H^{2N}(X; \mathbb{R}), \quad \langle [\mathrm{vol}_X], [X] \rangle = \int\limits_X \mathrm{vol}_X = 1.$$

Гомоморфизм $\pi^* : H^{2N}(X;\mathbb{R}) \to H^{2N}(\widetilde{X};\mathbb{R})$ является умножением на $\deg \pi$, и так как $\deg \pi = 1$, то $\pi^*([\mathrm{vol}_X]) = [\mathrm{vol}_{\widetilde{X}}]$. Поскольку π^* — гомоморфизм колец когомологий, то

$$\pi^*([\tau]) \cup \pi^*([\eta]) = \pi^*([\mathrm{vol}_X]) = [\mathrm{vol}_{\widetilde{X}}],$$

откуда следует, что $\pi^*([\tau]) \neq 0$. Предложение доказано.

Из предложения 14 очевидно вытекает

Предложение 15. *Если кольцо когомологий $H^*(X)$ не имеет кручения, то вертикальный гомоморфизм*

$$\pi^* : H^i(X) \to H^i(\widetilde{X})$$

является мономорфизмом при $i \geq 0$.

Наиболее важным случаем применения предложения 15 является $X = \mathbb{C}P^N$.

Так как $\widetilde{V}$ стягивается на $\widetilde{Y}$, а V — на Y с сохранением расслоений, мы выводим из предложения 2

Предложение 16. *Вертикальный гомоморфизм*

$$\pi^* : H^i(V) \to H^i(\widetilde{V})$$

является мономорфизмом при $i \geq 0$.

Теперь рассмотрим следствия (6) в некотором специальном случае.

Предложение 17. *Если Y — $2(N-k)$-мерное симплектическое подмногообразие $X = \mathbb{C}P^N$, то имеются следующие короткие точные последовательности:*

1) *при $i = 2l$, где $0 \leq l \leq (N-k)$,*

$$\begin{tikzcd}
 & & H^i(\widetilde{V}) \arrow[dl, "\partial"'] & H^i(\widetilde{X}) \arrow[l, "\tilde{j}^*"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & H^{i+1}(\widetilde{X},\widetilde{V}) \arrow[l, "\tilde{f}^*"'] & & & \\
 & & H^i(V) \arrow[ul, "\pi^*\cdot\partial"] \arrow[uu, "\pi^*"] & \mathbb{Z} = H^i(X) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[uu, "\pi^*"] & 0; \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{7}$$

2) *при $i = 2l$, где $(N-k+1) \leq l \leq N$,*

$$0 \leftarrow H^i(\widetilde{V}) \overset{\tilde{j}^*}{\leftarrow} H^i(\widetilde{X}) \overset{\pi^* f^*}{\leftarrow} \mathbb{Z} = H^i(X) = H^i(X,V) \overset{\partial}{\leftarrow} 0; \tag{8}$$

3) *при $i = 2l+1$, где $i+1 \leq \dim Y = 2(N-k)$,*

$$\begin{tikzcd}
0 & H^{i+1}(\widetilde{X},\widetilde{V}) \arrow[l] & H^i(\widetilde{V}) \arrow[l, "\partial"'] & H^i(\widetilde{X}) \arrow[l, "\tilde{j}^*"'] & 0 \arrow[l] \\
 & & H^i(V) \arrow[ul, "\pi^*\partial"] \arrow[u, "\pi^*"] & 0; \arrow[l] &
\end{tikzcd} \tag{9}$$

4) *при $i = 2l+1$, где $i+1 > \dim Y = 2(N-k)$,*

$$0 \leftarrow \pi^*(H^{i+1}(X)) = \mathbb{Z} \leftarrow H^{i+1}(\widetilde{X},\widetilde{V}) \overset{\partial}{\leftarrow} H^i(\widetilde{V}) \overset{\tilde{j}^*}{\leftarrow} H^i(\widetilde{X}) \leftarrow 0. \tag{10}$$

Доказательство. 1. Вложение $Y \subset V \subset X$ симплектично, так что $j^* : H^i(X) \to H^i(V) = H^i(Y)$ является мономорфизмом при $i \le 2(N-k)+1$. Отсюда следует, что

$$f^* = 0 \quad \text{при} \quad i \le 2(N-k)+1. \tag{11}$$

Поскольку диаграмма (6) коммутативна и $\pi^* : H^i(X, V) \to H^i(\widetilde{X}, \widetilde{V})$ — изоморфизм, то

$$\tilde{f}^* = 0 \quad \text{при} \quad i \le 2(N-k)+1. \tag{12}$$

Теперь (6) вместе с (11) и (12) влечет (7).

2. При $i = 2l > 2(N-k)$ имеем $H^i(V) = H^{i-1}(V) = 0$ и $H^{i+1}(X) = 0$. Следовательно, нижняя точная последовательность из (6) вместе с предложением 13 влечет, что

$$H^{i+1}(X, V) = H^{i+1}(\widetilde{X}, \widetilde{V}) = 0 \quad \text{при } i = 2l > 2(N-k), \tag{13}$$

$$H^i(X) \overset{f^*}{\approx} H^i(X, V) \quad \text{при } i = 2l > 2(N-k). \tag{14}$$

Теперь (6) вместе с (13) и (14) дает (8).

3. Заметим, что $H^i(X) = 0$ при $i = 2l+1$. Учитывая (12) при $i+1 = 2l+2 \le \dim Y$, приходим к (9).

4. При $i = 2l+1$, где $i+1 > \dim Y$, имеем $H^{i+1}(V) = 0$ и $H^i(X) = 0$. Из первого равенства следует, что гомоморфизм $\tilde{j}^* : H^{i+1}(\widetilde{X}) \to H^{i+1}(\widetilde{V})$ тривиален: $\tilde{j}^* = 0$. Из второго равенства вместе с предложением 13 и коммутативностью диаграммы (6) вытекает, что гомоморфизм $\tilde{f}^* : H^i(\widetilde{X}, \widetilde{V}) \to H^i(\widetilde{X})$ тоже тривиален. В этом случае соответствующий фрагмент (6) сводится к (10).

Предложение 17 доказано.

Напомним, что минимальная модель $\mathbb{C}P^m$ — это дифференциальная градуированная алгебра $\mathscr{M}_{\mathbb{C}P^m}$, свободно порожденная элементами x и y степеней $\deg x = 2$ и $\deg y = 2k-1$, и с дифференциалом, действующим как $dx = 0$, $dy = x^k$.

Минимальная модель $\widetilde{Y}$ находится с помощью предложения 2 следующим образом.

Предложение 18. *Пусть $\mathscr{M}_Y$ — минимальная модель Y и $E \to Y$ — векторное расслоение со структурной группой $U(k)$. Тогда минимальная модель $\mathscr{M}_{\widetilde{Y}}$ его проективизации $\widetilde{Y}$ изоморфна*

$$\mathscr{M}_{\widetilde{Y}} = \mathscr{M}_Y \otimes_d \mathscr{M}_{\mathbb{C}P^{k-1}},$$

дифференциальной градуированной алгебре, свободно порожденной элементами $\mathscr{M}_Y$ и $\mathscr{M}_{\mathbb{C}P^{k-1}}$, и с дифференциалом d, действующим на $\mathscr{M}_{\widetilde{Y}}$ следующим образом:

1) его ограничение на $\mathscr{M}_Y$ совпадает с дифференциалом на $\mathscr{M}_Y$;

2) $dx = 0$ и $dy = x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_{k-1}x + c_k$, где элементы $c_j \in \mathscr{M}_Y$ представляют рациональные классы Черна $c_j(E)$ при изоморфизме $H^*(\mathscr{M}_Y) = H^*(Y; \mathbb{Q})$.

Это предложение достаточно очевидно и также следует из общих фактов о связи минимальных моделей и расслоений Серра [19].

§ 6. Примеры неформальных односвязных симплектических многообразий

А) Семейство неформальных симплектических нильмногообразий. Рассмотрим алгебру $W(1)$ формальных векторных полей на прямой. Это топологическая бесконечномерная алгебра, базис которой задается линейными дифференциальными операторами

$$e_k = x^{k+1}\frac{d}{dx}, \quad k = -1, 0, 1, \ldots.$$

Скобки Ли в этом базисе имеют вид

$$[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}, \quad i, j \geq -1. \tag{15}$$

Алгебра $W(1)$ имеет естественную фильтрацию

$$\cdots \subset \mathscr{L}_1(1) \subset \mathscr{L}_0(1) \subset \mathscr{L}_{-1}(1) \subset W(1),$$

где $\mathscr{L}_k(1)$ — подалгебра, порожденная $e_k, e_{k+1}, \ldots$. Здесь мы пользуемся обозначениями из [20].

Рассмотрим семейство конечномерных нильпотентных алгебр Ли

$$\mathscr{V}_n = \mathscr{L}_1(1)/\mathscr{L}_{n+1}(1), \quad n = 3, 4, \ldots.$$

Обозначим через V_n соответствующие односвязные группы Ли. Алгебра $\mathscr{V}_n$ n-мерна с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и скобками Ли

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j} & \text{при } i+j \leq n, \\ 0 & \text{при } i+j > n. \end{cases} \tag{16}$$

Структурные константы $\mathscr{V}_n$ рациональны, и, следовательно, $\mathscr{V}_n$ имеет равномерные решетки. Мы выберем одну из них, которую можно считать канонической [17]. Группа V_n изоморфна $(\mathscr{V}_n, \times)$ с умножением $\times$, заданным формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа. Базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ мультипликативно порождает подгруппу Γ_n, и в результате мы получаем бесконечное семейство конечномерных нильмногообразий

$$M(n) = V_n/\Gamma_n, \quad n = 3, 4, \ldots.$$

Группа V_3 — это группа Гейзенберга $\mathscr{H}$, $M(3)$ — это $\mathscr{H}/\mathscr{H}_Z$, и $M(3) \times S^1$ — многообразие Кодаиры — Терстона $\widetilde{M}$.

Существуют только три 4-мерные односвязные нильпотентные группы:

1) $\mathbb{R}^4$, допускающая левоинвариантную кэлерову структуру;

2) $V_3 \oplus \mathbb{R}$, допускающая левоинвариантные комплексные и симплектические структуры, но не допускающая левоинвариантной кэлеровой структуры;

3) V_4 — трехступенно нильпотентная группа, допускающая левоинвариантную симплектическую структуру, но не имеющая левоинвариантной комплексной структуры [12].

Пусть $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — базис левоинвариантных 1-форм на V_n, двойственный базису $\{e_1, \ldots, e_k\}$. Тогда из (16) следует, что

$$d\omega_k = (k-2)\omega_1 \wedge \omega_{k-1} + (k-4)\omega_2 \wedge \omega_{k-2} + \ldots. \tag{17}$$

С помощью предложения 9 выводим

Предложение 19. *Минимальная модель $M(n) = V_n/\Gamma_n$ имеет вид*

$$\mathscr{M}(n) = (\Lambda(x_1, \dots, x_n), d), \text{ где } \deg x_k = 1 \text{ при } k = 1, \dots, n,$$

$$dx_1 = dx_2 = 0,\ dx_k = (k-2)x_1 \wedge x_{k-1} + (k-4)x_2 \wedge x_{k-2} + \dots \text{ при } k \geq 3.$$

Алгебра $\mathscr{M}(n)$ биградуирована, и вторая градуировка дается формулой $\deg' x_i = i$. При этом бистепень дифференциала равна $(1, 0)$.

Предложение 20. *Форма*

$$\Omega_{2m} = (2m-1)\omega_1 \wedge \omega_{2m} + (2m-3)\omega_2 \wedge \omega_{2m-1} + \dots + \omega_m \wedge \omega_{m+1}$$

— левоинвариантная симплектическая форма на V_{2m} при $m \geq 2$.

Доказательство этого предложения следующее. Расширим $\mathscr{V}_{2m}$ добавлением новой образующей ω_{2m+1} такой, что $d\omega_{2m+1} = \Omega_{2m}$. Из (17) получаем при этом $\mathscr{V}_{2m+1}$, и поэтому $d^2\omega_{2m+1} = d\Omega_{2m} = 0$. Предложение доказано.

Так как Ω_{2m} инвариантна, она опускается на фактор-пространства группы V_{2m}, и мы сохраним для ее образа то же обозначение. Очевидно, что интегралы Ω_{2m} по циклам из $H_2(V_{2m}; \mathbb{Z})$ целочисленны. Отсюда вытекает

Следствие 1. *Нильмногообразия $M(2m)$ допускают целочисленные симплектические формы.*

Докажем следующее

Предложение 21. *Для каждого $m \geq 2$*
1) $H^1(M(2m); \mathbb{Q})$ линейно порождена $[x_1]$ и $[x_2]$;
2) $[x_2 \wedge x_3] \neq 0$ в $H^2(M(2m); \mathbb{Q})$.

Так как $\mathscr{M}(2m)$ имеет только две замкнутые образующие, первое утверждение очевидно. Заметим теперь, что $x_2 \wedge x_3$ имеет бистепень $(2, 5)$, и напомним, что d имеет бистепень $(1, 0)$. Если $x_2 \wedge x_3 = du$, то u должно быть пропорционально x_5, но согласно (17) $dx_5 = 3x_1 \wedge x_4 + x_2 \wedge x_3$. Предложение доказано.

Теорема 1. *Симплектические многообразия $M(2m)$ неформальны.*

С учетом того, что $dx_3 = x_1 \wedge x_2$ в $\mathscr{M}(2m)$, доказательство теоремы получается из предложения 21 с помощью тех же рассуждений, что и доказательство предложения 10.

Б) Неформальные односвязные симплектические многообразия. Согласно предложению 1 существуют симплектические вложения $\widetilde{M} = M(3) \times S^1$ в $\mathbb{C}P^N$ при $N \geq 5$ и $M(2m)$ в $\mathbb{C}P^N$ при $N \geq 2m+1$ такие, что симплектическая форма (1) и Ω_{2m} — прообразы форм Фубини — Штуди ω_{FS} на $\mathbb{C}P^N$ при этих вложениях.

Теперь, реализуя эти нильмногообразия как симплектические подмногообразия комплексных проективных пространств, обозначим через $\widetilde{\mathbb{C}P}^N$ симплектическое раздутие $\mathbb{C}P^N$ вдоль $\widetilde{M}$ и через $\widetilde{X}_m(N)$ — симплектическое раздутие $\mathbb{C}P^N$ вдоль $M(2m)$.

Теорема 2. *При $m \geq 2$ и $N \geq 2m+1$ симплектические многообразия $\widetilde{\mathbb{C}P}^N$ и $\widetilde{X}_m(N)$ односвязны и неформальны.*

Доказательство теоремы 2. Согласно предложению 3 многообразия в формулировке теоремы односвязны. Мы будем использовать те же обозначения, что и в § 5, и обозначим через Z замыкание дополнения к $\widetilde{V}$ и V в X и Y. Введем следующие обозначения для вложений:

$$Z \xleftarrow{\tilde{i}_1} \partial V \xrightarrow{\tilde{i}} \widetilde{V}, \quad Z \xrightarrow{\tilde{j}_1} \widetilde{X} \xleftarrow{\tilde{j}} \widetilde{V},$$

и заметим, что $\tilde{j}$ уже введено в § 5, а $\tilde{i}$ — в § 3. Мы будем рассматривать рациональные когомологии.

Рассмотрим точную последовательность Майера — Виеториса для пары $(Z, \widetilde{V})$:

$$\cdots \to H^q(Z \cup \widetilde{V}) \xrightarrow{\tilde{j}_1^* \oplus \tilde{j}^*} H^q(Z) \oplus H^q(\widetilde{V}) \xrightarrow{\tilde{i}_1^* - \tilde{i}^*} H^q(Z \cap \widetilde{V}) \to \dots .$$

Из (7), (9) и (10) следует, что $\tilde{j}^*$ — мономорфизм при $q \leq \dim Y + 1$, и мы заключаем, что имеются следующие расщепления:

$$0 \to H^q(\widetilde{X}) \xrightarrow{\tilde{j}_1^* \oplus \tilde{j}^*} H^q(Z) \oplus H^q(\widetilde{V}) \xrightarrow{\tilde{i}_1^* - \tilde{i}^*} H^q(\partial \widetilde{V}) \to 0 \quad \text{при } q \leq \dim Y + 1. \qquad (18)$$

Для каждого Y вида $M(2m)$ или $M(3) \times S^1$ его минимальная модель содержит замкнутые образующие x_1 и x_2 и образующую x_3 такую, что $dx_3 = x_1 \wedge x_2$ (см. (1) и предложения 9 и 19).

Возьмем элементы $(0, a \cup [x_1])$ и $(0, a \cup [x_2])$ в $H^3(Z) \oplus H^3(\widetilde{V})$ и заметим, что согласно предложению 2 $\tilde{i}^*(a) = 0$, что вместе с (18) влечет существование элементов $u_1, u_2 \in H^3(\widetilde{X})$ таких, что $\tilde{j}^*(u_k) = a \cup [x_k]$ при $k = 1, 2$.

Нам осталось доказать две леммы.

Лемма 1. *При $m \geq 3$ тройное произведение Масси $\langle u_2, u_1, u_2 \rangle$ определено и нетривиально в $H^8(\widetilde{X}_m(N))/u_2 \cup H^5(\widetilde{X}_m(N))$.*

Лемма 2. *Для симплектических многообразий $\widetilde{\mathbb{C}P}^N$ и $\widetilde{X}_2(N)$ тройное произведение Масси $\langle u_2, v, u_2 \rangle$ определено, где $v = \pi^*([\omega])$ и ω — симплектическая форма на $X = \mathbb{C}P^N$. Это произведение нетривиально в $H^7/(u_2 \cup H^4)$.*

Доказательство леммы 1. Поскольку $[x_1 \wedge x_2] = 0$ в $M_{\widetilde{V}}$, имеем

$$\tilde{j}^*(u_1 \cup u_2) = \tilde{j}^*(u_1) \cup \tilde{j}^*(u_2) = a^2 \cup ([x_1] \cup [x_2]) = 0.$$

Но $\deg(u_1 \cup u_2) = 6 \leq \dim M(2m)$, и так как согласно (7) $\tilde{j}^* : H^6(\widetilde{X}) \to H^6(\widetilde{V})$ — мономорфизм, то $u_1 \cup u_2 = 0$ в $H^6(\widetilde{X})$. Следовательно, тройное произведение $\langle u_2, u_1, u_2 \rangle$ определено.

Образ тройного произведения в $H^8(\widetilde{V})$ равен $a^3 \cup ([x_3] \cup [x_2])$ по модулю $(a \cup [x_2]) \cup H^5(\widetilde{V})$. Используя предложение 18, легко посчитать, что

$$a^3 \cup ([x_3] \cup [x_2]) \neq 0 \bmod (a \cup [x_2]) \cup H^5(\widetilde{V}).$$

Имеем $\tilde{j}^*(u_2 \cup H^5(\widetilde{X})) \subset (a \cup [x_2]) \cup H^5(\widetilde{V})$, и тем самым тройное произведение $\langle u_2, u_1, u_2 \rangle$ также нетривиально по модулю $u_2 \cup H^5(\widetilde{X})$, что и доказывает лемму.

Доказательство леммы 2. Согласно предложению 18 $a = [x] \in H^2(\widetilde{V})$. Подсчитаем

$$\tilde{j}(u_2 \cup v) = [x \wedge x_2] \cup [Ax_1 \wedge x_4 + x_2 \wedge x_3] = A[x \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_4] = -A[d(x \wedge x_3 \wedge x_4)],$$

где $A = 1$ при $Y = \widetilde{M}$ и $A = 3$ при $Y = M(4)$. Следовательно, $\tilde{j}^*(u_2 \wedge v) = 0$.

В силу (9) $\tilde{j}^* : H^5(\widetilde{X}) \to H^5(\widetilde{V})$ — мономорфизм и, следовательно,

$$u_2 \cup v = 0.$$

Поэтому тройное произведение $\langle u_2, v, u_2 \rangle$ определено, и его образ в $H^7(\widetilde{V})$ равен $-Aa^2 \cup [x_2 \wedge x_3 \wedge x_4] \operatorname{mod}(a \cup [x_2]) \cup H^4(\widetilde{V})$. Легко подсчитать, используя предложение 18, что

$$a^2 \cup [x_2 \wedge x_3 \wedge x_4] \neq 0 \operatorname{mod}(a \cup [x_2]) \cap H^5(\widetilde{V}).$$

Так как $\tilde{j}^*(u_2 \cup H^4(\widetilde{X})) \subset (a \cup [x_2]) \cup H^4(\widetilde{V})$, тройное произведение $\langle u_2, v, u_2 \rangle$ нетривиально по модулю $u_2 \cup H^4(\widetilde{X})$, что и доказывает лемму.

Теперь теорема 2 следует из лемм 1 и 2 и предложения 12.

Предложение 22. *Пусть X_1 и X_2 — односвязные многообразия размерности N и существует нетривиальное тройное произведение Масси в $H^q(X_1)$, где $q \leq N-3$. Тогда существует нетривиальное произведение Масси в $H^q(X_1 \# X_2)$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность Майера — Виеториса для пары $(\overline{X_1 \setminus D}, \overline{X_2 \setminus D})$, где D — N-диск и верхняя черта обозначает замыкание. Так как $H^q(S^{N-1}) = H^q(\overline{X_1 \setminus D} \cap \overline{X_2 \setminus D}) = 0$ для $1 \leq q \leq N-2$, вложения $j_1 : \overline{X_1 \setminus D} \to X_1 \# X_2$ и $j_2 : \overline{X_2 \setminus D} \to X_1 \# X_2$ индуцируют изоморфизмы

$$H^q(X_1 \# X_2) \xrightarrow{j_1^* \oplus j_2^*} H^q(\overline{X_1 \setminus D}) \oplus H^q(\overline{X_2 \setminus D})$$

при $1 \leq q \leq N-3$.

Рассматривая последовательность Майера — Виеториса для пары $(\overline{X_1 \setminus D}, \overline{D})$, заключаем, что существуют изоморфизмы $H^q(X_1) \to H^q(\overline{X_1 \setminus D})$ при $1 \leq q \leq N-3$. Следовательно, если есть нетривиальное тройное произведение Масси степени $\leq N-3$ в когомологиях X_1, то оно выживает в когомологиях $X_1 \# X_2$. Предложение доказано.

Следствие 2. *Для каждого $k \geq 1$ симплектические многообразия $\widetilde{\mathbb{C}P}^N \# k\overline{\mathbb{C}P}^N$ и $\widetilde{X}_m(N) \# k\overline{\mathbb{C}P}^N$ неформальны.*

Доказательство очевидно, так как нетривиальные тройные произведения в $\widetilde{\mathbb{C}P}^N$ и $\widetilde{X}_2(N)$, построенные в доказательстве леммы 2, имеют степень 7 и нетривиальные тройные произведения в $\widetilde{X}_m(N)$ с $m \geq 3$, построенные в доказательстве леммы 1, имеют степень 8, и поэтому все они выживают при раздутиях в точках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gromov M. L.* A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities // Actes Congrés Intern. Math. (Nice, 1970). Paris: Gauthier-Villars, 1971. V. 2. P. 221–225.

2. *Tischler D.* Closed 2-forms and an embedding theorem for symplectic manifolds // J. Differential Geom. 1977. V. 12. P. 229–235.
3. *Thurston W.* Some simple examples of compact symplectic manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 55. P. 467–468.
4. *McDuff D.* Examples of symplectic simply connected manifolds with no Kähler structure // J. Differential Geom. 1984. V. 20. P. 267–277.
5. *Gompf R. E.* A new construction of symplectic manifolds // Ann. of Math. (2). 1995. V. 142. P. 527–595.
6. *Deligne P., Griffiths P., Morgan J., Sullivan D.* Real homotopy theory of Kähler manifolds // Invent. Math. 1975. V. 19. P. 245–274.
7. *Benson C., Gordon C.* Kähler and symplectic structures on nilmanifolds // Topology. 1988. V. 27. P. 513–518.
8. *Lupton G., Oprea J.* Symplectic manifolds and formality // J. Pure Appl. Algebra. 1994. V. 91. P. 193–207.
9. *Tralle A., Oprea J.* Symplectic manifolds with no Kähler structure. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1997. (Lecture Notes in Math.; 1661).
10. *Neisendorfer J., Miller T.* Formal and coformal spaces // Illinois J. Math. 1978. V. 22. P. 565–579.
11. *Бабенко И. К., Тайманов И. А.* О существовании неформальных односвязных симплектических многообразий // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, № 5. С. 225–226.
12. *Fernandez M., Gotay M., Gray A.* Compact parallelizable four dimensional symplectic and complex manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103. P. 1209–1212.
13. *Husemoller D.* Fibre bundles. New York: McGraw-Hill, 1996.
14. *Gromov M. L.* Partial differential relations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1986.
15. *Sullivan J.* Infinitesimal computations in topology // Publ. IHES. 1978. V. 47. P. 269–331.
16. *Griffiths P., Morgan J.* Rational homotopy theory and differential forms. Basel: Birkhäuser, 1981.
17. *Мальцев А. И.* О классе однородных пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1949. Т. 3. С. 9–32.
18. *Nomizu K.* On the cohomology of homogeneous spaces of nilpotent Lie groups // Ann. of Math. (2). 1954. V. 59. P. 531–538.
19. *Thomas J. C.* Rational homotopy of Serre fibrations // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1981. V. 31, N 3. P. 71–90.
20. *Фукс Д. Б.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.

Статья поступила 17 января 2000 г.

г. Москва
Московский гос. университет, ММФ; Département de Mathématiques, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France,
babenko@mech.math.msu.su; babenko@math.univ-montp2.fr

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
taimanov@math.nsc.ru