Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 517.54+517.813.52

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССОВ СОБОЛЕВА С СУММИРУЕМЫМ ЯКОБИАНОМ. I

С. К. Водопьянов

Аннотация: Получены аналитические условия на отображения классов Соболева, при выполнении которых отображение является монотонным, сохраняющим ориентацию, открытым и дискретным. Основу работы составляет наблюдение о том, что известное свойство равенства нулю в слабом смысле дивергенции столбцов присоединенной матрицы может быть доказано с помощью формулы замены переменной со степенью отображения. Это означает, в частности, возможность доказательства этого свойства для отображений классов Соболева без аппроксимации отображения гладкими, что открывает новые области его применения. Библиогр. 22.

Рассмотрим непрерывное отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение f называется *открытым*, если образ открытого множества открыт, и *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек. Цель настоящей работы — получить аналитические условия на отображение, гарантирующие для него те или иные топологические свойства.

Аналитические требования на отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ удобно формулировать на языке пространств Соболева. Мы предполагаем, что все координатные функции f_i отображения $f = (f_1, \dots, f_n)$ принадлежат пространству Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(G)$. Тем самым для почти всех точек области G определены формальная матрица Якоби $Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, $i, j = 1, \dots, n$, и ее якобиан $J(x, f) = \det Df(x)$. Норма $|Df(x)|$ матрицы есть норма линейного оператора, определяемого этой матрицей, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Современный подход к исследованию топологических характеристик отображений по их аналитическим свойствам заложен Ю. Г. Решетняком при исследовании задач теории пространственных отображений с ограниченным искажением [1]. Напомним, что отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполняются следующие условия:

1) $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(G)$,
2) существует постоянная $K \in [1, \infty)$ такая, что $|Df(x)|^n \leq K J(x, f)$ почти всюду в G.

Наименьшая постоянная в этом неравенстве называется *коэффициентом квазиконформности*. Ю. Г. Решетняк доказал, что отображение с ограниченным искажением непрерывно, открыто и дискретно [1]. Ключевой момент его доказательства базируется на глубокой связи отображений этого класса с квазилинейными уравнениями эллиптического типа и нелинейной теорией потенциала,

Работа выполнена при финансовой поддержке Межвузовской НГП «Университеты России — фундаментальные исследования» (код проекта №1797, финансирование осуществляется через Новосибирский госуниверситет) и INTAS (97–10170).

и этот метод широко применяется в данном круге задач. Заметим, что непрерывность отображения с ограниченным искажением вытекает из более общего результата, установленного в [2] (более простое доказательство соответствующей теоремы из [2] получено в [3]).

Аналитические ограничения на отображение f удобно записывать в виде конечности в различных нормах локального искажения

$$K(x) = \frac{|Df(x)|^n}{J(x,f)} < \infty$$

почти всюду в G. Таким образом, неравенство $1 \leq K(x) < \infty$ для почти всех $x \in G$ означает, что $J(x,f) > 0$ почти всюду на множестве $\{x : Df(x) \neq 0\}$. Полагают $K(x) = 1$ в тех точках, где числитель и знаменатель одновременно обращаются в нуль. Отображение $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(G)$ имеет ограниченное искажение тогда и только тогда, когда $K(x) \in L_\infty(G)$.

Необходимость исследования топологических свойств отображений возникает также в задачах нелинейной теории упругости [4–10]. В работах [4, 5] показано, что в некоторых задачах нелинейной теории упругости ограниченность величины $K(x)$ слишком обременительна: типична ситуация, когда функция $K(x)^p$ интегрируема при некотором $p < \infty$. В работе [7] установлено, что непрерывное непостоянное плоское отображение f, удовлетворяющее условиям $f \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$, и $K(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, открыто и дискретно. Доказательство этого результата основано на двумерной теории уравнения Бельтрами и состоит в том, что всякое такое отображение представляется в виде композиции аналитической функции и некоторого гомеоморфизма (таким образом, для отображений рассматриваемого класса справедлив аналог теоремы Стоилова о факторизации). В работе [10] теорема Решетняка распространена на непостоянные отображения $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, у которых $K(x) \in L_{p,\mathrm{loc}}(G)$, $p > n-1$.

В связи с задачами нелинейной теории упругости Дж. Болл [4, 5] определил классы отображений

$$\mathscr{A}_{p,q}(\Omega) = \bigl\{f \in W^1_p(\Omega) : \operatorname{adj} Df \in L_q\bigr\},$$

где $p \geq n-1$ и $q \geq p/(p-1)$, а матрица $\operatorname{adj} Df$, называемая *присоединенной* к Df, определяется из условия $Df(x) \operatorname{adj} Df(x) = J(x,f)\,\mathrm{Id}$ для почти всех x. Таким образом, $J(x,f) \in L_1(\Omega)$, если $f \in \mathscr{A}_{p,q}$.

Далее, отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию: для каждой точки $y \in f(G)$ связные компоненты прообраза $f^{-1}(y)$ компактны, называется *квазиразреженным*.

В работе [9] доказано, что всякое непрерывное квазиразреженное отображение $f \in \mathscr{A}_{p,q}$, у которого $K(x) \in L^{n-1+\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, открыто и дискретно. Отметим, что методы работ [9, 10] представляют дальнейшее развитие рассуждений Ю. Г. Решетняка из [1].

В настоящей работе содержательные топологические результаты для отображений $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$ получены при следующих ограничениях:

$M1)$ $q \geq n-1$ при $n = 2$ и $q > n-1$ при $n \geq 3$;

$M2)$ $J(x,f) \geq 0$;

$M3)$ $J(x,f) \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$;

$M4)$ из условия $J(x,f) = 0$ почти всюду на множестве $A \subset G$, $|A| > 0$, вытекает, что $Df(x) = 0$ почти всюду на A;

$M5)$ отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ непрерывно;

$M6$) отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ обладает по крайней мере одним из свойств:
(a) отображение почти абсолютно непрерывно (см. определение ниже);
(b) $\operatorname{adj} Df \in L_{q,\mathrm{loc}}$, $q = \frac{n}{n-1}$.

Известно, что для любого отображения $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$ существует возрастающая последовательность $\{A_k\}$ замкнутых множеств такая, что ограничение $f|_{A_k}$ липшицево для любого k, и множество $S = G \setminus \bigcup\limits_k A_k$ имеет нулевую меру. Мы будем называть отображение $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$ *почти абсолютно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого набора попарно не пересекающихся шаров $\{B(x_i, r_i)\}$, $x_i \in S$ для всех i, из условия $\sum\limits_i |B(x_i, r_i)| < \delta$ вытекает, что $\sum\limits_i (\operatorname*{osc}\limits_{B(x_i,r_i)} f)^n < \varepsilon$. Применяя теорему Безиковича, нетрудно проверить, что $|f(S)|$ имеет нулевую меру, следовательно, всякое почти абсолютно непрерывное отображение $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина.

Первое условие гарантирует существование $\mathscr{K}^*$-дифференциала [1] и свойство вполне несвязности множества, имеющего нулевую емкость (случай $q = n-1$ обладает указанными свойствами лишь при $n = 2$!). Второе условие используется в доказательстве монотонности и сохранения ориентации (см. ниже § 1). Третье условие носит естественный характер и вызвано тем, что локальная суммируемость якобиана гарантируется лишь при $q \geq n$. Если отображение удовлетворяет четвертому условию, то говорят, что оно имеет *конечное искажение*. В [2] доказано, в частности, что произвольное отображение класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(G)$, удовлетворяющее только условиям $M2$ и $M4$, монотонно и, следовательно, имеет непрерывный представитель. Оказывается (теорема 3), свойством монотонности обладают и отображения класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, удовлетворяющие некоторым условиям из $M1$–$M6$ (см. § 1). Однако в этом случае квазинепрерывный представитель может иметь разрывы на множестве нулевой q-емкости, $n-1 < q < n$ [3]. Поскольку для части получаемых результатов существенна непрерывность отображения f, мы налагаем на него условие $M5$. Условие $M6$ играет роль условия регулярности в получаемых ниже результатах. По-видимому, оно не является оптимальным. Вопрос об ослаблении условий $M6$ представляет независимый интерес и остается пока открытым. Отметим, что отображение $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(G)$, удовлетворяющее условиям $M2$ и $M4$, обладает также свойствами $M3$, $M5$ и $M6$. Поэтому из формулируемой ниже теоремы 1 вытекает не только теорема Решетняка, но и результаты работ [7, 10]. Кроме того, оказывается, что результаты цитируемой выше работы [9] справедливы при более слабых предположениях.

Основной результат настоящей работы для отображений с вышеоговоренными условиями представлен в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — непостоянное отображение класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(G)$, для которого выполнены условия $M2$–$M6$ и $K(x) \in L_{p,\mathrm{loc}}$ для некоторого $n-1 \leq p \leq \infty$ при $n = 2$ и $n-1 < p \leq \infty$ при $n \geq 3$. Тогда отображение f*

1) *принадлежит $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, где $q = \frac{np}{p+1}$,*
2) *открыто и дискретно,*
3) *дифференцируемо почти всюду в Ω в классическом смысле.*

Пример. Важный класс отображений, удовлетворяющих условию теоремы 1, составляют отображения с ограниченным q-растяжением (в другой терминологии q-квазирегулярные отображения). Так называют отображения f

класса Соболева, которые дополнительно к свойствам $M2$–$M6$ удовлетворяют поточечному неравенству $|\nabla f|^q \leq KJ(x,f)$ почти всюду, где K — постоянная, а $n-1 \leq q \leq n$ при $n=2$ и $n-1 < q \leq n$ при $n \geq 3$. При $q = n$ введенный класс совпадает с классом отображений с ограниченным искажением [1]. Непосредственно проверяется, что $K(x) \in L_{p,\mathrm{loc}}$, где $p = \frac{q}{n-q}$.

Замечание 1. В случае $p = n$ мы получаем новое доказательство открытости и дискретности отображений с ограниченным искажением (квазирегулярных отображений в терминологии монографий [11, 12]), не использующее аппроксимацию отображения гладкими.

Метод настоящей работы основан на формуле замены переменной для функции кратности и степени отображения (теорема 2). С помощью этой формулы доказывается, что непостоянное отображение класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, удовлетворяющее условиям $M1$–$M4$ и $M6\mathrm{b}$, монотонно в области G (теорема 3). Отсюда, в частности, имеем, что координатные функции этого отображения монотонны и, следовательно, непрерывны всюду, за исключением множества p-емкости нуль при $n-1<p<n$ (непрерывны всюду при $p=n$). Заметим, что в [3] свойство монотонности для отображений класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, $n-1<q<n$, имеющих неотрицательный якобиан и конечное искажение, доказано другим способом при условии $\operatorname{adj} Df \in L_{r,\mathrm{loc}}(G)$, $r > q/(q-1)$.

Далее, в теореме 4 установлено, что отображение, удовлетворяющее только условиям $M1$–$M6$, сохраняет ориентацию. В [9] это свойство доказано для отображений класса $W^1_q(G)$ при дополнительных предположениях: $\operatorname{adj} Df(x) \in L_q(G)$, $q \geq p/(p-1)$, и одномерная мера Хаусдорфа $f^{-1}(y)$ равна нулю для каждого $y \in \mathbb{R}^n$.

В § 2 вводится условие $M7$, описывающее геометрические и топологические свойства отображения (среди них содержится и условие квазиразреженности), при выполнении которого утверждение теоремы 1 может быть доказано без привлечения идей и методов теории квазилинейных уравнений эллиптического типа (доказательство базируется только на формуле замены переменной).

Как известно, основу связи между отображениями с ограниченным искажением и нелинейными уравнениями эллиптического типа составляет свойство о том, что столбцы матрицы $\operatorname{adj} Df(x) = \{A_{ij}(x)\}$ являются дивергентно свободными полями, т. е.

$$\int\limits_G \sum_{i=1}^n A_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = 0$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ и любого $j = 1, \dots, n$. Это свойство — частный случай более общего соотношения

$$\operatorname{div}((\operatorname{adj} Df(x))V \circ f) = [(\operatorname{div} V) \circ f] J(x,f)$$

в смысле теории распределений, где $f{:}G \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(G)$, а V — C^1-гладкое векторное поле. Для гладких отображений это свойство доказывается прямым вычислением и базируется на равенстве вторых смешанных производных. В § 3 приводится, в частности, новое доказательство этого результата, основанное на топологических инвариантах (3), что позволяет распространить этот метод на объекты некоммутативной геометрии (например, группы Карно).

Доказательству теоремы 1 посвящен § 4.

Во второй части работы вводится класс непрерывных открытых и дискретных отображений с ограниченным (q,s)-искажением, $1 \le q \le p < \infty$ (при $q = p = n$ это в точности классический класс отображений с ограниченным искажением [1]) и исследуются некоторые свойства таких отображений. В частности, установлены условия, при которых такие отображения обладают $\mathscr{N}$-свойством Лузина и $\mathscr{N}^{-1}$-свойством. Кроме этого, установлены емкостные оценки, локальные оценки искажения и теорема типа Лиувилля.

§ 1. Свойства отображений класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, $n-1 < q \le n$

Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, показатель суммируемости которого удовлетворяет условию $M1$. В дальнейшем мы рассматриваем квазинепрерывный представитель этого класса. Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U, $\mathrm{cap}\big(U; W^1_q(G)\big) < \varepsilon$, вне которого отображение f непрерывно (определение емкости см. в § 3). Если $x \in G$, то ограничение $f|_{S(x,r)}$, $B(x,r) \subset G$, непрерывно для почти всех r.

Функция $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$ называется *сферически монотонной* (или просто *монотонной*), если для любой точки $x \in G$ существует число $r_x > 0$ такое, что шар $B(x,r)$ содержится в области G для почти всех $r \in (0, r_x)$ и на этом шаре справедливы следующие неравенства:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in B(x,r)} f(z) \le \sup_{z\in S(x,r)} f(z) \quad \text{и} \quad \operatorname*{ess\,inf}_{z\in B(x,r)} f(z) \ge \inf_{z\in S(x,r)} f(z).$$

(В [13, предложение 2] показано, что функция класса $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, слабо монотонная в смысле работы [3], является сферически монотонной.) При $n-1 < q < n$ всякая сферически монотонная функция непрерывна всюду за исключением множества, размерность которого по Хаусдорфу не превышает $n - q$ [3].

Известно, что монотонная функция класса $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, $n-1 < q \le n$, дифференцируема почти всюду [1, 12]. Здесь мы приведем другое доказательство этого свойства (по-видимому, более короткое).

Предложение 1. *Любая сферически монотонная функция $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, $n-1 \le q \le \infty$ при $n = 2$ и $n-1 < q \le \infty$ при $n \ge 3$, дифференцируема почти всюду.*

Доказательство. Для всякой точки $x \in G$ и почти всякого радиуса $r \in (1, r_x)$ выполняется неравенство Соболева

$$(\operatorname*{osc}_{S(x,r)} f)^q \le C r^{q-(n-1)} \int\limits_{S(x,r)} |\nabla f|^q \, dS.$$

Из этого неравенства можно получить оценку [13, предложение 3]

$$(\operatorname*{osc}_{S(x,r)} f)^q \le C r^{q-n} \int\limits_{\{z: r<|x-z|<2r\}} |\nabla f|^q \, dz$$

для любого $r < r_x/2$. В [13, доказательство предложения 3] отмечено также, что уточненные значения функции f удовлетворяют соотношениям $\inf\limits_{z\in S(x,r)} f(z) \le$

$f(y) \le \sup\limits_{z\in S(x,r)} f(z)$ для всех $y \in B(x,r)$ и почти всех $r \in r_x$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\varlimsup_{z\to x}\biggl(\frac{|f(z)-f(x)|}{|z-x|}\biggr)^q &\le \varlimsup_{r\to 0}\biggl(\frac{\sup\{|f(z)-f(y)| : z,y\in B(x,r)\}}{r}\biggr)^q\\ &\le \varlimsup_{r\to 0}\biggl(\frac{\sup\{|f(z)-f(y)| : z,y\in S(x,r)\}}{r}\biggr)^q\\ &\le C\varlimsup_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int\limits_{B(x,2r)}|\nabla f|^q\,dy \le \widetilde{C}M(|\nabla f|^q)(x),\end{aligned}$$

где $M(g)(x)$ — максимальная функция. Так как максимальная функция конечна почти всюду, из последних неравенств вытекает выполнение условий теоремы Степанова для функции f.

Приведем в нужной нам формулировке формулы замены переменной в интеграле Лебега. Напомним, что для измеримой функции $g : A \to \mathbb{R}$, определенной на измеримом множестве A, функция $N(y,g,A) = \operatorname{card}\bigl\{g^{-1}(y)\cap A\bigr\}$ называется *функцией кратности* или *индикатрисой Банаха.*

Предложение 2 [14]. *Пусть отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ имеет почти всюду в области G частные производные и локально суммируемый в G якобиан $J(x,f)$. Тогда*

1) *существует борелевское множество $E_f \subset G$ нулевой меры такое, что отображение f_E, равное f вне множества E_f и нулю на множестве E, обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина;*

2) *для всякого измеримого множества $A \subset G$ и любой измеримой вещественной функции $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функции $(u\circ f)(x)|J(x,f)|$ и $u(y)N(y,f_E,A)$ измеримы, и если одна из них интегрируема* (*интегрируемость $(u\circ f)(x)|J(x,f)|$ рассматривается на множестве A*), *то вторая также интегрируема и выполнено равенство*

$$\int\limits_A (u\circ f)(x)|J(x,f)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)N(y,f_E,A)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)N(y,f,A\setminus E)\,dy. \quad (1)$$

Напомним, что линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *$\mathscr{K}$-дифференциалом* отображения $f : G \to \mathbb{R}^n$ в точке $x \in G$, если

$$\varliminf_{t\to 0}\sup_{X\in S(0,1)}\biggl|\frac{f(x+tX)-f(x)}{t} - L(X)\biggr| = 0.$$

Отображение класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, $n-1 \le q \le n$ при $n=2$ и $n-1 < q \le n$ при $n \ge 3$, имеет $\mathscr{K}$-дифференциал почти во всех точках области G и матрица $\mathscr{K}$-дифференциала совпадает с формальной матрицей Якоби [15, теорема 1] (при $q > n$ отображение дифференцируемо почти всюду в обычном смысле, см., например, [1]).

Отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ называется *$\mathscr{K}^*$-дифференцируемым* в точке $x \in G$, если оно обладает следующими свойствами:

1) f непрерывна на сферах $S(x,r) \subset G$ для $r \in (0,r_x)\setminus E_x$, где r_x — положительное число, а $E_x \subset (0,r_x)$ — множество нулевой меры,

2) f имеет частные производные в точке x,

3) линейное отображение $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определяемое матрицей из частных производных, обладает свойством

$$\varliminf_{\substack{t\to 0\\ t\in(0,r_x)\setminus E_x}} \sup_{X\in S(0,1)} \left|\frac{f(x+tX)-f(x)}{t} - Df(x)(X)\right| = 0.$$

Из определения вытекает, что $\mathscr{K}^*$-*дифференцируемое* в точке $x \in G$ отображение f имеет $\mathscr{K}$-*дифференциал* в точке x, равный $Df(x)$.

Замечание 2. Существование $\mathscr{K}^*$-дифференциала почти всюду на области определения можно гарантировать для отображений $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$ при некотором $n-1 \leq q \leq \infty$, если $n = 2$, и $n-1 < q \leq \infty$, если $n \geq 3$, поскольку, как уже отмечалось выше, для отображений этого класса выполняются все перечисленные свойства. Более того, произведение монотонной функции $f \in W^1_q(G)$, $q > n-1$, и непрерывного отображения $g \in W^1_q(G)$, $q > n-1$, также $\mathscr{K}^*$-дифференцируемо почти всюду в G, в то время как их произведение fg гарантированно суммируемо лишь в степени $q/2$. Определение $\mathscr{K}^*$-*дифференцируемости* оправдано тем обстоятельством, что многие последующие рассмотрения (см., например, теорему 2) базируются лишь на перечисленных здесь свойствах 1–3, а не на принадлежности отображения соответствующему классу Соболева.

Следующее предложение является переформулировкой одного результата из [16].

Предложение 3. *Пусть непрерывное отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ $\mathscr{K}^*$-дифференцируемо почти всюду в области G и имеет локально суммируемый в G якобиан $J(x,f)$. Тогда*

1) *существует борелевское множество $E_f \subset G$ нулевой меры, вне которого отображение f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина;*

2) *для всякой компактной области $D \subset G$ такой, что $\overline{D} \subset G$ и $|\partial D| = 0$, и любой непрерывной вещественной функции u такой, что $u|_{f(\partial D)} = 0$ и функция $y \longmapsto u(y)\mu(y,f,D)$ интегрируема в $\mathbb{R}^n$, функция $(u\circ f)(x)J(x,f)$ интегрируема на $D \setminus f^{-1}(f(E_f))$ и выполнено равенство*

$$\int\limits_{D\setminus f^{-1}(f(E_f))} (u\circ f)(x)J(x,f)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)\mu(y,f,D)\chi(y)\,dy, \tag{2}$$

где χ — характеристическая функция множества $f(G)\setminus f(E_f)$;

3) *для почти всех точек $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D \cup E_f)$ справедлива формула*

$$\mu(y,f,D) = \sum_{x\in f^{-1}(y)\cap D} \operatorname{sign} J(x,f).$$

В частности, если отображение имеет неотрицательный якобиан, то

$$\mu(y,f,D) = N(y,f,D)$$

для почти всех точек $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D \cup E_f)$.

Здесь $\mu(\cdot,f,D)$ — степень отображения f. Определение и свойства степени см., например, в [1, 11, 12].

Отметим, что ограничение области интегрирования в левой части формулы (2) значительно сужает область ее применения. Если, например, отображение

f обладает $\mathscr{N}$-свойством, то $J(x,f)=0$ на множестве $f^{-1}(f(E_f))$ и поэтому область интегрирования в левой части (2) совпадает с D (в этом случае формула (2) хорошо известна). Выделим здесь класс отображений, для которых область интегрирования в левой части (2) совпадает с D.

Отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$, $\mathscr{K}^*$-дифференцируемое почти всюду в области G и имеющее локально суммируемый в G якобиан $J(x,f)$, называется *стабильным*, если $J(x,f)=0$ почти всюду на множестве $f^{-1}(f(E_f))$, где E_f — множество из предложения 2. Таким образом, отображение, обладающее $\mathscr{N}$-свойством Лузина, всегда стабильно. Следовательно, если в формуле замены переменной (2) отображение f стабильно, то область интегрирования в левой части (2) совпадает с D.

Пусть $D \Subset G$ — компактная область в G. Если $f : \partial D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, то образ $f(\partial D)$ называется *циклом*. Для произвольного непрерывного продолжения $F : D \to \mathbb{R}^n$ отображения f определена степень $\mu(y,F,D)$ отображения F в точках $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$. Положим *индекс зацепления* $\nu(y, f(\partial D))$ точки y относительно цикла $f(\partial D)$ равным $\mu(y,F,D)$ для всех точек $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$. Очевидно, определение индекса не зависит от способа продолжения f. Более того, справедливо следующее

Предложение 4. *Если $f : D \to \mathbb{R}^n$ имеет невырожденный $\mathscr{K}^*$-дифференциал L в точке $x \in D$, то существует последовательность положительных чисел r_n, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, такая, что индекс зацепления $\nu(y, f(S(x,r_n)))$ точки $y=f(x)$ относительно цикла $f(S(x,r_n))$ равен $\operatorname{sign}\det Df(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Приведем определение из [8], необходимое для формулировки теоремы 2. Пусть D — компактная область с гладкой границей. Функция $u : \partial D \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $W^1_p(\partial D)$ (соответственно $L_p(\partial D)$), если для любой локальной системы координат $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $W_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, многообразия ∂D суперпозиция $u \circ \varphi_\alpha^{-1}$ принадлежит $W^1_p(W_\alpha)$ $\big(u \circ \varphi_\alpha^{-1} \in L_p(W_\alpha)\big)$. Будем считать, что $u \in \mathscr{A}_{p,q}(\partial D)$, если $u \in W^1_p(\partial D; \mathbb{R}^n)$ (т. е. каждая координатная функция отображения u принадлежит $W^1_p(\partial D; \mathbb{R})$) и $|\operatorname{adj} Du| \in L_q(\partial D)$.

Следующее утверждение можно рассматривать как обобщенный вариант формулы о замене переменной, установленной в [2] (соответственно в [6]) для отображений класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(G)$ (соответственно $\mathscr{A}_{p,q}$).

Теорема 2. *Пусть для отображения $f : G \to \mathbb{R}^n$ выполнено одно из следующих условий:*

1) *$f : G \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное стабильное отображение,*

2) *$f \in \mathscr{A}_{p,q}(D)$, где $D \subset G$ — компактная область с гладкой границей, $p \geq n-1$, $q \geq \frac{n}{n-1}$, его след на ∂D принадлежит $\mathscr{A}_{p,q}(\partial D)$ и непрерывен.*

Тогда для любой непрерывной ограниченной вещественной функции u такой, что $u|_{f(\partial D)} = 0$ и функция $y \longmapsto u(y)\mu(y,f,D)$ интегрируема в $\mathbb{R}^n$, функция $(u \circ f)(x)J(x,f)$ интегрируема на D и справедливо равенство

$$\int\limits_D (u \circ f)(x) J(x,f)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)\nu(y, f(\partial D))\chi(y)\, dy. \tag{3}$$

Здесь при выполнении условия 1 теоремы χ — характеристическая функция множества $f(G) \setminus f(E_f)$, а в условиях 2 теоремы функция χ тождественно равна единице в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Теорема 2 в предположениях условия 2 вытекает из [8, теорема 5.1], где доказана формула

$$\int\limits_D (u\circ f)(x)J(x,f)\,dx = \mu(y_0,f,D)\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)\,dy$$

для любой ограниченной гладкой функции f, носитель которой расположен в связной компоненте дополнения $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial D)$, содержащей точку y_0.

Докажем теорему при выполнении условия 1. Для измеримой функции $v\colon D\to\mathbb{R}$, $v(x)\geq 0$ для почти всех x, построим функцию $y\longmapsto N_f(y,v,D)$ следующим образом. Если $N(y,f,D)<\infty$, то положим значение $N_f(y,v,D)$ равным сумме всех значений функции $v(x)$ в точках множества $f^{-1}(y)\cap D$. Если $N(y,f,D)=\infty$, то значение $N_f(y,v,D)$ равняется пределу сумм значений функции $v(x)$ по всевозможным конечным подмножествам $f^{-1}(y)\cap D$.

Если функция $v(x)$ есть индикатор измеримого множества A, $\overline{A}\subset D$, то в силу $J(x,f)=0$ почти всюду на $f^{-1}(f(E_f))$ формулу предложения 2 можно записать в виде

$$\int\limits_D v(x)|J(x,f)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(y,v,D)\chi(y)\,dy.$$

Отсюда ясно, как показать справедливость этой формулы для линейной комбинации индикаторов конечного числа измеримых множеств (для простых функций). Аппроксимируя произвольную неотрицательную измеримую функцию v возрастающей последовательностью $\{v_m\}$ простых функций, по теореме Беппо Леви находим, что

$$\int\limits_D v(x)|J(x,f)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(y,v,D)\chi(y)\,dy.$$

Если v — произвольная измеримая функция, то по определению полагаем

$$N_f(y,v,D)(y) = N_f(y,v^+,D)(y) - N_f(y,v^-,D)(y).$$

Рассмотрим в качестве v измеримую функцию $u\circ f\operatorname{sign}J(x,f)$. Тогда

$$\int\limits_D u\circ f\,J(x,f)\,dx = \int\limits_D v(x)|J(x,f)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(y,v,D)\chi(y)\,dy.$$

Остается установить, что $N_f(y,v,D)\chi(y) = u(y)\nu(y,f(\partial D))\chi(y)$ для почти всех точек $y\in\mathbb{R}^n$.

Пусть E_1 — множество точек $x\in D$, в которых f не имеет $\mathscr{K}^*$-дифференциала, $E_2=\{x\in D : J(x,f)=0\}$, $E_3=\{y\in\mathbb{R}^n\setminus f(E_f) : N(y,f,D)=\infty\}$, где E_f — множество из предложения 2. Так как $\overline{D}\subset G$ компактно, то функция $N(y,f,D)$ суммируема и, значит, $|E_3|=0$. Положим $S=E_3\cup f(E_1)\cup f(E_2)\cup f(E_f)$. Тогда по формуле 1 $|S\setminus f(E_f)|=0$. Выберем произвольно $y\in\mathbb{R}^n\setminus(S\cup f(\partial D))$. Множество $f^{-1}(y)\cap D$ конечно, в каждой его точке отображение f имеет $\mathscr{K}^*$-дифференциал, $J(x,f)\neq 0$ при всех $x\in f^{-1}(y)\cap D$, и все точки этого множества являются внутренними точками множества D. Пусть $a_1,\ldots,a_N$ — все точки множества $f^{-1}(y)\cap D$. По определению $\mathscr{K}^*$-дифференциала найдется такая последовательность замкнутых шаров $B_m^i=B(a_i,r_{i,m})$, $m\in\mathbb{N}$, радиусы которых стремятся к нулю при $m\to\infty$, что $\nu\bigl(y,f\bigl(\partial B_m^i\bigr)\bigr)=\operatorname{sign}J(a_i,f)$ в силу предложения 4. При достаточно больших m шары B_m^i и B_m^j, $i \neq j$, не пересекаются. Тогда для почти всех $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(E_f)$ выполняются соотношения

$$u(y)\nu(y, f(\partial D)) = u(y)\sum_{i=1}^{N} \nu\big(y, f\big(\partial B_m^i\big)\big) = u(y)\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sign} J(a_i, f) = N_f(y, v, D).$$

Теорема доказана.

Отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(G)$, $\mathscr{K}^*$-дифференцируемое почти всюду в области G, называется *монотонным* в области G [2], если для любой точки $x \in G$ и почти всех $r \in (0, r_x)$, $r_x > 0$, мера прообраза $f^{-1}(V_0)$ неограниченной компоненты V_0 к циклу $f(S(x,r))$ равна нулю. Для отображений класса $W^1_n(G)$ данное определение монотонности введено в работе [2].

Теорема 3. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — непостоянное отображение класса Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, удовлетворяющее либо условиям $M1$–$M5$ и условию стабильности, либо условиям $M1$–$M4$ и $M6$b. Тогда отображение f монотонно в области G и дифференцируемо в классическом смысле почти всюду в G.*

Тем же методом, что и теорема 3, доказывается

Следствие 1. *Пусть непостоянное отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(G)$ $\mathscr{K}^*$-дифференцируемо почти всюду в области G, удовлетворяет условиям $M2$–$M5$ и условию стабильности. Тогда отображение f монотонно в области G.*

Из теоремы 3 и следствия 1 получаем

Следствие 2. *Координатные функции отображения f монотонны.*

Доказательство теоремы 3 вытекает из следующих лемм.

Лемма 1. *Пусть $D \Subset G$, $|\partial D| = 0$, — компактная область, для которой ограничение $f|_{\partial D}$ непрерывно. Если V такая компонента связности открытого множества $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$, что $\nu(y, f(\partial D)) \neq 0$, $y \in V$, то $|V \setminus f(D)| = 0$.*

Доказательство. Если $|V \setminus f(E_f)| = 0$, где E_f — множество из предложения 2, то доказывать нечего. В противном случае рассмотрим компактное множество $A \subset V \setminus f(D)$, $|A| \neq 0$. Фиксируем точку $y \in V$. Рассмотрим характеристическую функцию $\xi_A(z)$ множества A, и пусть $\xi_k(z)$ — последовательность финитных непрерывных функций таких, что $\xi_k|_{f(\partial D)} \equiv 0$ для всех k и $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k(z) = \xi_A(z)$ поточечно. Подставляя в формулу (3) функцию $\xi_k(z)$ и переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{f^{-1}(A)\cap D} J(x,f)\,dx = \int\limits_{V} \nu(y, f(\partial D))\xi_A(z)\chi(z)\,dz = \nu(y, f(\partial D))|A| \tag{4}$$

(в предположениях $M6$b функция $\chi(z)$ тождественно равна единице). Так как $f^{-1}(A)\cap D = \varnothing$, правая часть (4) может быть равна нулю лишь в случае $|A| = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $D \Subset G$, $|\partial D| = 0$, — компактная выпуклая область, для которой выполняются условия теоремы 2, f не постоянно и $|f(\partial D)| = 0$. Если V — внешняя компонента связности к циклу $f(\partial D)$, то $|f^{-1}(V) \cap D| = 0$.*

Доказательство. Из условия леммы вытекает, что существует компонента $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$, на которой $\nu(y, f(\partial D)) \neq 0$. (В противном случае с помощью формулы (3) можно получить, что $\int\limits_D J(x,f)\,dx = 0$, откуда $Df(x) = 0$ почти всюду в D и поэтому отображение f постоянно на D.)

В предположении $M6$a заметим, что $|(V\cap f(D))\setminus f(E_f)| = 0$. Действительно, если $|(V\cap f(D))\setminus f(E_f)| > 0$, то, применяя формулу (4) к характеристической функции $\xi_A(z)$ компактного множества $A\subset (V\cap f(D))\setminus f(E_f)$, $|A|\neq 0$, получаем

$$0 = \int\limits_{f^{-1}(A)\cap D} J(x,f)\,dx = \int\limits_V \nu(y,f(\partial D))\xi_A(z)\chi(z)\,dz = \nu(y,f(\partial D))|A|, \quad y\in V, \tag{5}$$

так как $\nu(y,f(\partial D)) = 0$. Поскольку $J(x,f)\geq 0$, то $J(x,f)|_{f^{-1}(A)\cap D} = 0$ почти всюду, и по формуле (1) имеем $|A| = 0$. Так как A — произвольное компактное множество из $(V\cap f(D))\setminus f(E_f)$, то $|(V\cap f(D))\setminus f(E_f)| = 0$. Отсюда $|(f^{-1}(V)\cap D)\setminus f^{-1}(f(E_f))| = 0$, следовательно, в силу условия стабильности $J(x,f)|_{f^{-1}(V)\cap D} = 0$.

Пусть вопреки доказываемому $|f^{-1}(V)\cap D| > 0$. Рассмотрим множество положительной меры $L\subset f^{-1}(V)\cap D$, все точки которого являются точками Лебега для якобиана и точками $\mathscr{K}^*$-дифференцируемости для отображения f. Очевидно, что

$$|(f^{-1}(V)\cap D)\setminus L| = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим $x\in L$ и такое t_x, что $f|_{S(x,t_x)}$ непрерывно и $f(S(x,t_x))\subset V$. Пусть W — компонента связности открытого множества $\mathbb{R}^n\setminus f(S(x,t_x))$, для которой $\nu(y,f(S(x,t_x)))\neq 0$, $y\in W$. По лемме 1 $|W\setminus f(B(x,t_x))| = 0$.

В предположении $M6$b согласно изложенному в начале доказательства из включения $W\subset V$ вытекает, что $J(x,f)|_{f^{-1}(W)\cap B(x,t_x)} = 0$.

В предположении $M6$a применим формулу (3) к области D и непрерывной функции u такой, что $u(x) > 0$ во всех точках $x\in W$ и $u(x) = 0$ в точках $x\notin W$. Получаем

$$\int\limits_{D\cap f^{-1}(W)} (u\circ f)(x)J(x,f)\,dx = 0. \tag{7}$$

Так как $(u\circ f)(x) > 0$ на множестве $B(x,t_x)\cap f^{-1}(W)$, отсюда также имеем $J(x,f)|_{f^{-1}(W)\cap B(x,t_x)} = 0$.

Рассмотрим теперь компоненту связности W открытого множества $\mathbb{R}^n\setminus f(S(x,t_x))$, для которой $\nu(y,(S(x,t_x))) = 0$, $y\in W$.

Применим формулу (3) к области $D = B(x,t_x)$ и непрерывной функции u такой, что $u(x) > 0$ во всех точках $x\in W$ и $u(x) = 0$ в точках $x\notin W$. Получаем

$$\int\limits_{f^{-1}(W)\cap B(x,t_x)} (u\circ f)(x)J(x,f)\,dx = 0,$$

откуда опять вытекает, что $J(x,f)|_{f^{-1}(W)\cap B(x,t_x)} = 0$.

Так как $|f^{-1}(f(\partial D))| = 0$, имеем $J(x,f)|_{B(x,t_x)} = 0$ ввиду вышесказанного. Отсюда в силу конечности искажения (условие $M4$) $Df(x) = 0$ почти всюду на $B(x,t_x)$. Следовательно, L содержится в открытом множестве $U = \bigcup\limits_{x\in L} B(x,t_x)$, на котором $Df(x) = 0$. По этой причине множество значений отображения $f|_U$ не более чем счетно и, кроме того, $f(U)\subset V$.

Фиксируем точку $x_0\in U$ и сферу $S(x_0,t)\subset U$. Пусть $a\in D$ — произвольная точка такая, что $f(a)$ принадлежит какой-нибудь ограниченной компоненте дополнения $\mathbb{R}^n\setminus f(D)$. Соединяя отрезками l_x точку a с точками x сферы

$S(x_0,t)$ и используя абсолютную непрерывность отображения f на почти всех отрезках, заключаем, что на почти всех (относительно поверхностной меры на сфере $S(x_0,t)$) отрезках l_x существует множество положительной меры, образ которого лежит вне $f(U)$, но все еще в V. Применяя теорему Фубини, получаем $|(f^{-1}(V)\cap D)\setminus L|>0$, что противоречит (6). Лемма доказана.

Напомним, что отображение сохраняет ориентацию, если степень отображения $\mu(y,f,D)$ положительна для всякой компактно вложенной подобласти $D\Subset G$ и любой точки $y\in f(D)\setminus f(\partial D)$ (определение и свойства степени см., например, в [1, 11, 12]).

Теорема 4. *Пусть непостоянное отображение $f:G\to\mathbb{R}^n$, $G\subset\mathbb{R}^n$, удовлетворяет условиям $M1$–$M5$ и либо стабильно, либо удовлетворяет условию $M6b$. Тогда отображение f сохраняет ориентацию и дифференцируемо почти всюду.*

Доказательство теоремы 4. Фиксируем произвольную точку $y\in f(D)\setminus f(\partial D)$ и компоненту связности V открытого множества $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial D)$, содержащую точку y. Не может быть такого, чтобы $J(x,f)=0$ почти всюду на $f^{-1}(V)$, так как в противном случае частные производные отображения f равны нулю на $f^{-1}(V)$ и поэтому множество V не более чем счетно, чего, очевидно, быть не может.

Далее, по той же причине исключается также возможность $|V\setminus f(E_f)|=0$, ибо в силу стабильности $J(x,f)=0$ почти всюду на $f^{-1}(V)$, что так же, как и в предыдущем случае, приводит к противоречию.

Подставим в формулу (4) характеристическую функцию $\xi_A(z)$ компактного множества $A\subset V\setminus f(E_f)$ положительной меры. Тогда в силу предложения 2 $|f^{-1}(A)|>0$ и $J(x,f)>0$ почти всюду на множестве $f^{-1}(A)$. Получаем

$$0<\int\limits_{f^{-1}(A)\cap D} J(x,f)\,dx=\int\limits_A \mu(y,f,D)\chi(z)\,dz\le \mu(y,f,D)|V\setminus f(E_f)|.$$

Отсюда вытекает, что степень — положительная функция точки y.

Те же рассуждения используются при доказательстве следующего утверждения.

Следствие 3. *Пусть непрерывное непостоянное отображение $f:G\to\mathbb{R}^n$, $G\subset\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(G)$ $\mathscr{K}^*$-дифференцируемо почти всюду в области G, удовлетворяет условиям $M2$–$M5$ и стабильно. Тогда отображение f сохраняет ориентацию.*

§ 2. Открытость и дискретность квазиразреженных отображений

Введем дополнительно к уже сформулированным свойствам $M1$–$M6$ еще одно условие на отображение f.

$M7$. Отображение $f:G\to\mathbb{R}^n$ непрерывно и удовлетворяет одному из следующих топологических предположений:

(a) для каждой точки $y\in f(G)$ связные компоненты множества $f^{-1}(y)$ компактны,

(b) для всякой точки y существует компактная область $D\Subset G$ такая, что $y\in f(D)$ и кратность отображения $N(z,f,D)$, $z\in\mathbb{R}^n\setminus f(\partial D)$, почти всюду ограничена в некоторой окрестности точки y.

Напомним, что отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию: для каждой точки $y \in f(G)$ связные компоненты прообраза $f^{-1}(y)$ компактны, называется *квазиразреженным.*

Введем характеристику

$$K_s(x; f) = \inf\{k(x) : |\nabla_{\mathscr{L}} f|^s(x) \le k(x)J(x, f)\}.$$

Очевидно, что $K_s(x; f) = 0$ для почти всех $x \in Z = \{x \in G : J(x, f) = 0\}$. Заметим, что $K_n(x; f)$ отличается от ранее введенной характеристики $K(x)$ только тем, что $K_n(x; f) = 0$ на Z (напомним, что $K(x) = 1$ для почти всех $x \in Z$).

Теорема 5. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, — непостоянное отображение класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(G)$, для которого выполнены условия $M2$–$M5$, $M7$ и которое стабильно. Пусть*

1) *$K_s(x; f) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(G)$ в случае $n - 1 < q = s \le n$,*

2) *$K_s(x; f) \in L_{\frac{q}{s-q},\mathrm{loc}}(G)$ в случае $n - 1 < q < s \le n$ (при $n = 2$ показатель суммируемости q может принимать значение 1).*

Тогда отображение f

1) *принадлежит $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$,*

2) *открыто и дискретно,*

3) *дифференцируемо почти всюду в Ω.*

Дифференцируемость и сохранение ориентации вытекают из теоремы 4. Чтобы доказать открытость и дискретность, достаточно показать, что прообраз любой точки вполне несвязен. Доказательство оставшихся утверждений содержится в приводимых ниже утверждениях. Обозначим символом Z множество точек $\{z \in G : J(z, f) = 0\}$.

Лемма 3. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, — отображение класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(G)$, для которого выполнены условия $M2$–$M5$ и*

1) *$K_s(x; f) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(G)$ в случае $1 \le q = s < \infty$,*

2) *$K_s(x; f) \in L_{\frac{q}{s-q},\mathrm{loc}}(G)$ в случае $1 \le q < s < \infty$.*

Фиксируем компактную область $D \Subset G$ и произвольную область $D' \subset \mathbb{R}^n$ такую, что $D' \supset f(\overline{D})$.

Тогда

1) *для любой функции $u \in W^1_\infty(D')$ композиция $u \circ f$ принадлежит $W^1_q(D)$ и имеет место неравенство*

$$\left\| u \circ f \mid L^1_q(D) \right\| \le K_{q,s}(f; D)^{\frac{1}{s}} \Biggl(\int\limits_{D'} |\nabla u(y)|^s N(y, f_E, D)\, dy \Biggr)^{\frac{1}{s}}, \tag{8}$$

где

$$K_{q,s}(f; D) = \begin{cases} \|K_s(\cdot; f) \mid L_\infty(D)\| & \text{при } 1 \le q = s < \infty, \\ \left\|K_s(\cdot; f) \mid L_{\frac{q}{s-q}}(D)\right\| & \text{при } 1 \le q < s < \infty; \end{cases}$$

2) *если область D такова, что $N(y, f_E, D) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, то для любой функции $u \in L^1_s(D')$ композиция $u \circ f$ принадлежит $L^1_q(D)$ и имеет место неравенство*

$$\left\| u \circ f \mid L^1_q(D) \right\| \le (K_{q,s}(f; D) \|N(y, f_E, D) \mid L_\infty(\mathbb{R}^n)\|)^{\frac{1}{s}} \left\| u \mid L^1_s(D') \right\|;$$

3) *композиция $u \circ f$ дифференцируется по классическому правилу: $\nabla(u \circ f)(x) = Df(x)^T \nabla u(f(x))$ почти всюду в D.*

В частности, отображение f принадлежит $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$. (По поводу обозначения $N(y, f_E, D)$ см. предложение 2.)

Доказательство. Проверим утверждения леммы для $u \in W^1_\infty(D')$. Так как $u \circ f$ принадлежит классу $ACL(D)$ и f имеет конечное искажение, то ее производные вычисляются по классическим формулам и, кроме того,

$$\left\|u \circ f \mid L^1_q(D)\right\| \leq \left(\int\limits_D (|\nabla u|(f(x))|Df|)^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int\limits_{D\setminus Z} |\nabla u|^q(f(x))|J(x,f)|^{\frac{q}{s}} \frac{|Df(x)|)^q}{|J(x,f)|^{\frac{q}{s}}}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя неравенство Гёльдера с показателями s/q и $s/(s-q)$, выводим

$$\left\|u \circ f \mid L^1_q(D)\right\| \leq \left(\int\limits_{D\setminus Z} \left(\frac{|Df(x)|^s}{|J(x,f)|}\right)^{\frac{q}{s-q}} dx\right)^{\frac{s-q}{sq}} \left(\int\limits_D |\nabla u|^s(f(x)) \cdot |J(x,f)|\,dx\right)^{\frac{1}{s}}$$

(при $q = s$ левый сомножитель равен $K_{s,s}$). Применяя к правому сомножителю формулу (1), получаем требуемую оценку для нормы. Полагая $u = x_i$, $i = 1, \dots, n$, имеем $\partial f_i/\partial x_j \in L_{q,\mathrm{loc}}(G)$.

Докажем второе утверждение леммы. Если $u \in L^1_s(D')$, то существует последовательность гладких функций u_k, сходящаяся к u квазивсюду (см. ниже) и в норме $L^1_s(D')$. Чтобы доказать утверждение 2, заметим, что последовательность $u_k \circ f$ ограничена в $L^1_q(D)$ и сходится к $u \circ f$ квазивсюду. С помощью неравенства Пуанкаре получаем, что композиция $u \circ f$ локально интегрируема в D. Таким образом, $u \circ f \in L^1_q(D)$ и утверждение 2 доказано.

С другой стороны, композицию $u_k \circ f(x)$ можно дифференцировать по классической формуле для почти всех $x \in D$. Пусть $S \subset D'$ — множество точек, в которых функция u не имеет производной. Из формулы замены переменной вытекает, что на множестве $A = \{x : x \in f^{-1}(S)\}$ (которое может иметь положительную меру) якобиан равен нулю почти всюду. Отсюда в силу конечности искажения равны нулю почти всюду на A все частные производные координатных функций отображения f. По этой причине предел в $L_q(D)$ последовательности $\nabla(u_k \circ f)(x) = Df(x)^T \nabla u_k(f(x))$ равен $\nabla(u \circ f)(x) = Df(x)^T \nabla u(f(x))$, причем $\nabla(u \circ f)(x) = 0$ почти всюду на A. Остается лишь заметить, что $Df(x)^T \nabla u(f(x))$ есть обобщенная производная функции $u \circ f$.

Согласно [1, 17] теорема 1 будет доказана, если мы установим, что отображение f сохраняет ориентацию и для любой точки $y \in \mathbb{R}^n$ прообраз $f^{-1}(y)$ вполне несвязен.

Сохранение ориентации для рассматриваемого класса отображений вытекает из леммы 3 и теоремы 4.

Лемма 4. *Для любой точки $y \in \mathbb{R}^n$ прообраз $f^{-1}(y)$ вполне несвязен.*

Доказательство. Для того чтобы установить требуемое свойство, мы покажем, что прообраз $f^{-1}(y)$ имеет нулевую q-емкость, откуда в силу известных свойств емкости [1] вытекает, что в случае $q > 1$ $(n-q)$-мерная размерность по Хаусдорфу множества $f^{-1}(y)$ равна нулю. Поскольку $n - q < 1$, то $f^{-1}(y)$ — вполне несвязное множество. Если же $n = 2$ и $q = 1$, то линейная мера Хаусдорфа множества нулевой 1-емкости равна нулю [18], следовательно, это множество не имеет невырожденных континуумов в качестве компонент связности.

Напомним основные положения теории емкости из [19], необходимые для доказательства леммы. Пусть $\mathbb{M}$ — риманово пространство. Обозначим символом $F(\mathbb{M})$ нормированное пространство, элементы которого суть непрерывные функции, определенные на $\mathbb{X}$. Алгебраические операции в $F(\mathbb{M})$ определяются стандартным образом.

Предположим, что вместе с каждой функцией $u \in F(\mathbb{M})$ пространство $F(\mathbb{M})$ содержит ее модуль $|u|$. Таким образом, относительно поточечного отношения порядка между функциями пространство $F(\mathbb{M})$ образует векторную решетку. Пусть, кроме того, норма и порядок связаны между собой следующим образом: существует непрерывная монотонно возрастающая функция $\alpha : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющая условиям $\alpha(0) = 0$, $\alpha(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, и

$$\alpha(\|\max(u,v)\|) + \alpha(\|\min(u,v)\|) \leq \alpha(\|u\|) + \alpha(\|v\|),$$

где $u, v \in F(\mathbb{M})$ — произвольные функции.

Пример 1. Рассмотрим совокупность функций $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, принадлежащих пересечению $F(\mathbb{M}) = C(\mathbb{M}) \cap W^1_\infty(\mathbb{M})$ и имеющих конечную норму $\big\|\varphi \mid W^1_q(\mathbb{M})\big\| = (\|\varphi \mid L_q(\mathbb{M})\|^q + \|\nabla\varphi \mid L_q(\mathbb{M})\|^q)^{\frac{1}{q}}$ $(\|\varphi \mid L^1_q(\mathbb{M})\| = \|\nabla\varphi \mid L_q(\mathbb{M})\|)$. Функцию α положим равной $\alpha(t) = t^q$. Замыкание пространства $F(\mathbb{M})$ относительно введенной нормы совпадает с пространством Соболева $W^1_q(\mathbb{M})$ $\big(L^1_q(\mathbb{M})\big)$, $1 \leq q < \infty$.

Пример 2. Пусть $\mu : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ — произвольная неотрицательная суммируемая на $\mathbb{M}$ функция. Рассмотрим в качестве $F(\mathbb{M})$ класс финитных функций $\overset{\circ}{L}{}^1_q(\mathbb{M};\mu) = C_0(\mathbb{M}) \cap W^1_\infty(\mathbb{M})$, имеющих конечную норму $\big\|\varphi \mid \overset{\circ}{L}{}^1_q(\mathbb{M};\mu)\big\| = \|\nabla\varphi \mid L_q(\mathbb{M})\|$, и функцию $\alpha(t) = t^q$. Если $\mu \equiv 1$, то полагаем $\overset{\circ}{L}{}^1_q(\mathbb{M};1) = \overset{\circ}{L}{}^1_q(\mathbb{M})$.

Пример 3. Фиксируем компактное множество $\omega \subset \mathbb{M}$, содержащее внутренние точки. В пространстве $L^1_q(\mathbb{M})$ примера 1 рассмотрим подпространство $L^1_q(\omega;\mathbb{M})$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на множестве ω, с нормой $\big\|\varphi \mid L^1_q(\omega;\mathbb{M})\big\| = \|\nabla\varphi \mid L_q(\mathbb{M})\|$, и ту же функцию α.

Пусть e — компактное подмножество в $\mathbb{M}$. Множеством *F-допустимых* функций для компакта $e \subset \mathbb{M}$ называется совокупность $A(e;F(\mathbb{M})) = \{u \in F(\mathbb{M}) : u \geq 1 \text{ на } e\}$, *емкостью* компакта e в пространстве $F(\mathbb{M})$ — величина

$$\operatorname{cap}(e;F(\mathbb{M})) = \inf\{\alpha(\|u\|) : u \in A(e;F(\mathbb{M}))\}.$$

Если $A(e;F(\mathbb{M})) = \varnothing$, то полагаем $\operatorname{cap}(e;F(\mathbb{M})) = \infty$. Стандартным образом емкость, определенная на компактных множествах, распространяется на произвольные множества $E \subset \mathbb{M}$ (см. [19], где, в частности, доказано, что введенная таким образом емкость является обобщенной емкостью Шоке).

Пример 4. Емкость множества $E \subset \mathbb{M}$ в пространстве $W^1_q(\mathbb{M})$ примера 1 называют *емкостью Соболева* множества E и обозначают через $\operatorname{cap}\big(E;W^1_q(\mathbb{M})\big)$. Класс допустимых функций для емкости компакта $e \subset \mathbb{M}$ есть $A\big(e;W^1_q(\mathbb{M})\big) = \big\{u \in C(\mathbb{M}) \cap W^1_\infty(\mathbb{M}) : u \geq 1 \text{ на } e\big\}$.

Пример 5. Емкость множества $E \subset \mathbb{M}$ в пространстве $\overset{\circ}{L}{}^1_q(\mathbb{M};\mu)$ примера 2 иногда называют *весовой вариационной емкостью* конденсатора $(E,\mathbb{M})$ и обозначают символом $\operatorname{cap}\big(E;\overset{\circ}{L}{}^1_q(\mathbb{M};\mu)\big)$. Класс допустимых функций конденсатора $(e,\mathbb{M})$, e — компакт, есть $A\big(e;\overset{\circ}{L}{}^1_q(\mathbb{M};\mu)\big) = \big\{u \in C_0(\mathbb{M}) \cap W^1_\infty(\mathbb{M}) : u \geq 1 \text{ на } e\big\}$.

Пример 6. Фиксируем компактное множество $\omega \subset \mathbb{M}$, с непустой внутренностью. Емкость множества $E \subset \mathbb{M} \setminus \omega$ в пространстве $L^1_q(\omega;\mathbb{M})$ (см. пример 3) называют емкостью конденсатора $(\omega, E; \mathbb{M})$ и обозначают символом $\operatorname{cap}\bigl(\omega, E; L^1_q(\mathbb{M})\bigr)$. Класс допустимых функций конденсатора $(\omega, e; \mathbb{M})$ компакта e есть $A\bigl(e; L^1_q(\omega;\mathbb{M})\bigr) = \bigl\{u \in C(\mathbb{M}) \cap W^1_\infty(\mathbb{M}) : u \geq 1 \text{ на } e,\ u = 0 \text{ на } \omega\bigr\}$.

Говорят, что множество $E \subset \mathbb{M}$ *имеет емкость нуль*, если $\operatorname{cap}(E; F(\mathbb{M})) = 0$. Некоторое свойство выполняется *квазивсюду* на $\mathbb{M}$, если оно выполняется всюду, за исключением множества, имеющего нулевую емкость. Известно, что счетное объединение множеств емкости нуль имеет емкость нуль.

Так как в ограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство Пуанкаре, то ясно, что совокупности множеств нулевой емкости $\operatorname{cap}\bigl(E; W^1_q(\Omega)\bigr)$ и $\operatorname{cap}\bigl(E; \overset{\circ}{L}{}^1_q(\Omega)\bigr)$ на ограниченных областях совпадают. В следующей лемме формулируются условия, выполнение которых гарантирует, что данное множество имеет нулевую меру. В частности, мы докажем, что совокупности множеств нулевой емкости примеров 4–6 на ограниченных областях в $\mathbb{R}^n$ совпадают.

Лемма 5. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена, $E \subset \Omega$, $\omega \subset \Omega$ — компактное множество с непустой внутренностью, число $b \in \mathbb{R}$ и постоянная K такие, что для всякого $a > b$ существует полунепрерывная снизу функция $u_a \in L^1_q(\Omega)$ со свойствами $u|_E \geq a$ и $u|_\omega \leq b$ и $\bigl\|u_a \mid L^1_q(\Omega)\bigr\| \leq K$. Тогда $\operatorname{cap}\bigl(E; W^1_q(\Omega)\bigr) = 0$, $\operatorname{cap}\bigl(E; \overset{\circ}{L}{}^1_q(\Omega)\bigr)$ и $\operatorname{cap}\bigl((\omega, E; L^1_q(\Omega)\bigr) = 0$.*

Доказательство. Пусть $D \Subset \Omega$ — компактная область с гладкой границей, $\omega \subset D$, а Q — куб минимального размера с ребрами, параллельными координатным осям, содержащий область D. Существует ограниченный линейный оператор продолжения $\operatorname{ext} : L^1_q(D) \to L^1_q(Q)$, $1 \leq q \leq \infty$, такой, что $\operatorname{ext} u_a \in L^1_q(Q) \cap W^1_\infty(Q)$, если $u_a \in L^1_q(Q) \cap W^1_\infty(Q)$. Рассмотрим функцию

$$v_a = \frac{\max(u_a, b) - b}{a - b}.$$

Очевидно, что

$$\bigl\|v_a \mid L^1_q(Q)\bigr\| \leq \frac{\|\operatorname{ext}\| K}{a - b}$$

для любого $a > b$. Кроме того, множество $V_a = \{x : v_a > 1 - \delta\}$ открыто и содержит E, где $\delta \in (0,1)$ — произвольное число. С другой стороны, компактная область ω содержит некоторый шар $B \subset D$, на котором $v_a = 0$. В силу одного из вариантов неравенства Пуанкаре (см. например, [18]), справедливо неравенство

$$\biggl(\int\limits_Q |g|^{q^*}\, dx\biggr)^{\frac{1}{q^*}} \leq C l(Q)^{n/q^*} \biggl(\int\limits_Q |\nabla g|^q\, dx\biggr)^{\frac{1}{q}}, \tag{9}$$

в котором $q^* \in [1, qn/(n-q)]$, $l(Q)$ — длина ребра куба Q, а $2Q$ — куб с тем же центром, что и Q, но с ребрами, растянутыми в два раза, где $g \in L^1_q(Q)$ — произвольная функция, равная нулю на шаре B. Отсюда получаем $\operatorname{cap}\bigl(E \cap D; W^1_q(Q)\bigr) = 0$, поскольку

$$\operatorname{cap}\bigl(E \cap D; W^1_q(Q)\bigr) \leq \operatorname{cap}\bigl(V_a \cap D; W^1_q(Q)\bigr) \leq C \frac{\|\operatorname{ext}\| K}{(a - b)(1 - \delta)},$$

где C — некоторая постоянная, а $a \in \mathbb{R}$, $a > b$, — произвольное число (при необходимости функцию $\frac{v_a}{1-\delta}$ можно усреднить). Умножая результат усреднения на подходящую срезку, можно доказать, что $\operatorname{cap}\bigl(E \cap D; \overset{\circ}{L}{}^1_q(G)\bigr) = 0$ и $\operatorname{cap}\bigl(\omega, E \cap D; L^1_q(G)\bigr) = 0$. Так как область D произвольна, лемма 5 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 5. Пусть f — отображение из теоремы 5. Фиксируем компактную область $D \Subset G$, для которой $f(D) \setminus f(\partial D) \neq \varnothing$, и произвольную ограниченную область Ω, содержащую $f(\overline{D})$. Рассмотрим в примере 2 пространство $\overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega; \mu)$ с весовой функцией μ, определенной следующим образом:

$$\mu(y) = \begin{cases} \mu(y, f, D), & \text{если } y \in f(D) \setminus f(\partial D), \\ 1, & \text{если } y \in (\Omega \setminus f(\overline{D})) \cup f(\partial D). \end{cases} \tag{10}$$

Напомним, что в силу условия $M7$ либо

1) для точки $y \in f(G)$ существует компактная область $D \Subset \mathbb{R}^n$, для которой $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$,

либо

2) существует компактная область $D \Subset \mathbb{R}^n$ такая, что $y \notin f(\partial D)$, и в некоторой окрестности W точки y функция $\mu(z, f, D)$ ограничена.

Первое условие выполняется в том случае, когда всякая компонента связности прообраза $f^{-1}(y)$ компактна [20], т. е. отображение разреженно.

Напомним, что ряд в нормированном пространстве называется *нормально сходящимся*, если сходится ряд из норм его членов.

Лемма 6. *Пусть $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$. Существует нормально сходящийся в $\overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega; \mu)$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k$, обладающий следующими свойствами:*

1) *члены ряда φ_k — неотрицательные функции,*

3) *сумма ряда — полунепрерывная снизу функция, равная ∞ в точке y.*

Доказательство. В первом из отмеченных перед формулировкой леммы пяти случаев возьмем в качестве W ограниченную компоненту связности открытого множества $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$, содержащую точку y. Тогда для всякого $k \in \mathbb{N}$ существует непрерывная неотрицательная функция $\varphi_k \in \overset{\circ}{W}{}^1_\infty(W)$ такая, что $\varphi_k(y) \geq 1$ и

$$\bigl\|\varphi_k \mid \overset{\circ}{L}{}^1_p\Omega; \mu)\bigr\|^p = \mu(y, f, D) \int\limits_W |\varphi_k|^p \, dx \leq 1/2^{kp}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Существование такой функции вытекает из того, что емкость точки в пространстве $\overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega)$ равна нулю для любой области Ω, содержащей заданную точку. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ нормально сходящийся и обладает требуемыми свойствами.

Во втором случае возьмем в качестве $W \subset \Omega$ окрестность точки y, в которой функция $\mu(z, f, D)$ ограничена некоторой постоянной M. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным с той лишь разницей, что в формуле (11) вместо равенства следует написать неравенство: $\bigl\|\varphi_k \mid \overset{\circ}{L}{}^1_p(W; \mu)\bigr\|^p \leq M \int\limits_W |\varphi_k|^p \, dx \leq 1/2^{kp}, \quad k \in \mathbb{N}$.

Лемма 7. *Пусть* $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$. *Тогда* $\operatorname{cap}\bigl(f^{-1}(y); W_q^1(G)\bigr) = 0$.

Доказательство. Заметим, что $f^{-1}(y)$ — относительно замкнутое подмножество G. Если φ — сумма ряда из леммы 6, то функция $\varphi \circ f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k \circ f$ полунепрерывна снизу и равна бесконечности в точках множества $f^{-1}(y)$, при этом в силу леммы 3 ряд сходится нормально. Таким образом, $\varphi \circ f \in W_{q,\mathrm{loc}}^1(G)$. Поэтому ввиду леммы 5 на всякой компактной области $D \Subset G$ с гладкой границей q-емкость множества $f^{-1}(y) \cap D$ равна нулю. Следовательно, она равна нулю и на области G. Покрывая $f^{-1}(y)$ счетной совокупностью областей $D_n \Subset G$ с гладкой границей и используя счетную полуаддитивность емкости, получаем $\operatorname{cap}\bigl(f^{-1}(y); W_q^1(G)\bigr) = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5 закончено.

§ 3. Решения квазилинейных уравнений эллиптического типа и формула замены переменной

Как известно, основу связи между отображениями с ограниченным искажением и нелинейными уравнениями эллиптического типа составляет свойство о том, что столбцы матрицы $\operatorname{adj} Df(x) = \{A_{ij}(x)\}$ являются дивергентно свободными полями, т. е.

$$\int\limits_G \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = 0$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ и любого $j = 1, \dots, n$. Это свойство для гладких отображений доказывается прямым вычислением, а затем распространяется по непрерывности (с помощью аппроксимации) на подходящий класс Соболева (см., например, [21]). Здесь приводится (см. ниже следствие 4) новое доказательство этого результата, основанное на формуле замены переменной (3).

Лемма 8. *Пусть* $f : G \to \mathbb{R}^n$ *— отображение класса* $W_{q,\mathrm{loc}}^1(G)$, *где* $q \geq n-1$ *при* $n = 2$ *и* $q > n-1$ *при* $n \geq 3$, *а* $u : G \to \mathbb{R}$ *—* $\mathscr{K}^*$*-дифференцируемая почти всюду в области* G *и равная нулю вне* $\omega \Subset G$ *функция такие, что отображение* $f_u : G \to \mathbb{R}^n$, $f_u = (f_1, \dots, f_{j-1}, u, f_{j+1}, \dots, f_n)$, *непрерывно и стабильно, и, кроме того,*

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_1(\omega) \quad \text{при некотором } j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\int\limits_G \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Символом A_{ij} обозначим элементы матрицы $\operatorname{adj} Df(x)$. Заметим, что отображение $f_u : G \to \mathbb{R}^n$ $\mathscr{K}^*$-дифференцируемо почти всюду в области G и якобиан $J(x, f_u)$ этого отображения является в точности подынтегральным выражением в (12). Рассмотрим такую компактную область $D \Subset G$, что $\omega \Subset D$, $|\partial D| = 0$, $u|_{\partial D} \equiv 0$ и ограничение $f_u|_{\partial D}$ непрерывно. Тогда цикл $f_u(\partial D)$ лежит в $(n-1)$-мерной плоскости и поэтому $\nu(y, f_u(\partial D)) = 0$ для любой точки $y \in \mathbb{R}^n \setminus f_u(\partial D)$. Таким образом, выполняются условия теоремы 2, и правая часть (3) для отображения $f_u : D \to \mathbb{R}^n$ равна нулю. Следовательно, равенство (12) доказано.

Следствие 4. *Пусть $f: G \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}$, где $q \geq n-1$. Тогда столбцы матрицы* $\operatorname{adj} Df$ *суть дивергентно свободные поля.*

Доказательство. Фиксируем произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(G)$, равную нулю вне некоторой компактной области $\omega \Subset G$. Рассмотрим последовательность гладких отображений $f_k : \omega \to \mathbb{R}^n$, сходящуюся в $W^1_{n-1}(\omega)$ к отображению f. Заметим, что f_k можно выбрать так, что $f_k \in W^1_q(\omega)$ при некотором $q > n-1$. В силу леммы 8

$$\int\limits_G \sum_{i=1}^n A_{k,ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = 0,$$

где $A_{k,ij}$ — элементы матрицы $\operatorname{adj} Df_k(x)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем нужное соотношение.

Теорема 6. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, где $q \geq n-1$ при $n = 2$ и $q > n-1$ при $n \geq 3$, и якобиан $J(x,f)$ локально суммируем на открытом множестве $W = G \cap f^{-1}(\Omega)$. Пусть еще $V : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — векторное поле $V = (v_1, \dots, v_n)$ класса C^1. Если отображение f почти абсолютно непрерывно, то*

$$\operatorname{div}((\operatorname{adj} Df(x)) V \circ f) = [(\operatorname{div} V) \circ f] J(x,f) \tag{13}$$

в смысле теории распределений на открытом множестве W.

Замечание 3. Формула (13) представляет независимый интерес, и ее доказательство при других аналитических предположениях основано на аппроксимации отображения гладкими (см. [6, 8]). Для отображений класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ она может быть получена из следствия 4 стандартным предельным переходом. Приводимое ниже доказательство основывается только на лемме 8. Кроме того, имея в виду применения этой формулы на группах Карно, будем интересоваться условиями, при которых она может быть доказана без предельного перехода. Ниже (лемма 9) приведены условия [8, теорема 3.2], при выполнении которых формула (13) справедлива без $\mathcal{N}$-свойства Лузина для отображения f.

Доказательство. Фиксируем функцию $\varphi \in C_0^\infty(W)$. Требуется доказать, что

$$\int\limits_W \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} v_j \circ f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int\limits_W [(\operatorname{div} V) \circ f] J(x,f) \varphi(x)\, dx. \tag{14}$$

Подынтегральное выражение в левой части (14) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n A_{ij} v_j \circ f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}((v_j \circ f)\varphi) - \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(v_j \circ f)\varphi \\
&= \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}((v_j \circ f)\varphi) - \sum_{i,j,k=1}^n A_{ij} \left(\frac{\partial v_j}{\partial y_k}\right) \circ f \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \varphi \\
&= \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}((v_j \circ f)\varphi) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial v_j}{\partial y_j}\right) \circ f J(x,f) \varphi.
\end{aligned} \tag{15}$$

Так как $A_{ij}v_j\circ f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\in L_1(W)$ для всех рассматриваемых i,j и

$$\sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial v_j}{\partial y_j}\Big)\circ fJ(x,f)\varphi\in L_1(W),$$

для доказательства (14) остается лишь установить, что

$$\sum_{j=1}^n\int\limits_W\sum_{i=1}^n A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}((v_j\circ f)\varphi)\,dx=0. \tag{16}$$

Заметим, что подынтегральное выражение в (16) — суммируемая функция для любого фиксированного j (чтобы это проверить, достаточно в разложении (16) вместо поля V рассмотреть новое поле V_j, которое получается из V при замене всех его компонент, кроме j-й, нулем) и для него выполняются условия леммы 8: для этого достаточно в лемме 8 вместо u рассмотреть функцию $v_j\circ f$. Непосредственно проверяется, что для фиксированного j подынтегральное выражение в (16) является якобианом для непрерывного отображения $F_{j,\varphi}=(f_1,\dots,f_{j-1},(v_j\circ f)\varphi,f_{j+1},\dots,f_n)$. Заметим, что

$$(f_1,\dots,f_{j-1},v_j\circ f,f_{j+1},\dots,f_n)=G_j\circ f,$$

где $G_j(y)=(y_1,\dots,y_{j-1},v_j(y),\dots,y_n)$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица. Композиция $G_j\circ f$ непрерывна и почти абсолютно непрерывна. Отсюда вытекает, что отображение $F_{j,\varphi}$ непрерывно, $\mathscr{K}^*$-дифференцируемо, обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина (см. ниже) и удовлетворяет условиям теоремы 2. Таким образом, выполнены условия леммы 8, и, следовательно, равенство (16) вытекает из (12).

Остается показать, что отображение $F_{j,\varphi}$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Пусть A_k, S — множества из определения почти абсолютной непрерывности. Ограничение $F_{j,\varphi}|_{A_k}$ липшицево и поэтому обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина на A_k. Остается проверить, что $F_{j,\varphi}|_S$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. По фиксированному $\varepsilon>0$ найдем $\delta>0$ из условия почти абсолютной непрерывности отображения $G_j\circ f$. Пусть $\{B(x_i,r_i)\}$, $x_i\in S$ для всех i, — произвольный набор попарно не пересекающихся шаров таких, что $\sum\limits_i|B(x_i,r_i)|<\delta$. Оценим сумму $\sum\limits_i(\operatorname*{osc}\limits_{B(x_i,r_i)}F_{j,\varphi})^n$. Если $x\in B(x_i,r_i)$, то

$$\begin{aligned}|F_{j,\varphi}(x)-F_{j,\varphi}(x_i)|^n&\le C(\sup_{x\in G}|\varphi|^n(x)(\operatorname*{osc}_{B(x_i,r_i)}(G_j\circ f))^n\\&+\sup_{x\in\operatorname{supp}\varphi}|G_j\circ f(x)|^n(\operatorname*{osc}_{B(x_i,r_i)}\varphi)^n)\le\widetilde{C}\Big(\delta+\sum_i|B(x_i,r_i)|\Big)\le 2\widetilde{C}\delta.\end{aligned}$$

Отсюда следует $\mathscr{N}$-свойство отображения $F_{j,\varphi}$.

Замечание 4. Условие почти абсолютной непрерывности используется в работе один раз: в конце доказательства теоремы 6 для проверки того, что *если непрерывное отображение $f:G\to\mathbb{R}^n$, $f=(f_1,\dots,f_i,\dots,f_n)$, подходящего класса обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, то отображение $f=(f_1,\dots,\varphi f_i,\dots,f_n)$ также обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина для любой функции $\varphi\in C_0^\infty(G)$.* Естественно, что условие почти абсолютной непрерывности можно заменить любым другим, при соблюдении которого остается справедливым отмеченный вывод.

В следующем утверждении показано, как из полученных результатов прийти к соотношению (13) в исследованной ситуации.

Следствие 5 [1, 11, 12, 21]. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$, удовлетворяющее условиям $M2$ и $M4$. Тогда соотношение* (13) *справедливо для произвольного C^1-гладкого векторного поля V.*

Доказательство. Заметим, что в условиях следствия отображение f монотонно и непрерывно в силу [2], обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, см. [13, 22], и для него справедливо свойство из замечания 4, доказываемое с помощью оценки для монотонной функции, приведенной в доказательстве предложения 1. Так как $J(x, f) \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, то выполнены все требования для реализации доказательства теоремы 6 в этой ситуации.

Лемма 9 [8, теорема 3.2]. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — непостоянное отображение класса $\mathscr{A}_{q,s}(G)$, где $q \geq n-1$, $s \geq \frac{n}{n-1}$. Тогда соотношение* (13) *справедливо для произвольного C^1-гладкого векторного поля V с ограниченной производной.*

Следствие 6. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — непостоянное отображение класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, удовлетворяющее условиям $M1$–$M6a$. Тогда соотношение* (13) *справедливо для произвольного C^1-гладкого векторного поля V.*

Следствие 7. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, удовлетворяющее условию $M4$, где $q \geq n-1$ при $n = 2$ и $q > n-1$ при $n \geq 3$, и якобиан $J(x, f)$ локально суммируем на открытом множестве $W = G \cap f^{-1}(\Omega)$. Пусть еще $V : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — векторное поле $V = (v_1, \dots, v_n)$ класса $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такое, что $\operatorname{div} V = 0$ в слабом смысле на Ω. Если отображение f почти абсолютно непрерывно, то*

$$\operatorname{div}((\operatorname{adj} Df(x))V \circ f) = 0$$

в смысле теории распределений на открытом множестве W.

Доказательство. Фиксируем функцию $\varphi \in C_0^\infty(W)$. Пусть $V_\varepsilon = (M_\varepsilon v_1, \dots, M_\varepsilon v_n)$, где M_ε — оператор усреднения Соболева на Ω с параметром $\varepsilon < \operatorname{dist}(f(\operatorname{supp}\varphi), \partial\Omega)$. Тогда $\operatorname{div} V_\varepsilon = 0$ в обычном смысле и к полю V_ε применима теорема 6. Таким образом,

$$\int\limits_W \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}(M_\varepsilon v_j) \circ f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = 0.$$

Так как отображение обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, то $J(x, f) = 0$ почти всюду на прообразе $f^{-1}(Z)$ множества Z нулевой меры. Поэтому на этом же прообразе и $A_{ij}(x) = 0$ почти всюду. Рассмотрим произвольную последовательность V_{ε_n}, сходящуюся к V всюду на $f(\operatorname{supp}\varphi)$ за исключением множества Z нулевой меры. Тогда всюду вне $f^{-1}(Z)$ $M_\varepsilon v_j \circ f$ сходится к ограниченной на $\operatorname{supp}\varphi$ функции $v_j \circ f$. Таким образом, по теореме Лебега возможен предельный переход в интеграле, и следствие доказано.

Замечание 5. Формула (13) на языке внешних дифференциальных форм представляет собой равенство $df^*\omega = f^*d\omega$ в слабом смысле для формы ω степени $n-1$, коэффициенты которой принадлежат соответствующему классу. Таким образом, в теореме 6, лемме 9 и следствиях 5–7 приводятся условия на отображение и коэффициенты формы, гарантирующие перестановочность операции внешнего дифференцирования и переноса (см. для сравнения [1]).

Определим матрицу

$$G(x) = \begin{cases} J(x,f)^{\frac{2}{n}}(Df(x)^T Df(x))^{-1}, & \text{если } J(x,f) > 0, \\ \mathrm{Id} & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{17}$$

Матрица $G(x)$ симметрична, имеет определитель, равный единице, и является характеристикой локального отклонения отображения f от конформного. Из определения искажения имеем следующие оценки:

$$\frac{1}{C_n(K(x))^{\frac{2}{n}}}|\xi|^2 \le \langle G(x)\xi, \xi\rangle \le C_n K^{2-\frac{2}{n}}(x)|\xi|^2, \tag{18}$$

где C_n — постоянная, зависящая только от размерности n.

Пусть v — действительнозначная гладкая функция, определенная на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим $u = v \circ f$. По правилу дифференцирования суперпозиции (лемма 3) имеем $\nabla u(x) = Df(x)^T(\nabla v)(f(x))$. Связь между отображением с ограниченным искажением и экстремалями интеграла Дирихле, установленная Ю. Г. Решетняком [1], представляет собой следствие формулы

$$\langle G(x)\nabla u(x), \nabla u(x)\rangle^{\frac{n-2}{2}} G(x)\nabla u(x) = \mathrm{adj}\ Df(x)|\nabla v(f(x))|^{n-2}\nabla v(f(x)). \tag{19}$$

Из (13) и (19) вытекает, что если функция $v \in C^1(\Omega)$ является n-гармонической, т. е. решением уравнения $\mathrm{div}(|\nabla v(x)|^{n-2}\nabla v(x)) = 0$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то u — слабое решение уравнения

$$\mathrm{div}(A(x, \nabla u)) = 0 \tag{20}$$

на $f^{-1}(\Omega) \cap G$, где отображение $A(x,\xi) = \langle G(x)\xi, \xi\rangle^{\frac{n-2}{2}} G(x)\xi$ удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{C_n K(x)}|\xi|^n \le A(x,\xi)\cdot\xi \le C_n K^{n-1}(x)|\xi|^n,$$

проверяемым с помощью (17) и (18).

Случай $K(x) \in L_\infty(G)$ соответствует отображению с ограниченным искажением. Уравнение (20) является в этом случае квазилинейным уравнением эллиптического типа, и свойства регулярности его решений хорошо известны (см., например, [11]). В частности, решения этого уравнения удовлетворяют слабому неравенству Гарнака, из которого вытекает строгий принцип максимума для координатных функций.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, — непостоянное отображение класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(G)$, для которого выполнены условия $M2$–$M6$ и $K(x) \in L_{p,\mathrm{loc}}$ для некоторого $n-1 \le p \le \infty$ при $n = 2$ и $n-1 < p \le \infty$ при $n \ge 3$. Тогда по лемме 3 $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(G)$, где $q = \frac{np}{p+1}$, по теореме 3 отображение f монотонно (и, следовательно, локально ограничено), а по теореме 4 сохраняет ориентацию и почти всюду дифференцируемо. Теорема будет доказана, если мы установим, что прообраз $f^{-1}(y)$ вполне несвязен для любой точки $y \in \mathbb{R}^n$. Так как все рассмотрения носят, по сути, локальный характер, без потери общности можно предполагать, что непостоянное отображение f определено на компактной области $D \Subset G$, $y = 0 \in f(D)$ и $f(D) \subset B(0, e^{-e}) = \Omega'$. Для того чтобы доказать, что прообраз $f^{-1}(0)$ вполне несвязен, достаточно проверить справедливость оценки

$$\int\limits_{D'} \left|\nabla \ln\ln \frac{1}{|f(x)|}\right|^s dx < \infty \tag{21}$$

для произвольной компактной области $D' \Subset D$, где $n-1 < s \le q \le n$ при $1 < q$ и $s = 1$ при $q = 1$, $n = 2$. Действительно, функция $u = \ln\ln\frac{1}{|f(x)|}$ полунепрерывна снизу в области D, $u|_{f^{-1}(0)} \equiv \infty$, поэтому в силу леммы 5 $\operatorname{cap}_s(f^{-1}(0)) = 0$. Отсюда получаем вполне несвязность прообраза $f^{-1}(0)$. Чтобы доказать (21), мы используем специальную аппроксимацию $\ln\frac{1}{|y|}$, полученную в [10].

Лемма 10 [10]. *Для каждого* $0 < a < e^{-e}$ *функция* $\Phi_a : \Omega' \to \mathbb{R}$, *определенная формулами*

$$\Phi_a(y) = \begin{cases} \log\frac{1}{|y|}, & \text{если } r = |y| > a, \\ \log\frac{1}{a} - (\frac{|y|-a}{a}) + \frac{(|y|-a)^2}{2a^2}, & \text{если } \frac{a}{2} < |y| < a, \\ \log\frac{1}{a} + \log 2 + \frac{1}{2} + (5 - 12\log 2)\frac{|y|^2}{a^2} & \\ +4(-7 + 12\log 2)\frac{|y|^4}{a^4} + 8(5 - 8\log 2)\frac{|y|^6}{a^6}, & \text{если } |y| < \frac{a}{2}, \end{cases}$$

обладает следующими свойствами:

(i) $\Phi_a \in C^2(\Omega')$,

(ii) $\Phi_a(y) \ge e$ *для каждого* $y \in \Omega'$,

(iii) Φ_a *радиальная,*

(iv) $\Phi'_a(r) = \Phi'_a(|y|) \le 0$,

(v) Φ_a *является* n*-супергармонической,*

(vi) $\log\frac{1}{a} \le \Phi_a(y) \le \log\frac{1}{a} + \frac{1}{2} + \log 2$ *для каждого* $|y| \le a$,

(vii) $\Phi_a(y) = \log\frac{1}{|y|}$ *для* $a \le |y| < e^{-e}$,

(viii) $|\nabla\Phi_a(y)|^{n-2}\nabla\Phi_a(y) \in C^1(\Omega')$.

Чтобы доказать (21), фиксируем произвольную неотрицательную функцию $\eta \in C_0^\infty(D)$, $\eta \ge 0$, и функцию Φ_a, $0 < a < e^{-e}$, из леммы 9. Неравенство (21) может быть получено предельным переходом при $a \to \infty$ из оценки

$$\int\limits_D |\nabla(\ln(\Phi_a \circ f))(x)|^s \eta^s(x)\,dx \le C_n\Bigl(\int\limits_D |\nabla\eta(x)|^n K^{n-1}(x)\,dx\Bigr)^{\frac{s}{n}}\Bigl(\int\limits_D K^{\frac{s}{n-s}}(x)\,dx\Bigr)^{\frac{n-s}{n}} \qquad (22)$$

для некоторого $1 \le s \le 2$ при $n = 2$ и $n-1 < s \le n$ при $n > 2$ такого, что $\frac{s}{n-s} \le p$. Применяя к левой части (22) неравенство Гёльдера, имеем

$$\int\limits_D |\nabla(\ln(\Phi_a \circ f))(x)|^s \eta^s(x)\,dx = \int\limits_D |\nabla(\ln(\Phi_a \circ f))(x)|^s \eta^s(x) K(x)^{\frac{s}{n}}\frac{dx}{K(x)^{\frac{s}{n}}}$$
$$\le \Bigl(\int\limits_D |\nabla(\ln(\Phi_a \circ F))(x)|^n \eta^n(x)\frac{dx}{K(x)}\Bigr)^{\frac{s}{n}}\Bigl(\int\limits_D K^{\frac{s}{n-s}}(x)\,dx\Bigr)^{\frac{n-s}{n}}.$$

Неравенство (22) будет доказано, если мы установим оценку

$$\int\limits_D |\nabla(\ln\Phi \circ f)(x)|^n \eta^n(x)\frac{dx}{K(x)} \le C_n\int\limits_D |\nabla\eta(x)|^n K^{n-1}(x)\,dx, \qquad (23)$$

в которую вместо Φ следует подставить функцию Φ_a.

Замечание 6. Для отображений класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ оценки (22) и (23) (см. ниже) доказаны в [10]. Авторы работы [10] рассматривают (13) как дифференциальное уравнение и подставляют в (14) вместо φ тестовую функцию вида $\eta\Phi^m\circ f$. Действовать подобным образом в условиях теоремы 1 не представляется возможным, поскольку мы не можем гарантировать сходимость интегралов в (14). Наш метод базируется на дальнейшем использовании лемм 8, 9 и вычислении (15). Неравенство (23) типа слабого неравенства Гарнака, доказательство которого приводится ниже, представляет независимый интерес, и условия, при которых оно может быть получено, сформулированы в следующем утверждении.

Лемма 11. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть функция* $\Phi\in C^2(\Omega')$ *обладает следующими свойствами:* $\Phi\geq\delta>0$, Φ *n-супергармоническая и векторное поле* $|\nabla\Phi(y)|^{n-2}\nabla\Phi(y)\in C^1(\Omega')$ *имеет ограниченную производную. Тогда соотношение* (23) *выполняется для любой функции* $\eta\in C_0^\infty(D)$, $\eta\geq 0$, *где* $D=f^{-1}(\Omega')\subset G$.

Доказательство. Фиксируем функцию $\eta\in C_0^\infty(D)$, $\eta\geq 0$, и функцию $\Phi\in C^2(\Omega')$, обладающую следующим свойствами: $\Phi\geq\delta>0$, Φ n-супергармоническая и векторное поле $|\nabla\Phi(y)|^{n-2}\nabla\Phi(y)\in C^1(\Omega')$ имеет ограниченную производную.

Подставим в (15) тестовую финитную функцию $\varphi(x)=\nu^n\Phi^{1-n}(f(x))$. Используя лемму 3, найдем ее градиент

$$\nabla\varphi(x)=n\eta^{n-1}(x)\Phi^{1-n}(f(x))\nabla\eta(x)-(n-1)\eta^n(x)\Phi^{-n}(f(x))(Df(x))^T\nabla\Phi(f(x))$$

и подставим его в (15), предполагая пока, что V — произвольное C^1-гладкое векторное поле. Имеем

$$\begin{aligned}&-(n-1)\langle\operatorname{adj}Df(x)V(f(x)),(Df(x))^T\nabla\Phi(f(x))\rangle\eta^n(x)\Phi^{-n}(f(x))\\&\qquad\qquad+n\langle\operatorname{adj}Df(x)(V(f(x))),\nabla\eta(x)\rangle\eta^{n-1}(x)\Phi^{1-n}(f(x))\\&=\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_j(f(x))\nu^n\Phi^{1-n}(f(x)))-\operatorname{div}V(f(x))\eta^n(x)\Phi^{1-n}(f(x))J(x,f)\,dx.\end{aligned}$$

Так как $Df(x)\operatorname{adj}Df(x)=J(x,f)\operatorname{Id}$, то, преобразуя первое слагаемое в левой части этого равенства, получаем

$$\begin{aligned}&(n-1)\langle V(f(x)),\nabla\Phi(f(x))\rangle\eta^n(x)\Phi^{-n}(f(x))J(x,f)\\&\qquad\qquad-n\langle\operatorname{adj}Df(x)(V(f(x))),\nabla\eta(x)\rangle\eta^{n-1}(x)\Phi^{1-n}(f(x))\\&\quad=-\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_j(f(x))\nu^n\Phi^{1-n}(f(x)))+\operatorname{div}V(f(x))\eta^n(x)\Phi^{1-n}(f(x))J(x,f).\end{aligned}\tag{24}$$

Рассмотрим поле V_j, все компоненты которого, кроме j-й, равны нулю, а компонента v_j есть j-я компонента векторного поля $|\nabla\Phi(y)|^{n-2}\nabla\Phi(y)$. Тогда легко видеть, что оба слагаемые в левой части (24) и второе слагаемое в правой части (24) — суммируемые функции. Поэтому является суммируемой и функция $\sum\limits_{i=1}^n A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_j(f(x))\nu^n\Phi^{1-n}(f(x)))$. Заметим, что как функция $v_j\circ f$, так и функции $\Phi^{1-n}\circ f$ принадлежат $W^1_{q,\mathrm{loc}}$ и, кроме того, дифференцируемы почти всюду (как суперпозиция гладкой функции и почти всюду дифференцируемого отображения). Тем самым произведение $v_j(f(x)\nu^n\Phi^{1-n}(f(x))$ также дифференцируемо почти всюду в области D (см. замечание 2). Кроме того, отображение

$$x \mapsto (f_1(x), \dots, f_{j-1}(x), \nu^n(x)((v_j\Phi^{1-n}) \circ f)(x), f_{j+1}(x), \dots, f_n(x))$$

$\mathscr{K}^*$-дифференцируемо и обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина в предположении $M6$a (см. окончание доказательства теоремы 8). Таким образом, выполнены условия следствия 6. Значит,

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^n A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(v_j(f(x))\nu^n\Phi^{1-n}(f(x)))\,dx = 0.$$

Если же выполнены предположения $M6$b, то равенство нулю этого интеграла вытекает из леммы 9. В самом деле, положим в лемме 9 векторное поле V равным $(0, \dots, 0, v_j\Phi^{1-n}, 0, \dots, 0)$ (ненулевая компонента стоит на j-м месте). Для этого векторного поля справедлива формула (13). Если в (14) вместо тестовой функции φ поставить функцию ν^n, то из вычисления (15) и формулы (13) получаем равенство нулю исследуемого интеграла.

Поскольку в качестве j можно взять произвольное значение от 1 до n, то

$$\begin{aligned}(n-1)\int\limits_D \langle V(f(x)), \nabla\Phi(f(x))\rangle \eta^n(x)\Phi^{-n}(f(x))J(x,f)\,dx \\ - n\int\limits_D \langle \operatorname{adj} Df(x)(V(f(x))), \nabla\eta(x)\rangle \eta^{n-1}(x)\Phi^{1-n}(f(x))\,dx \\ = \int\limits_D \operatorname{div} V(f(x))\eta^n(x)\Phi^{1-n}(f(x))J(x,f)\,dx.\end{aligned} \tag{25}$$

Так как функция Φ n-супергармоническая, то $\operatorname{div}|\nabla\Phi(y)|^{n-2}\nabla\Phi(y) \le 0$. Полагая $V = |\nabla\Phi(y)|^{n-2}\nabla\Phi(y)$, из (25) имеем неравенство

$$\begin{aligned}\int\limits_D \frac{|\nabla\Phi(f(x))|^n}{\Phi^n(f(x))}\eta^n(x)J(x,f)\,dx \\ \le \frac{n}{n-1}\int\limits_D |\operatorname{adj} Df(x)|\frac{|\nabla\Phi(f(x))|^{n-1}}{\Phi^{n-1}(f(x))}|\nabla\eta(x)|\eta^{n-1}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Используя оценку $|\operatorname{adj} Df(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le c_n|Df(x)|^n = c_nK(x)J(x,f)$ с некоторой постоянной c_n, зависящей только от n, после применения неравенства Гёльдера к правой части последнего неравенства получаем

$$\int\limits_D \frac{|\nabla\Phi(f(x))|^n}{\Phi^n(f(x))}\eta^n(x)J(x,f)\,dx \le C_n\int\limits_D |\nabla\eta(x)|^n K^{n-1}(x)\,dx.$$

Чтобы, наконец, вывести неравенство (23), достаточно принять во внимание соотношения $J(x,f) = \frac{|Df(x)|^n}{K(x)}$ и $|\nabla(\Phi \circ f)(x)| \le |Df(x)||\nabla\Phi(f(x))|$. Лемма 11 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

2. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 3. С. 515–531.
3. *Manfredi J.* Weakly monotone functions // J. Geom. Anal. 1994. V. 4. P. 393–402.
4. *Ball J. M.* Convexity condition and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1976. V. 63. P. 337–403.
5. *Ball J. M.* Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1981. V. 88. P. 315–328.
6. *Sverák V.* Regularity properties of deformations with finite energy // Arch. Rational Mech. Anal. 1988. V. 100. P. 105–127.
7. *Iwaniec T., Šverák V.* On mappings with ibtegrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118. P. 181–188.
8. *Müller S., Tang Qi., Yan B. S.* On a new class of of elastic deformations not allowing for cavitation // Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. non linéaire. 1994. V. 11, N 2. P. 217–243.
9. *Heinonen J., Koskela P.* Sobolev mappings with integrable dilatation // Arch. Rational Mech. Anal. 1993. V. 125. P. 81–97.
10. *Manfredi J., Villamor E.* Mappings with integrable dilatation in higher dimensions // Bull. Amer. Math. Soc. 1995. V. 32, N 2. P. 235–240.
11. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonliner potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford etc.: Clarendon Press, 1993.
12. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin a. o.: Springer-Verl., 1993.
13. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформые отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
14. *Haj_lasz P.* Change of variables formula under the minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64, N 1. P. 93–101.
15. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 629–658.
16. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 70–89.
17. *Titus C. J., Young G. S.* The extension of interiority with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103. P. 329–340.
18. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
19. *Chernikov V. M., Vodop'yanov S. K.* Sobolev spaces and hypoelliptic equations. I, II // Siberian Adv. Math. 1996. V. 6, N 3, 4. P. 27–67; 64–96.
20. *Väsälä J.* Minimal mappings in Euclidean spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1965. V. 366. P. 3–32.
21. *Bojarski B., Iwaniec T.* Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbb{R}^n$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1983. V. 8. P. 257–324.
22. *Martio O., Malý J.* Lusin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$ // J. Reine Angew. Math. 1995. V. 485. P. 19–36.

Статья поступила 31 апреля 1998 г.

г. Новосибирск