Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 517.51

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРАХ КЛАССА S_{2m}

Ю. Г. Абакумов, Н. А. Забелина, О. Н. Шестакова

Аннотация: Доказаны две теоремы о сходимости последовательностей линейных функционалов, определенных на элементах линейного нормированного пространства. Рассмотрены их приложения к исследованию аппроксимативных свойств операторов класса S_{2m} (по П. П. Коровкину). Библиогр. 11.

Пусть $W_f \subset C_{2\pi}$ — некоторое множество непрерывных 2π-периодических функций, W_L — множество линейных операторов $L : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$. Теория аппроксимаций (или теория приближений) рассматривает утверждения, которые схематически можно представить следующим образом:

$$(f \in W_f,\ L_n \in W_L,\ \text{условия}) \Rightarrow \|L_n(f(t), x) - f(x)\| \to 0.$$

Здесь $\|\cdot\|$ означает чебышевскую норму в пространстве $C_{2\pi}$. Если, кроме факта сходимости, утверждение не несет другой информации (например, о скорости стремления к нулю нормы разности), то подобные утверждения называют *аппроксимационными теоремами качественного типа* (см., например, [1]). Наибольший интерес представляют аппроксимационные теоремы количественного типа, один из вариантов которых можно представить в виде схемы:

$$(f \in W_f,\ L_n \in W_L,\ \text{условия}) \Rightarrow (\exists \alpha_n(f) \to 0 : \|L_n(f(t), x) - f(x)\| \leq \alpha_n).$$

Хорошо поддается анализу случай, когда W_L — множество линейных положительных операторов. Еще в 1953 г. П. П. Коровкин [2] получил для них теорему качественного типа (вскоре были получены и количественные варианты, см. [3]). В теореме Коровкина $W_f = C_{2\pi}$, условиями же являются условия сходимости на трех функциях $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$, т. е. $\|L_n(f_i(t), x) - f_i(x)\| \to 0$, $i = 0, 1, 2$. Теорема Коровкина опирается на вспомогательное утверждение о функционалах: если для последовательности линейных положительных функционалов $\mu_n : C_{2\pi} \to \mathbb{R}$ и точки x выполняется $\mu_n(1) \to 1$, $\mu_n\left(\sin^2 \frac{t-x}{2}\right) \to 0$, то для любой $f(t)$, 2π-периодической и непрерывной в x, имеет место сходимость $\mu_n(f(t)) \to f(x)$. В работе [4] замечено, что функция $\sin^2 \frac{t-x}{2}$ является точкой гладкости конуса неотрицательных функций и что теорема Коровкина о функционалах представляет собой следствие довольно простой теоремы о точках гладкости. В дальнейшем подход получает развитие, например, в [5] (см. также [6]). Отметим цикл работ Л. Г. Лабскера (см. [1] и библиографию в ней). Однако в указанных работах рассматриваются только теоремы качественного типа.

В [7] высказана идея, заключающаяся в том, что понятие точки гладкости формулируется в другой форме (отличной от общепринятой), и это позволяет выделить элементы, с помощью которых получаются оценки скорости приближения. Эта идея развита в работе [8], где проиллюстрирована возможность применения данного подхода.

Предлагаемая статья содержит развитие схемы, рассматриваемой в [8]. В ней приведены актуальные приложения (а не только иллюстрирующие примеры, как в [8]).

Все понятия, необходимые для понимания материала, сформулированы ниже (знания работ [7, 8] не требуется).

Термином «конус» мы называем замкнутое выпуклое множество, которое вместе с любым принадлежащим ему элементом p содержит луч, состоящий из элементов вида λp, где $\lambda \geq 0$ — действительное число. Если K означает конус, то K^* — множество линейных функционалов с конечной нормой, неотрицательных на элементах K.

Пусть X — действительное линейное нормированное пространство, $K_n \subset X$, $n = 1, 2, \dots,$ — последовательность конусов, $p_n \in X$ — последовательность элементов, причем $\|p_n\|$ равномерно по n ограничены, $\mu \in X^*$, $F = \operatorname{lin}\{z_i\}_{i=1}^k$. При этом полагаем, что $\{z_i\}_{i=1}^k$ линейно независима (здесь $\operatorname{lin} M$ означает линейную оболочку множества M).

Будем полагать, что $p \in \Phi = \Phi(F, \{K_n\}, \{p_n\}) \subset X$, если по p найдутся последовательность положительных чисел c_n и последовательность элементов $g_n \in F$ такие, что

$$c_n p_n - p + g_n \in K_n, \quad -c_n p_n - p + g_n \in -K_n, \tag{1}$$

при этом $c_n \mu(p_n) \to 0$, $\mu(g_n - p) \to 0$.

Теорема 1. *Если* $\mu_n \in K_n^*$, $\gamma_n = \max\limits_{1 \leq i \leq k} |\mu_n(z_i) - \mu(z_i)| \to 0$, $p_n \in F$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n\gamma_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n\|\gamma_n = 0$ *для* $p \in \Phi$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(p) = \mu(p)$.

Доказательство. Из (1) и того, что $\mu_n \in K_n^*$, получаем

$$-c_n\mu_n(p_n) + \mu_n(g_n) \leq \mu_n(p) \leq c_n\mu_n(p_n) + \mu_n(g_n).$$

Отсюда

$$|\mu_n(p) - \mu(p)| \leq c_n\mu_n(p_n) + |\mu_n(g_n) - \mu(p)|. \tag{2}$$

Далее,

$$|\mu_n(p) - \mu(p)| \leq c_n|\mu(p_n)| + c_n|\mu_n(p_n) - \mu(p)| + |\mu_n(g_n) - \mu(g_n)| + |\mu(g_n) - \mu(p)|.$$

Условиями теоремы обеспечивается сходимость к нулю последовательностей $c_n|\mu(p_n)|$ и $|\mu(g_n) - \mu(p)|$. Для оценки последовательностей $|\mu_n(p_n) - \mu(p_n)|$ и $|\mu_n(g_n) - \mu(g_n)|$ введем некоторые обозначения. Пусть $H_i = \operatorname{lin}\{z_j\}_{j\neq i}$, r_i — расстояние от z_i до H_i, $r = \min\limits_{l \leq i \leq k} r_i$. Система $\{z_i\}_{i=1}^k$ линейно независима, $r > 0$. Пусть

$$p_n = \sum_{j=1}^k \alpha_j^n z_j = \alpha_i^n z_i + \sum_{j\neq i} \alpha_j^n z_j = \alpha_i^n z_i + y_i^n.$$

Имеем $\|p_n\| = \left\|\alpha_i^n z_i + y_i^n\right\| \geq \left|\alpha_i^n\right| r_i$ (так как $y_i^n \in H_i$). Отсюда $\left|\alpha_i^n\right| \leq \|p_n\| r^{-1}$. Следовательно,

$$|\mu_n(p_n) - \mu(p_n)| = \left|\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n (\mu_n(z_i) - \mu(z_i))\right|$$
$$\leq \|p_n\| r^{-1} \sum_{i=1}^{k} |\mu_n(z_i) - \mu(z_i)| \leq \|p_n\| k r^{-1} \gamma_n.$$

Аналогично $|\mu_n(g_n) - \mu(g_n)| \leq \|g_n\| k r^{-1} \gamma_n$. Кроме того, $c_n |\mu_n(p_n) - \mu(p_n)| \leq k r^{-1} \|p_n\| c_n \gamma_n$. Так как по условию $\|g_n\|\gamma_n \to 0$, $c_n\gamma_n \to 0$, то $c_n|\mu_n(p_n) - \mu(p_n)| \to 0$, $|\mu_n(g_n) - \mu(g_n)| \to 0$.

Теорема доказана.

В качестве конкретизации рассмотрим операторы вида

$$L : C_{2\pi} \to C_{2\pi}, \quad L_n(f(t), x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t + x) u_n(t)\, dt,$$

где $u_n(t)$ — непрерывное четное ядро, $u_n(t) \geq 0$ при $t \in [-h_n, h_n]$, $u_n(t) \leq 0$ при $t \in [-\pi, \pi] \backslash [-h_n, h_n]$, $h_n \downarrow 0$, $h_1 < \pi$. Кроме того, предполагаем, что $L_n(1, x) = 1$.

Эти операторы *принадлежат классу* S_2 (определение классов S_m дано П. П. Коровкиным [9]). Конкретные конструкции предложены, например, В. А. Баскаковым [10] и Р. К. Васильевым [11].

Говорят, что оператор L *принадлежит классу* S_m, если при каждом x функционал $L(f(t), x)$ неотрицателен на функциях, имеющих тот же знак, что и некоторая фиксированная (для x) функция из $C_{2\pi}$, имеющая m_x простых нулей на $]x - \pi, x + \pi[$ и в других точках на этом промежутке в нуль не обращающаяся, при этом $m_x \leq m$ $\forall x$.

Для операторов рассматриваемого нами интегрального типа включение $L_n \in S_{2m}$ означает, что ядро $u_n(t)$ имеет $2m$ простых нулей на $]-\pi, \pi[$. (Чтобы не загромождать рассуждения лишними деталями, предполагаем, что определяющая класс функция имеет только простые нули и не имеет двойных нулей. Заметим, что у ядер $u_n(t)$ могут быть двойные нули.)

Изучаемые нами последовательности операторов класса S_2 при фиксированном x являются последовательностями линейных функционалов, принадлежащих K_n^*, где K_n — конус 2π-периодических функций, неотрицательных на $[x - h_n, x + h_n]$ и неположительных на $[x - \pi, x + \pi] \setminus [x - h_n, x + h_n]$.

Покажем, что при $p_n(t) = \cos(t - x) - \cos h_n$, $F = \operatorname{lin}\{1, \sin t, \cos t\}$ любая $f(t) \in \operatorname{Lip} 1$ принадлежит $\Phi(F, \{K_n\}, \{p_n\})$. Положим

$$g_n(t) = \frac{f(x + h_n) - f(x - h_n)}{2 \sin h_n} \sin(t - x) + \frac{f(x - h_n) + f(x + h_n)}{2}.$$

Если $f(t) \in \operatorname{Lip}_M 1$, то $f(t) - g_n(t) \in \operatorname{Lip}_{\lambda(n)} 1$, где $\lambda(n) = M\bigl(2 + \frac{h_n - \sin h_n}{\sin h_n}\bigr)$. В самом деле, если обозначить $\varphi(t) = f(t) - g_n(t)$, то для $t_1, t_2 \in [x - \pi, x + \pi]$ получаем

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| = \left| f(t_1) - f(t_2) - \frac{f(x + h_n) - f(x - h_n)}{2 \sin h_n} (\sin(t_1 - x) - \sin(t_2 - x)) \right|$$
$$\leq M|t_1 - t_2| + \frac{|f(x + h_n) - f(x - h_n)|}{2 \sin h_n} |t_1 - t_2| \leq M|t_1 - t_2| + \frac{M h_n}{\sin h_n} |t_1 - t_2|$$
$$= M\left(1 + \frac{h_n}{\sin h_n}\right)|t_1 - t_2| = M\left(2 + \frac{h_n - \sin h_n}{\sin h_n}\right)|t_1 - t_2|.$$

Воспользуемся неравенствами $||t-x|-h_n| \le \frac{h_n}{1-\cos h_n}|\cos h_n - \cos(t-x)|$ (верно при $h_n < 0.5\pi$) и $|\varphi(t)| \le \lambda(n)||t-x|-h_n|$. (Первое неравенство доказывается исследованием на экстремумы и монотонность, второе следует из того, что $\varphi(t) \in \mathrm{Lip}_{\lambda(n)} 1$ и $\varphi(x-h_n) = \varphi(x+h_n) = 0$.)

Из названных двух неравенств вытекает, что

$$-\lambda(n)\frac{h_n}{1-\cos h_n}(\cos h_n - \cos(t-x)) \le \varphi(t) \le \lambda(n)\frac{h_n}{1-\cos h_n}(\cos h_n - \cos(t-x))$$

при $t \in [x-\pi, x+\pi] \setminus [x-h_n, x+h_n]$,

$$-\lambda(n)\frac{h_n}{1-\cos h_n}(\cos(t-x) - \cos h_n) \le \varphi(t) \le \lambda(n)\frac{h_n}{1-\cos h_n}(\cos(t-x) - \cos h_n)$$

при $t \in [x-h_n, x+h_n]$. Эти неравенства соответствуют включениям (1). Воспользуемся промежуточным неравенством (2), фигурирующим в доказательстве теоремы 1, взяв в качестве функционала $\mu \in C^*_{2\pi}$ дельта-функцию точки x.

Разности $|\mu_n(p) - \mu(p)|$ из (2) соответствует $|L_n(f(t),x) - f(x)|$, выражению $\mu_n(p_n)$ соответствует $L_n(\cos(t-x) - \cos h_n, x)$, а разности $|\mu_n(g_n) - \mu(p)|$ — выражение

$$\left|L_n\left(\frac{f(x+h_n)-f(x-h_n)}{2\sin h_n}\sin(t-x) + \frac{f(x+h_n)+f(x-h_n)}{2} - f(x), x\right)\right|,$$

$$c_n = \frac{\lambda(n)h_n}{1-\cos h_n}.$$

Проведем преобразования:

$$c_n|L_n(\cos(t-x)-\cos h_n, x)| = \lambda(n)\frac{h_n}{1-\cos h_n}|1-\cos h_n + L_n(\cos(t-x),x) - 1|$$

$$\le \lambda(n)h_n + \lambda(n)\frac{h_n}{1-\cos h_n}|L_n(\cos(t-x),x)-1|.$$

Учитывая четность ядра (это значит, что $L_n(\sin(t-x),x) = 0$), получаем, что разности $|\mu_n(g_n) - \mu(p)|$ соответствует

$$\left|\frac{f(x+h_n)+f(x-h_n)}{2} - f(x)\right| = \left|\frac{f(x+h_n)-f(x)+f(x-h_n)-f(x)}{2}\right|$$

$$\le \left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{2}\right| + \left|\frac{f(x-h_n)-f(x)}{2}\right| \le Mh_n.$$

Таким образом, получим

$$|L_n(f(t),x) - f(x)| \le (\lambda(n)+M)h_n + \frac{\lambda(n)h_n}{1-\cos h_n}|L_n(1-\cos(t-x),x)|.$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $L_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ — линейные операторы, определенные выше, $L_n(1,x) = 1$, $f(t) \in \mathrm{Lip}_M 1$. Тогда*

$$\|L_n(f(t),x) - f(x)\| \le (\lambda(n)+M)h_n + \frac{\lambda(n)h_n}{\sin^2\frac{h_n}{2}}\left\|L_n\left(\sin^2\frac{t-x}{2}, x\right)\right\|, \qquad (3)$$

где $\lambda(n) = M\left(2 + \frac{h_n - \sin h_n}{\sin h_n}\right)$.

Заметим, что построенные В. А. Баскаковым [10] операторы класса S_2 обладают тем свойством, что $L_n\left(\sin^2\frac{t-x}{2}, x\right) = 0$. Следовательно, для них в правой части неравенства (3) второе слагаемое отсутствует. Так как для операторов Баскакова $h_n = \frac{2\pi}{n}$, то (3) для них выглядит следующим образом:

$$\|L_n(f(t),x) - f(x)\| \leq \frac{6\pi M}{n} + O(n^{-2}).$$

Внесем в рассмотренную ранее схему новые детали. Пусть X по-прежнему действительное линейное нормированное пространство, K_n, p_n и F имеют тот же смысл, что и в схеме, к которой относится теорема 1.

Будем полагать, что $p \in \psi = \psi(F, \{K_n\}, \{p_n\}) \subset X$, если по p найдутся последовательность положительных чисел c_n и последовательность элементов $g_n \in F$, последовательности элементов v_n, v'_n такие, что

$$c_n p_n + v_n - p + g_n \in K_n, \quad -c_n p_n + v'_n - p + g_n \in -K_n, \tag{4}$$

при этом $c_n\mu(p_n) \to 0$, $\mu(g_n - p) \to 0$, $\|v_n\| \to 0$, $\|v'_n\| \to 0$.

Теорема 3. *Если*

$$\mu_n \in K_n^*, \quad \gamma_n = \max_{1\leq i\leq k} |\mu_n(z_i) - \mu(z_i)| \to 0, \quad p_n \in F$$

и для $p \in \Psi$

$$\|\mu_n\| \max(\|v_n\|, \|v'_n\|) \to 0, \quad \lim_{n\to\infty} c_n\gamma_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|g_n\|\gamma_n = 0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \mu(p)$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, но добавляются новые детали, связанные с элементами v_n и v'_n. Так, из (4) получим

$$\begin{aligned} -c_n\mu_n(p_n) + \mu_n\big(v'_n\big) + \mu_n(g_n) - \mu(p) &\leq \mu_n(p) - \mu(p) \\ &\leq c_n\mu_n(p_n) + \mu_n(v_n) + \mu_n(g_n) - \mu(p). \end{aligned}$$

Отсюда $|\mu_n(p) - \mu(p)| \leq c_n\mu_n(p_n) + |\mu_n(g_n) - \mu(p)| + \max\big(|\mu_n(v_n)|, \big|\mu_n\big(v'_n\big)\big|\big)$. Первые два слагаемые правой части оценены при доказательстве теоремы 1. Далее, имеем $|\mu_n(v_n)| \leq \|\mu_n\|\,\|v_n\|$, $\big|\mu_n\big(v'_n\big)\big| \leq \|\mu_n\|\,\big\|v'_n\big\|$. Таким образом,

$$\max\big(|\mu_n(v_n)|, \big|\mu_n\big(v'_n\big)\big|\big) \leq \|\mu_n\| \max\big(\|v_n\|, \big\|v'_n\big\|\big) \to 0.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим вновь операторы $L_n(f(t),x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)u_n(t)\,dt$, но при более общих предположениях: $u_n(t)$ — непрерывное четное ядро, $u_n(0) > 0$, $u_n(t)$ имеет четное число простых нулей (обозначим это число через $2m$, тогда $L_n \in S_{2m}$), все эти нули находятся на отрезке $[-h_n, h_n]$, $-h_n$ и h_n являются простыми нулями $u_n(t)$, $h_n \downarrow 0$. Для произвольно зафиксированных $x \in R$ и целого положительного n определяем 2π-периодические функции $\Delta_n(t)$ и $\sigma_n(t)$. Для этого достаточно определить их на отрезке $[x-\pi, x+\pi]$. Положим

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [x-\pi, x+\pi] \setminus [x-h_n, x+h_n], \\ 1, & t \in [x-h_n, x+h_n], \end{cases}$$

$\sigma_n(t) = \operatorname{sign} u_n(t-x)$, если t не является нулем $u_n(t-x)$, $\sigma_n(t) = 1$, если t — простой нуль $u_n(t-x)$. Если же t — двойной нуль $u_n(t-x)$, то $\sigma_n(t)$ определим так, чтобы она была в этой точке непрерывна. Пусть D_n — множество функций,

2π-периодических, непрерывных везде, кроме точек, где $u_n(t-x)$ имеет простой нуль, и таких, что $f(t) \in D_n$, если $\operatorname{sign} f(t) = \sigma_n(t)$. Обозначим через K_n коническую оболочку D_n. Другие элементы схемы определим равенствами:

$$F = \operatorname{lin}\{1, \sin t, \cos t\}, \quad p_n(t) = (-1)^m (1 - \cos(t-x))$$

для $f(t) \in \operatorname{Lip}_M \alpha$, $\alpha \in]0,1]$, $g_n(t) = f(x)$, $c_n = M h_n^\alpha / (1 - \cos h_n)$,

$$v_n(t) = M|t-x|^\alpha \Delta_n(t)\sigma_n(t) - (-1)^m c_n (1 - \cos(t-x))\Delta_n(t), \quad v_n'(t) = -v_n(t).$$

При таком определении p_n, g_n, v_n, v_n' элементу $c_n p_n + v_n - p + g_n$ включения (4) соответствует функция

$$(-1)^m \frac{M h_n^\alpha}{1 - \cos h_n}(1 - \cos(t-x))(1 - \Delta_n(t)) + M|t-x|^\alpha \Delta_n(t)\sigma_n(t) - f(t) + f(x),$$

которая неотрицательна для тех значений аргумента t, где $\operatorname{sign} u_n(t-x) > 0$, и неположительна, где $\operatorname{sign} u_n(t-x) < 0$. Следовательно, первое из включений (4) имеет место. Аналогично проверяется выполнение второго включения из (4). Так как $\|v_n\| \le 2Mh_n^a$, получаем

$$|L_n(f(t),x) - f(x)| \le \frac{M h_n^\alpha}{1 - \cos h_n} |1 - L_n(\cos(t-x), x)| + 2Mh_n^\alpha \|L_n\|.$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть $L_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ — операторы, определенные выше, $L_n(1,x) = 1$, $f(t) \in \operatorname{Lip}_M \alpha$, $0 < \alpha \le 1$. Тогда*

$$|L_n(f(t),x) - f(x)| \le \frac{M h_n^\alpha}{1 - \cos h_n} |1 - L_n(\cos(t-x), x)| + 2Mh_n^\alpha \|L_n\|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лабскер Л. Г.* Тестовые множества в банаховом пространстве. М.: МИПКХМ, 1989.

2. *Коровкин П. П.* О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 6. С. 961–964.

3. *Виденский В. С.* Линейные положительные операторы конечного ранга. Л.: Ленингр. гос. пед. ин-т, 1985.

4. *Климов В. С., Красносельский М. А., Лифшиц Е. А.* Точки гладкости конуса и сходимость положительных функционалов и операторов // Тр. Моск. мат. о-ва. 1966. Т. 15. С. 55–69.

5. *Рубинов А. М.* Об одной теореме В. С. Климова, М. А. Красносельского и Е. А. Лифшица // Оптимизация. Новосибирск, 1971. Вып. 3. С. 154–158.

6. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1976.

7. *Абакумов Ю. Г., Банин В. Г.* Последовательности линейных функционалов, положительных на некоторых конусах, и аналоги теорем Коровкина / Читинск. гос. пед. ин-т. Чита, 1986. Деп. в ВИНИТИ 11.11.86, № 7695.

8. *Абакумов Ю. Г., Банин В. Г.* Об одном подходе к исследованию аппроксимативных свойств линейных операторов // Изв. вузов. Математика. 1991. № 11. С. 3–6.

9. *Коровкин П. П.* Сходящиеся последовательности линейных операторов // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, № 4. С. 147–152.

10. *Баскаков В. А.* Об одном методе построения операторов класса S_{2m} // Теория функций и приближений. Интерполяция по Лангранжу. Саратов, 1984. С. 19–25.

11. *Vassiliev R. K.* On an exact order of approximation of the differentiable functions by a sequence of operators of class S_{2m} // Suppl. ai Rend. del Circolo Matematico di Palermo. 1993. V. 2, N 33. P. 490–507. (Proc. second intern. conf. in functional analysis and approximation theory, Acquafredda di Maratea (POTENZA), 14–19 september, 1992.)

Статья поступила 3 марта 1998 г.,
окончательный вариант — 17 июля 1998 г.

г. Чита