Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 517.948

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. К. Дауылбаев

Аннотация: Рассмотрено сингулярно возмущенное нелинейное интегродифференциальное уравнение произвольного порядка с начальными условиями в правой точке рассматриваемого отрезка, причем в отсутствии интегральных членов решение экспоненциально стремится к бесконечности и, следовательно, конечного предела не имеет. Изложен алгоритм построения асимптотики решения эквивалентной задачи Коши с начальным скачком в левой точке отрезка. Доказана теорема о существовании, единственности и асимптотическом представлении решения вспомогательной задачи Коши с начальным скачком, с помощью которой доказана аналогичная основная теорема для первоначальной задачи Коши с начальными условиями в правой точке. Библиогр. 2.

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A(t, y, \dots, y^{(n-2)})y^{(n-1)} = F(t, y, \dots, y^{(n-2)}, J) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(1, \varepsilon) = y_0^0,\ y'(1, \varepsilon) = y_1^0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(1, \varepsilon) = y_{n-1}^0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, y_i^0, $i = \overline{0, n-1}$, — некоторые известные постоянные и

$$J \equiv \int_0^1 K(t, x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon), \dots, y^{(n-2)}(x, \varepsilon))y^{(n-1)}(x, \varepsilon)\, dx.$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

I. Функция $A(t, y, y', \dots, y^{(n-2)})$ в области $D_1 = (0 \le t \le 1, |y| < +\infty, \dots, |y^{(n-2)}| < +\infty)$, функция $F(t, y, y', \dots, y^{(n-2)}, J)$ в области $D_2 = (0 \le t \le 1, |y| < +\infty, \dots, |y^{(n-2)}| < +\infty, |J| < +\infty)$ и функция $K(t, x, y, \dots, y^{(n-2)})$ в области $D_3 = (0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1, |y| < +\infty, \dots, |y^{(n-2)}| < +\infty)$ имеют непрерывные частные производные до любого порядка по всем своим аргументам.

II. Функция $A(t, y, \dots, y^{(n-2)})$ в области D_1 удовлетворяет неравенству

$$A(t, y, y', \dots, y^{(n-2)}) \ge \gamma = \mathrm{const} > 0.$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A(t, y, \dots, y^{(n-2)})y^{(n-1)} = F(t, y, \dots, y^{(n-2)}, 0) \tag{3}$$

с начальными условиями (2). Пусть $\bar{y}(t)$ — решение вырожденного уравнения

$$A(t, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-2)})\bar{y}^{(n-1)} = F(t, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-2)}, 0) \tag{4}$$

с начальными условиями

$$\bar{y}(1) = y_0^0,\ \bar{y}'(1) = y_1^0,\ \ldots,\ \bar{y}^{(n-2)}(1) = y_{n-2}^0. \tag{5}$$

Известно [1, 2], что решение $y(t,\varepsilon)$ дифференциальной задачи (3), (2) в случае выполнения условия устойчивости II не будет стремиться при $\varepsilon \to 0$ к решению $\bar{y}(t)$ вырожденной задачи (4), (5), а стремится к бесконечности в полуинтервале $0 \le t < 1$ и, следовательно, не имеет предела. В противоположность этому решение $y(t,\varepsilon)$ интегродифференциальной задачи (1), (2), как доказывается в настоящей работе, имеет предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(i)}(t,\varepsilon) = \begin{cases} \bar{y}^{(i)}(t), & i = \overline{0, n-3},\ 0 \le t \le 1,\\ \bar{y}^{(i)}(t), & i = n-2, n-1,\ 0 < t \le 1. \end{cases}$$

Однако $\bar{y}(t)$ не является решением обычного вырожденного уравнения, получаемого из уравнения (1) при $\varepsilon = 0$, а удовлетворяет измененному вырожденному уравнению

$$L_0\bar{y} = F(t, \bar{y}, \ldots, \bar{y}^{(n-2)}, \Delta(t) + \int\limits_0^1 K(t, x, \bar{y}(x), \ldots, \bar{y}^{(n-2)}(x))\bar{y}^{(n-1)}(x)\,dx) \tag{6}$$

и начальным условиям (5), где $\Delta(t)$ — так называемый начальный скачок интегрального члена.

Для исследования решения задачи (1), (2) предварительно рассмотрим задачу Коши с начальным скачком

$$y(0,\varepsilon) = a^0(\varepsilon),\ \ldots,\ y^{(n-2)}(0,\varepsilon) = a^{n-2}(\varepsilon),\ y^{(n-1)}(0,\varepsilon) = \frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon}, \tag{7}$$

где $a^i(\varepsilon)$, $c(\varepsilon)$ — регулярно зависящие от ε неизвестные постоянные, имеющие следующие асимптотические представления:

$$a^i(\varepsilon) = a_0^i + \varepsilon a_1^i + \ldots,\ i = \overline{0, n-2}, \quad c(\varepsilon) = c_0 + \varepsilon c_1 + \ldots,\ c_0 \ne 0,$$

а a_k^i, c_k, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — пока неизвестные коэффициенты, которые подберем так, чтобы решение $y(t, a^0, \ldots, a^{n-2}, c, \varepsilon)$ задачи (1), (7) удовлетворяло условиям (2).

Рассмотрим вырожденное уравнение (6) с начальными условиями

$$\bar{y}(0) = a_0^0,\ \ldots,\ \bar{y}^{(n-3)}(0) = a_0^{n-3}, \quad \bar{y}^{(n-2)}(0) = a_0^{n-2} + \Delta a_0^{n-2}, \tag{8}$$

где Δa_0^{n-2} — начальный скачок $(n-2)$-й производной решения, который вместе с $\Delta(t)$ с учетом условия II однозначно определяется из формул

$$\begin{gathered} c_0 = \int\limits_{a_0^{n-2}}^{a_0^{n-2}+\Delta a_0^{n-2}} A\big(0, a_0^0, \ldots, a_0^{n-3}, y\big)\,dy, \quad a_0^{n-2} + \Delta a_0^{n-2} \equiv \bar{y}^{(n-2)}(0), \\ \Delta(t) = \int\limits_{a_0^{n-2}}^{a_0^{n-2}+\Delta a_0^{n-2}} K\big(t, 0, a_0^0, \ldots, a_0^{n-3}, y\big)\,dy. \end{gathered} \tag{9}$$

Задача Коши (6), (8) называется *вырожденной задачей для задачи Коши с начальным скачком* (1), (7).

III. Пусть вырожденная задача (6), (8) на отрезке $0 \le t \le 1$ имеет единственное решение $\bar{y}(t)$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{dv}{d\tau} = -\int\limits_{\bar{v}}^{\bar{v}+v} A\big(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y\big)\,dy, \quad v(0) = a_0^{n-2} - \bar{v}, \quad \tau \ge 0, \tag{10}$$

где $\bar{v} \equiv \bar{y}^{(n-2)}(0) = a_0^{n-2} + \Delta a_0^{n-2}$. Дифференциальное уравнение (10) в соответствии с терминологией А. Н. Тихонова называется *присоединенным уравнением.*

IV. Пусть начальное значение $a_0^{n-2} - \bar{v}$ принадлежит области влияния точки покоя $v = 0$ присоединенного уравнения (10).

Асимптотику решения задачи (1), (7) будем искать в виде

$$y(t,\varepsilon) = y_\varepsilon(t) + \varepsilon^{n-2} W_\varepsilon(\tau), \tag{11}$$

где $\tau = t/\varepsilon$ — погранслойная независимая переменная, $y_\varepsilon(t)$ — регулярная часть и $W_\varepsilon(\tau)$ — погранслойная часть суммы (11), которые представляются в виде разложений

$$y_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t), \quad W_\varepsilon(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k W_k(\tau). \tag{12}$$

Предварительно умножая обе части уравнения (1) на ε и подставляя сумму (11) в (1), получим уравнения для определения $y_\varepsilon(t)$ и $W_\varepsilon(\tau)$:

$$\begin{gathered}
\varepsilon y_\varepsilon^{(n)} + A\big(t, y_\varepsilon, \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}\big) y_\varepsilon^{(n-1)} = F\big(t, y_\varepsilon, \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}, J_\varepsilon(t)\big), \\
\overset{(n)}{W}_\varepsilon + \big[A\big(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau) + \varepsilon^{n-2} W_\varepsilon(\tau), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon\tau) + \overset{(n-2)}{W}_\varepsilon(\tau)\big)\big(\varepsilon y_\varepsilon^{(n-1)}(\varepsilon\tau) \\
+ \overset{(n-1)}{W}_\varepsilon(\tau)\big) - A\big(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon\tau)\big)\varepsilon y_\varepsilon^{(n-1)}(\varepsilon\tau)\big] \\
= \varepsilon\big[F\big(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau) + \varepsilon^{n-2} W_\varepsilon(\tau), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon\tau) + \overset{(n-2)}{W}_\varepsilon(\tau), J_\varepsilon(\varepsilon\tau)\big) \\
- F\big(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau), y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon\tau), J_\varepsilon(\varepsilon\tau)\big)\big],
\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(t) = \int\limits_0^1 Kl(t, x, y_\varepsilon(x), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(x) r) y_\varepsilon^{(n-1)}(x)\,dx + \int\limits_0^\infty \big[K\big(t, \varepsilon s, y_\varepsilon(\varepsilon s) \\
+ \varepsilon^{n-2} W_\varepsilon(s), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon s) + \overset{(n-2)}{W}_\varepsilon(s)\big)\big(\varepsilon y_\varepsilon^{(n-1)}(\varepsilon s) + \overset{(n-1)}{W}_\varepsilon(s)\big) \\
- K\big(t, \varepsilon s, y_\varepsilon(\varepsilon s), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon s)\big)\varepsilon y_\varepsilon^{(n-1)}(\varepsilon s)\big]\,ds.
\end{aligned}$$

Представим $y_\varepsilon^{(i)}(\varepsilon\tau)$, $i = \overline{0, n-1}$, с учетом (12) в виде ряда по степеням ε:

$$y_\varepsilon^{(i)}(\varepsilon\tau) = \overset{(i)}{\omega}_i(\tau) + \varepsilon \overset{(i)}{\omega}_{i+1}(\tau) + \dots, \quad i = \overline{0, n-1},$$

где

$$\omega_i(\tau) = y_i(0) + \tau y'_{i-1}(0) + \dots + \frac{\tau^i}{i!} y_0^{(i)}(0).$$

Подставляя разложение (12) в уравнения (13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим последовательность уравнений для определения $y_k(t)$, $k \ge 0$.

Для $y_0(t)$ имеем нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$A\big(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t)\big)y_0^{(n-1)}(t) = F\big(t, , y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t), J_0(t)\big), \qquad (14)$$

а для $y_k(t)$, $k \geq 1$, получим линейное интегродифференциальное уравнение вида

$$A\big(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t)\big)y_k^{(n-1)}(t) + \sum_{i=0}^{n-2}\big[A'_{y^{(i)}}\big(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t)\big)y_0^{(n-1)}$$
$$- F'_{y^{(i)}}\big(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t), J_0(t)\big)\big]y_k^{(i)}(t) = F'_J\big(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t), J_0(t)\big)$$
$$\times \int_0^1 \big[K\big(t, x, y_0(x), \dots, y_0^{(n-2)}(x)\big)y_k^{(n-1)}(x)$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-2} K'_{y^{(i)}}\big(t, x, y_0(x), \dots, y_0^{(n-2)}(x)\big)y_0^{(n-1)}(x)y_k^{(i)}(x)\big]\,dx + H_k(t), \qquad (15)$$

где

$$J_0(t) = \int_0^1 K\big(t, x, y_0(x), \dots, y_0^{(n-2)}(x)\big)y_0^{(n-1)}(x)\,dx$$
$$+ \int_0^\infty K\big(t, 0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) + \overset{(n-2)}{W}_0(s)\big)\overset{(n-1)}{W}_0(s)\,ds, \qquad (16)$$

а $H_k(t)$ — известная функция, зависящая от $y_i(t)$, $W_i(\tau)$, $i < k$.

Для определения $W_0(\tau)$ получим квазилинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\overset{(n)}{W}_0(\tau) + A\big(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) + \overset{(n-2)}{W}_0(\tau)\big)\overset{(n-1)}{W}_0(\tau) = 0, \qquad (17)$$

а для $W_k(\tau)$, $k \geq 1$, — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\overset{(n)}{W}_k(\tau) + \frac{d}{d\tau}\big[A\big(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) + \overset{(n-2)}{W}_0(\tau)\big)\big(\overset{(n-2)}{\omega}_{k+n-2}(\tau)$$
$$+ \overset{(n-2)}{W}_k(\tau)\big) - A\big(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-2)}(0)\big)\overset{(n-2)}{\omega}_{k+n-2}(\tau)\big] = S_k(\tau), \qquad (18)$$

где $S_k(\tau)$ — известная функция, зависящая от $W_i(\tau)$, $i < k$.

Для пограничных функций $W_k(\tau)$, $k \geq 0$, справедливо неравенство

$$|\overset{(i)}{W}_k(\tau)| \leq K\exp(-\gamma\tau), \quad \tau \geq 0,\ i = \overline{0, n-1}, \qquad (19)$$

где $K > 0$, $\gamma > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от t и ε.

Для однозначного определения коэффициентов разложения (12) надо задать начальные условия. С этой целью подставим (11) с учетом (12) в начальные условия (7) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Имеем

$$y_0^{(i)}(0) = \begin{cases} a_0^i, & i = \overline{0, n-3}, \\ a_0^{n-2} - \overset{(n-2)}{W}_0(0), & i = n-2, \end{cases} \qquad \overset{(n-1)}{W}_0(0) = c_0,$$
$$y_k^{(i)}(0) = \begin{cases} a_k^i, & k+i < n-2, \\ a_k^i - \overset{(i)}{W}_{k+i-n+2}(0), & k+i \geq n-2, \end{cases} \qquad y_{k-1}^{(n-1)}(0) = c_k - \overset{(n-1)}{W}_k(0). \qquad (20)$$

Недостающие начальные условия для однозначного определения $y_0(t)$, $W_0(\tau)$ получим из условия стремления к нулю пограничных функций при $\tau \to +\infty$. Интегрируя уравнение (17) от 0 до ∞ и учитывая, что $\overset{(n-2)}{W}_0(\infty) = \overset{(n-1)}{W}_0(\infty) = 0$, имеем

$$c_0 = \int\limits_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)} A\bigl(0, y_0(0) \ldots, y_0^{(n-3)}(0), y\bigr)\, dy. \tag{21}$$

Из формулы (21) в силу условия II однозначно определяется начальное условие $y_0^{(n-2)}(0)$. Для $y_0^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, n-3}$, из (20) вытекает, что

$$y_0^{(i)}(0) = a_0^i, \quad i = \overline{0, n-3}. \tag{22}$$

Интегрируя уравнение (17) от 0 до τ, заменяя c_0 выражением (21) и вводя обозначение

$$\overset{(n-2)}{W}_0(\tau) = v_0(\tau), \tag{23}$$

приходим к следующей задаче:

$$\dot{v}_0 = \Phi(v_0), \quad v_0(0) = a_0^{n-2} - \bar{v}, \tag{24}$$

где

$$\Phi(v_0) \equiv -\int\limits_{\bar{v}}^{\bar{v}+v_0(\tau)} A\bigl(0, y_0(0) \ldots, y_0^{(n-3)}(0), y\bigr)\, dy, \quad \bar{v} \equiv y_0^{(n-2)}(0). \tag{25}$$

Из (25) вытекает, что $\Phi(0) = 0$. Следовательно, $v_0 = 0$ является точкой покоя уравнения (24). А так как в силу условия II

$$\Phi'(0) = -A\bigl(0, y_0(0) \ldots, y_0^{(n-2)}(0)\bigr) < 0,$$

точка покоя $v_0 = 0$ нелинейного уравнения (24) будет асимптотически устойчивой по Ляпунову. Поскольку согласно условию IV значение $a_0^{n-2} - \bar{v}$ принадлежит области влияния точки покоя $v = 0$ уравнения (10), решение $v_0(\tau)$ задачи (24) при $\tau \to +\infty$ стремится к нулю, т. е. $v_0(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$. Путем последовательного интегрирования равенства (23) с учетом (19) получим

$$\overset{(i)}{W}_0(0) = (-1)^{n-i} \int\limits_0^{\infty} \frac{s^{n-3-i}}{(n-3-i)!} v_0(s)\, ds, \quad i = \overline{0, n-3}, \tag{26}$$

Из (20) следует, что

$$\overset{(n-2)}{W}_0(0) = a_0^{n-2} - y_0^{(n-2)}(0), \quad \overset{(n-1)}{W}_0(0) = c_0. \tag{27}$$

Таким образом, решение $y_0(t)$ уравнения (14) определяется начальными условиями (21), (22), а решение $W_0(\tau)$ уравнения (17) — начальными условиями (26), (27) и тем самым нулевые приближения полностью определены.

Сравнивая (6) и (14), (16), получаем

$$\Delta(t) = \int\limits_0^{\infty} K\bigl(t, 0, y_0(0), \ldots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) + \overset{(n-2)}{W}_0(s)\bigr) \overset{(n-1)}{W}_0(s)\, ds.$$

Отсюда и из (21) с учетом (19), (22), (27) приходим к формулам начального скачка (9).

Для определения последующих приближений обратимся к уравнению (18) и проинтегрируем его от 0 до ∞. С учетом (19) имеем

$$\overset{(n-1)}{W}{}_k(0) + \big[A\big(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), a_0^{n-2}\big)\big(\overset{(n-2)}{W}{}_k(0) + \overset{(n-2)}{\omega}{}_{k+n-2}(0)\big) - A\big(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-2)}(0)\big)\overset{(n-2)}{\omega}{}_{k+n-2}(0)\big] = -\int\limits_0^\infty S_k(\tau)\,d\tau. \quad (28)$$

Если принять во внимание, что $\overset{(n-2)}{\omega}{}_{k+n-2}(0) = y_k^{(n-2)}(0)$, из (28) с учетом (20) находим начальное условие для $y_k^{(n-2)}(0)$:

$$y_k^{(n-2)}(0) = \frac{c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0) + A\big(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-2}\big)a_k^{n-2} + \int\limits_0^\infty S_k(\tau)\,d\tau}{A\big(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0)\big)}, \quad (29)$$

а начальное условие для $y_k^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, n-3}$, получается из (20):

$$y_k^{(i)}(0) = a_k^i, \quad i = \overline{0, n-3}. \quad (30)$$

Введем обозначение

$$\overset{(n-2)}{W}{}_k(\tau) = v_k(\tau). \quad (31)$$

Интегрируя уравнение (18) от 0 до τ и принимая во внимание (20), (28), имеем следующее линейное уравнение относительно $v_k(\tau)$:

$$\dot{v}_k(\tau) + A\big(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) + \overset{(n-2)}{W}{}_0(\tau)\big)v_k(\tau) = \Psi_k(\tau) \quad (32)$$

с начальным условием

$$v_k(0) = a_k^{n-2} - y_k^{(n-2)}(0), \quad (33)$$

где

$$\Psi_k(\tau) = \big[A\big(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-2)}(0)\big) - A\big(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) + \overset{(n-2)}{W}{}_0(\tau)\big)\big]\overset{(n-2)}{\omega}{}_{k+n-2}(\tau) - \int\limits_\tau^\infty S_k(\tau)\,d\tau. \quad (34)$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям, проведенным при получении (26), из (31) получим

$$\overset{(i)}{W}{}_k(0) = (-1)^{n-i}\int\limits_0^\infty \frac{s^{n-3-i}}{(n-3-i)!}v_k(s)\,ds, \quad i = \overline{0, n-3}, \quad (35)$$

где $v_k(\tau)$ — решение задачи (32), (33). Из (20) имеем

$$\overset{(n-2)}{W}{}_k(0) = a_k^{n-2} - y_k^{(n-2)}(0), \quad \overset{(n-1)}{W}{}_k(0) = c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0). \quad (36)$$

Таким образом, решение $y_k(t)$ уравнения (15) определяется начальными условиями (29), (30), а решение $W_k(\tau)$ уравнения (18) — начальными условиями (35), (36), и тем самым k-е приближения полностью определены.

Образуем N-ю частичную сумму разложений (11), (12):

$$\bar{y}_N(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k(t)+\varepsilon^{n-2}\sum_{k=0}^{N+1}\varepsilon^k W_k(\tau),\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon}, \tag{37}$$

где коэффициенты $y_0(t)$ и $y_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, однозначно определяются из (14), (21), (22) и (15), (29), (30) соответственно и вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка ограничены на отрезке $[0,1]$.

В случае $N\geq n-2$ коэффициенты $W_k(\tau)$, $k=\overline{0,N-n+2}$, однозначно определяются из уравнений (17), (18) с начальными условиями (26), (27), (35), (36) и вместе с производными $(n-1)$-го порядка являются функциями типа пограничного слоя при $\tau\geq 0$, а коэффициенты $W_k(\tau)$, $k=\overline{N-n+3,N+1}$, однозначно определяются из того же уравнения (18) с начальными условиями

$$\overset{(j)}{W}_k(0)=\begin{cases}0, & j=\overline{0,k-(N-n+3)},\\ (-1)^{n-j}\int\limits_0^\infty \frac{s^{n-3-j}}{(n-3-j)!}v_k(s)\,ds, & j=\overline{k-(N-n+2),n-3},\\ a_k^{n-2}-y_k^{(n-2)}(0), & j=n-2\\ c_k-y_{k-1}^{(n-1)}(0), & j=n-1,\end{cases} \tag{38}$$

и эти функции для $j=\overline{0,k-(N-n+3)}$ ограничены при $\tau\geq 0$, а для $j=\overline{k-(N-n+2),n-1}$ при $\tau\geq 0$ являются функциями типа пограничного слоя.

В случае $N<n-2$ коэффициенты $W_k(\tau)$, $k=\overline{0,N+1}$, определяются из уравнений (17), (18) с начальными условиями (38) и функции $\overset{(j)}{W}_i(\tau)$ для $j=\overline{0,k-(N-n+3)}$ ограничены при $\tau\geq 0$, а для $j=\overline{k-(N-n+2),n-1}$ являются функциями типа пограничного слоя при $\tau\geq 0$.

Можно убедиться, что функция $\bar{y}_N(t,\varepsilon)$, выражаемая формулой (37), на отрезке $0\leq t\leq 1$ является приближенным решением задачи (1), (7) с точностью порядка $O(\varepsilon^{N+1})$.

Теорема 1. *Пусть функции $A(t,y,\ldots,y^{(n-2)})$, $F(t,y,\ldots,y^{(n-2)},J)$, $K(t,x,y,\ldots,y^{(n-2)})$ соответственно в областях D_1, D_2, D_3 имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам до $(N+2)$-го порядка включительно и выполнены условия* II–IV. *Тогда при достаточно малых ε решение задачи Коши с начальным скачком* (1), (7) *на отрезке $[0,1]$ существует, единственно и представимо в виде следующего асимптотического разложения:*

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k(t)+\varepsilon^{n-2}\sum_{k=0}^{N+1}\varepsilon^k W_k(\tau)+R_N(t,\varepsilon),\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon}, \tag{39}$$

а остаточный член $R_N(t,\varepsilon)$ имеет оценки

$$\left|R_N^{(i)}(t,\varepsilon)\right|\leq K\varepsilon^{N+1},\quad 0\leq t\leq 1,\ i=\overline{0,n-1}, \tag{40}$$

где $N\geq 0$ — любое целое число, $K>0$ — некоторая постоянная, не зависящая от t и ε.

Доказательство теоремы 1 проводится методом интегральных уравнений.

Теперь определим неизвестные коэффициенты a_k^i, c_k, $i=\overline{0,n-2}$, $k\leq 0$, входящие в начальные условия (7). Решение задачи Коши с начальным скачком (1), (7) обозначим через $y(t,a^0,\ldots,a^{n-2},c,\varepsilon)$. Постоянные $a^0,\ldots,a^{n-2},c$

подберем так, чтобы это решение $y(t,a^0,\dots,a^{n-2},c,\varepsilon)$ удовлетворяло при $t=1$ условиям (2):

$$y^{(i)}(1,a^0,\dots,a^{n-2},c,\varepsilon)=y_i^0,\quad i=\overline{0,n-1}. \tag{41}$$

Подставим сумму (11) с учетом разложений (12) в (41). При этом вместо точного решения подставим его асимптотическое разложение, в котором будем указывать на зависимость y_k не только от t, но и от $a_k^0,\dots,a_k^{n-2},c_k$. В силу оценки (19) и (41) имеем

$$y_0^{(i)}\big(1,a_0^0,\dots,a_0^{n-2},c_0\big)+\varepsilon y_1^{(i)}\big(1,a_1^0,\dots,a_1^{n-2},c_1\big)+\dots=y_i^0. \tag{42}$$

Из (42), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие системы алгебраических уравнений:

$$y_0^{(i)}\big(1,a_0^0,\dots,a_0^{n-2},c_0\big)=y_i^0,\quad i=\overline{0,n-1}, \tag{43}$$

$$y_k^{(i)}\big(1,a_k^0,\dots,a_k^{n-2},c_k\big)=0,\quad i=\overline{0,n-1},\ k\ge 1. \tag{44}$$

Обратимся теперь к уравнению (15) и представим его в виде

$$y_k^{(n-1)}(t)+\sum_{i=0}^{n-2}a_i(t)y_k^{(i)}(t)=\int\limits_0^1\sum_{i=0}^{n-1}b_i(t,x)y_k^{(i)}(x)\,dx+d_k(t), \tag{45}$$

где

$$a_i(t)=\frac{A'_{y^{(i)}}\big(t,y_0,\dots,y_0^{(n-2)}\big)y_0^{(n-1)}-F'_{y^{(i)}}\big(t,y_0,\dots,y_0^{(n-2)},J_0\big)}{A\big(t,y_0,\dots,y_0^{(n-2)}\big)},$$

$$b_{n-1}(t,x)=\frac{F'_J\big(t,y_0,\dots,y_0^{(n-2)},J_0\big)K\big(t,x,y_0(x),\dots,y_0^{(n-2)}(x)\big)}{A\big(t,y_0,\dots,y_0^{(n-2)}\big)}, \tag{46}$$

$$b_j(t,x)=\frac{F'_J\big(t,y_0,\dots,y_0^{(n-2)},J_0\big)K'_{y^{(j)}}\big(t,x,y_0(x),\dots,y_0^{(n-2)}(x)\big)y_0^{(n-1)}(x)}{A\big(t,y_0,\dots,y_0^{(n-2)}\big)},$$

$$j=\overline{0,n-2},$$

$$d_k(t)=\frac{H_k(t)}{A\big(t,y_0,\dots,y_0^{(n-2)}\big)}.$$

Пусть функции $\Phi_i(t,s)$, $0\le s\le t\le 1$, $i=\overline{0,n-2}$, являются решениями однородной дифференциальной задачи

$$\Phi_{it}^{(n-1)}(t,s)+\sum_{j=0}^{n-2}a_j(t)\Phi_{it}^{(j)}(t,s)=0, \tag{47}$$

$$\Phi_{it}^{(j)}(s,s)=\begin{cases}1, & i=j,\ i=\overline{0,n-2},\\ 0, & i\ne j,\ j=\overline{0,n-2}.\end{cases}$$

Тогда, обозначая правую часть (45) через $z_k(t)$, получаем решение задачи (15), (29), (30) в виде

$$y_k(t)=\sum_{i=0}^{n-2}y_k^{(i)}(0)\Phi_i(t,0)+\int\limits_0^t\Phi_{n-2}(t,s)z_k(s)\,ds. \tag{48}$$

Относительно $z_k(t)$ получается интегральное уравнение Фредгольма

$$z_k(t) = h_k(t) + \int\limits_0^1 J(t,s) z_k(s)\, ds, \tag{49}$$

где

$$\begin{aligned} h_k(t) &= d_k(t) + \sum_{i=0}^{n-2} y_k^{(i)}(0) \sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_0^1 b_j(t,x) \Phi_i^{(j)}(x,0)\, dx, \\ J(t,s) &= b_{n-1}(t,s) + \sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_s^1 b_j(t,x) \Phi_{n-2}^{(j)}(x,s)\, dx. \end{aligned} \tag{50}$$

V. Пусть число 1 не является собственным значением ядра $J(t,s)$. Тогда интегральное уравнение (49) имеет единственное решение и это решение с помощью резольвенты $R(t,s)$ ядра $J(t,s)$ можно записать в виде

$$z_k(t) = h_k(t) + \int\limits_0^1 R(t,s) h_k(s)\, ds. \tag{51}$$

Подставляя (51) с учетом (50) в (48) и выделяя члены, зависящие от a_k^i, c_k, $i = \overline{0, n-2}$, получаем решение задачи (15), (29), (30):

$$\begin{aligned} y_k(t) = \sum_{i=0}^{n-3} a_k^i \Bigg[&\Phi_i(t,0) + \int\limits_0^t \Phi_{n-2}(t,s) D_i(s)\, ds \\ &- \frac{\Phi_{n-2}(t,0) + \int\limits_0^t \Phi_{n-2}(t,s) D_{n-2}(s)\, ds}{A\big(0, a_0^0, \ldots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0)\big)} \cdot \int\limits_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)} A'_{y^{(i)}}\big(0, a_0^0, \ldots, a_0^{n-3}, y\big)\, dy \\ &+ \int\limits_0^t \Phi_{n-2}(t,s)(T_i(s) + \int\limits_0^1 R(s,x) T_i(x)\, dx)\, ds \Bigg] \\ + a_k^{n-2} \Bigg[&(\Phi_{n-2}(t,0) + \int\limits_0^t \Phi_{n-2}(t,s) D_{n-2}(s)\, ds) \cdot \frac{A\big(0, a_0^0, \ldots, a_0^{n-2}\big)}{A\big(0, a_0^0, \ldots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0)\big)} \\ &+ \int\limits_0^t \Phi_{n-2}(t,s)(T_{n-2}(s) + \int\limits_0^1 R(s,x) T_{n-2}(x)\, dx)\, ds \Bigg] \\ + c_k \Bigg[&\int\limits_0^t \Phi_{n-2}(t,s)(T_{n-1}(s) + \int\limits_0^1 R(s,x) T_{n-1}(x)\, dx)\, ds \\ &+ \frac{\Phi_{n-2}(t,0) + \int\limits_0^t \Phi_{n-2}(t,s) D_{n-2}(s)\, ds)}{A\big(0, a_0^0, \ldots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0)\big)} \Bigg] + m_k(t), \end{aligned} \tag{52}$$

где $\Phi_i(t,s)$ — решение задачи (47), $m_k(t)$ — известная функция, не зависящая от a_k^i, c_k, $i=\overline{0,n-2}$, а функции $D_i(t)$, $T_i(t)$ выражаются формулами

$$D_i(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1\left(b_j(t,x)+\int_0^1 R(t,s)b_j(s,x)\,ds\right)\Phi_i^{(j)}(x,0)\,dx,\quad i=\overline{0,n-2},$$

$$T_i(t)=\frac{F'_J\big(t,y_0(t),\ldots,y_0^{(n-2)}(t),J_0(t)\big)}{A\big(t,y_0(t),\ldots,y_0^{(n-2)}(t)\big)}\left[\int_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)}\frac{\partial K\big(t,0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y\big)}{\partial a_0^i}\,dy\right.$$

$$\left.-\frac{K\big(t,0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0)\big)}{A\big(0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0)\big)}\int_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)}\frac{\partial A\big(0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y\big)}{\partial a_0^i}\,dy\right],\ i=\overline{0,n-3}, \tag{53}$$

$$T_{n-2}(t)=\frac{F'_J\big(t,y_0(t),\ldots,y_0^{(n-2)}(t),J_0(t)\big)}{A\big(t,y_0(t),\ldots,y_0^{(n-2)}(t)\big)}\left[K\big(t,0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0)\big)\right.$$

$$\left.\times\frac{A\big(0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-2}\big)}{A\big(0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0)\big)}-K\big(t,0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-2}\big)\right],$$

$$T_{n-1}(t)=\frac{F'_J\big(t,y_0(t),\ldots,y_0^{(n-2)}(t),J_0(t)\big)}{A\big(t,y_0(t),\ldots,y_0^{(n-2)}(t)\big)}\cdot\frac{K\big(t,0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0)\big)}{A\big(0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0)\big)}$$

Из (52) видно, что система (44) относительно a_k^i, c_k, $i=\overline{0,n-2}$, является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений.

Обратимся теперь к задаче (14), (21), (22), продифференцируем ее по параметрам a_0^i, c_0, $i=\overline{0,n-2}$, и введем обозначение

$$u_i(t)=\begin{cases}\frac{\partial y_0(t)}{\partial a_0^i}, & i=\overline{0,n-2},\\ \frac{\partial y_0(t)}{\partial c_0}, & i=n-1.\end{cases} \tag{54}$$

Тогда для $u_i(t)$ получаем линейное интегродифференциальное уравнение, аналогичное уравнению (45):

$$u_i^{(n-1)}(t)+\sum_{j=0}^{n-2}a_j(t)u_i^{(j)}(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1 b_j(t,x)u_i^{(j)}(x)\,dx+T_i(t) \tag{55}$$

с начальными условиями

$$u_i^{(j)}(0)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad j=\overline{0,n-3}, \tag{56}$$

$$u_i^{(n-2)}(0)=\begin{cases}-\frac{1}{A(0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0))}\int_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)}\frac{\partial A(0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y)}{\partial a_0^i}\,dy, & i=\overline{0,n-3},\\ \frac{A(0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-2})}{A(0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0))}, & i=n-2,\\ \frac{1}{A(0,a_0^0,\ldots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0))}, & i=n-1,\end{cases}$$

где функции $a_j(t)$, $b_j(t,x)$, $T_i(t)$ выражаются формулами (46), (53).

Решая задачу (55), (56) так же, как задачу (15), (29), (30), получаем

$$u_i(t) = \Phi_i(t,0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t,s) D_i(s)\,ds$$

$$- \frac{\Phi_{n-2}(t,0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t,s) D_{n-2}(s)\,ds}{A\big(0,a_0^0,\dots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0)\big)} \cdot \int_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)} \frac{\partial A\big(0,a_0^0,\dots,a_0^{n-3},y\big)}{\partial a_0^i}\,dy$$

$$+ \int_0^t \Phi_{n-2}(t,s)\left[T_i(s) + \int_0^1 R(s,x) T_i(x)\,dx\right] ds, \quad i=\overline{0,n-3}, \tag{57}$$

$$u_{n-2}(t) = \left[\Phi_{n-2}(t,0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t,s) D_{n-2}(s)\,ds\right] \frac{A\big(0,a_0^0,\dots,a_0^{n-2}\big)}{A\big(0,a_0^0,\dots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0)\big)}$$

$$+ \int_0^t \Phi_{n-2}(t,s)\left[T_{n-2}(s) + \int_0^1 R(s,x) T_{n-2}(x)\,dx\right] ds,$$

$$u_{n-1}(t) = \frac{\Phi_{n-2}(t,0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t,s) D_{n-2}(s)\,ds}{A\big(0,a_0^0,\dots,a_0^{n-3},y_0^{(n-2)}(0)\big)}$$

$$+ \int_0^t \Phi_{n-2}(t,s)\left[T_{n-1}(s) + \int_0^1 R(s,x) T_{n-1}(x)\,dx\right] ds,$$

где $\Phi_i(t,s)$, $i=\overline{0,n-2}$, — решение задачи (47), а функции $D_j(t)$, $j=\overline{0,n-2}$, $T_i(t)$, $i=\overline{0,n-1}$, выражаются формулой (53).

Предположим, что выполнено следующее условие.

VI. Система алгебраических уравнений (43) имеет единственное решение $\bar a_0^0,\dots,\bar a_0^{n-2}$, $\bar c_0$, и выполнено неравенство

$$\Delta_0 \equiv \left.\begin{vmatrix} u_0(1) & u_1(1) & \dots & u_{n-1}(1) \\ u_0'(1) & u_1'(1) & \dots & u_{n-1}'(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0^{(n-1)}(1) & u_1^{(n-1)}(1) & \dots & u_{n-1}^{(n-1)}(1) \end{vmatrix}\right|_{a_i^0=\bar a_i^0,\, i=\overline{0,n-2},\, c_0=\bar c_0} \neq 0,$$

где функции $u_i(t) \equiv u_i\big(t,a_0^0,\dots,a_0^{n-2},c_0\big)$, $i=\overline{0,n-1}$, выражаются формулой (57). Тогда, как видно из (52), главный определитель неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (44) совпадает с Δ_0, который согласно условию VI отличен от нуля. Следовательно, система линейных алгебраических уравнений (44) имеет единственное решение $\bar a_k^0,\dots,\bar a_k^{n-2}$, $\bar c_k$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и условия* V, VI. *Тогда при достаточно малых ε в некоторой достаточно малой окрестности значений $\bar a_0^0,\dots,\bar a_0^{n-2}$, $\bar c_0$ существуют единственные значения $a^0=a^0(\varepsilon),\dots,a^{n-2}=a^{n-2}(\varepsilon)$, $c=c(\varepsilon)$, представимые в виде*

$$a^0 = \bar a_0^0 + O(\varepsilon),\dots,a^{n-2} = \bar a_0^{n-2} + O(\varepsilon), \quad c = \bar c_0 + O(\varepsilon),$$

такие, что решение $y(t,a^0,\dots,a^{n-2},c,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (7) *на отрезке* $0\le t\le 1$ *является единственным решением* $y(t,\varepsilon)$ *сингулярно возмущенной задачи* (1), (2) *и это решение допускает следующее асимптотическое представление:*

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k\big(t,\bar a_k^0,\dots,\bar a_k^{n-2},\bar c_k\big)+\varepsilon^{n-2}\sum_{k=0}^{N+1}\varepsilon^k W_k(\tau)+R_N(t,\varepsilon),\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon},$$

а остаточный член $R_N(t,\varepsilon)$ *имеет оценки*

$$\big|R_N^{(i)}(t,\varepsilon)\big|\le K\varepsilon^{N+1},\quad i=\overline{0,n-1},\ 0\le t\le 1,$$

где $K>0$ *— некоторая постоянная, не зависящая от* t, ε.

Замечание. Теорема 2 утверждает существование и единственность в некотором локальном смысле решения системы (43). Под единственностью в локальном смысле понимается следующее. Система (43) относительно $a_0^0,\dots,a_0^{n-2}$, c_0 может иметь не единственное решение в силу нелинейности задачи. В этом случае утверждение теоремы 2 верно для всякого решения $a_0^0,\dots,a_0^{n-2}$, c_0 системы (43).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. *Иманалиев М. И.* Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: Илим, 1972.

Статья поступила 27 февраля 1998 г.

г. Алматы