Surveys in Mathematics and its Applications

ISSN 1842-6298 (electronic), 1843-7265 (print)
Volume **5** (2010), 151 – 190

THÉORIE SPECTRALE ET PROBLÈMES NON-LINÉAIRES

Ahmed Lesfari

Abstract. We present a Lie algebra theoretical schema leading to integrable systems, based on the Kostant-Kirillov coadjoint action. Many problems on Kostant-Kirillov coadjoint orbits in subalgebras of infinite dimensional Lie algebras (Kac-Moody Lie algebras) yield large classes of extended Lax pairs. A general statement leading to such situations is given by the Adler-Kostant-Symes theorem and the van Moerbeke-Mumford linearization method provides an algebraic map from the complex invariant manifolds of these systems to the Jacobi variety (or some subabelian variety of it) of the spectral curve. The complex flows generated by the constants of the motion are straight line motions on these varieties. We study the isospectral deformation of periodic Jacobi matrices and general difference operators from an algebraic geometrical point of view and their relation with the Kac-Moody extension of some algebras. We will present in detail the Griffith's aproach and his cohomological interpretation of linearization test for solving integrable systems without reference to Kac-Moody algebras. We will discuss several examples of integrable systems of relevance in mathematical physics.

Introduction générale

Le but de ce travail est de présenter la théorie spectrale en lien avec les systèmes dynamiques non-linéaires intégrables. La solution de ces problèmes non-linéaires par quadratures est généralement impossible et une solution numérique ne montre pas leurs propriétés qualitatives. Cependant, jusqu'à récemment, mathématiciens et physiciens durent se contenter, soit d'approximations linéaires, soit de théorèmes d'existence de solutions. La découverte ces dernières années de classes importantes de systèmes intégrables montra combien de phénomènes importants furent manqués lors de l'étude de ces équations par des méthodes linéaires. En fait depuis longtemps, on avait utilisé dans tous les domaines les concepts de linéarisation et de superposition des modes. Les non-linéarités n'étaient traitées que comme des petites perturbations. Elles sont dorénavant examinés dans leur intégralité. Les premières études furent

2010 Mathematics Subject Classification: 58C40, 70H06, 14H70, 17B80, 14H40.58C40, 70H06, 14H70, 17B80, 14H40.

Keywords: spectral theory; integrable systems; Lie algebras; Jacobians; Prym varieties.

motivées par des problèmes de physique des plasmas, par la dynamique des fluides ou des chaînes. L'exemple le plus célèbre est l'équation de Korteweg-de-Vries (K-dV) [27] qui décrit la propagation des ondes dans un canal infini peu profond :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u(x,0) = u(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où $u(x,t)$ est l'amplitude de l'onde au point x et au temps t. Cette équation est caractérisée par un terme tendant à disperser l'onde et un autre terme non-linéaire, tendant à concentrer l'onde. Un milieu dans lequel ces deux efforts se compensent sera propice à l'existence d'ondes solitaires ou solitons. Ce sont des ondes de formes définies progressant à des vitesses différentes et dont le profil est stable au cours de la propagation, par suite de cette compétition entre l'effet dispersif et l'effet non-linéaire. En outre, ces ondes correspondent aux niveaux d'énergie de l'équation stationnaire de Schrödinger, ce qui a permis d'utiliser une analogie avec la mécanique quantique. La découverte de ce lien influença de nombreux domaines, des mathématiques à la technologie en passant par la physique et la biologie. Gardner, Greene, Kruskal et Miura [18] ont montré que le spectre discret de l'opérateur

$$L \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t),$$

est invariant dans le temps lorsque le potentiel $u(x,t)$ évolue selon l'équation de K-dV. De là, l'idée est venue que l'équation de K-dV peut être considérée comme une déformation isospectrale de l'opérateur L (paire de Lax [30]). Dès lors le spectre discret (états liés) fournit des constantes du mouvement de l'équation de K-dV. Faddev et Zaharov [55] ont montré que que cette équation forme un champ de vecteurs hamiltonien pour une structure symplectique bien choisie et les états liés sont en involution vis à vis de cette structure symplectique. Finalement, l'équation de K-dV peut être intégrée par la méthode spectrale inverse pour l'opérateur L. L'étape suivante était l'étude du problème périodique pour l'équation de K-dV qui a permis à Dubrovin, Its, Krichever, Matveev, McKean, Novikov, Trubowitz et van Moerbeke [14, 15, 24, 29, 38, 39] et d'autres [1, 2] de découvrir une intéressante classe de systèmes complètement intégrables. La résolution de l'équation de K-dV périodique en termes d'un mouvement uniforme rectiligne sur un tore complexe algébrique (jacobienne) naturellement associé à une courbe hyperelliptique, montre que non seulement l'équation de K-dV est un flot rectiligne sur des tores réels (théorème d'Arnold-Liouville [6, 8, 34]) mais aussi que ces tores peuvent s'étendre à des tores complexes de telle sorte que si le temps $t \in \mathbb{R}$ est remplacé par $t \in \mathbb{C}$, le système évolue également selon un mouvement uniforme et rectiligne sur ce tore complexe.

Entretemps, le sujet a évolué vers des thèmes liés aux algèbres de Lie et à la géométrie algébrique, en vue de répondre aux problèmes fondamentaux concernant la nature des équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles complètement intégrables. En particulier un nombre considérable de ces équations est entré dans le cadre de la mécanique hamiltonienne et possèdent plusieurs, voir même une infinité, de lois de conservation, en plus de la conservation de l'énergie et du moment. Ces lois résultent parfois de symétries apparentes au niveau de l'espace géométrique des configurations, parfois de symétries cachées au sein de l'espace des phases. On sait actuellement que ces symétries cachées, plus difficiles à saisir, se traduisent naturellement en termes de la théorie des groupes de Lie, qui systématise par excellence l'étude des symétries et qui établit le lien avec la théorie spectrale. A leur tour, ces groupes de Lie donnent lieu à des courbes algébriques ou surfaces de Riemann, d'où résultent des tores, ce qui nous conduit au coeur même de la géométrie algébrique. Ces tores jouent un rôle prépondérant car les trajectoires des systèmes intégrables, peuvent être considérées comme étant enroulées sur ces tores. La solution de ces problèmes de mécanique a donné lieu à un foisonnement d'idées et de liens entre les domaines apparemment les plus distants, comme la théorie spectrale, la géométrie algébrique et la théorie des groupes de Lie. En retour, cette synthèse alimenta chacun de ces domaines en idées nouvelles. Quinconque a participé aux rencontres scientifiques de ces dernières années, où expérimentateurs, géomètres et algébristes se sont côtoyés, aura été frappé par l'énorme diversité de sujets. Actuellement, les applications de la théorie des systèmes complètement intégrables sont nombreuses, notamment en physique des particules, en dynamique des plasmas et des fluides, en mécanique statistique, en biologie de fibres,...Mais aussi la théorie des solitons a eu un impact sur les mathématiques pures; par exemple, il fournit la réponse au fameux problème de Schottky, posé il y a un siècle, sur les relations entre les périodes provenant d'une surface de Riemann. Grosso modo, il s'agit de trouver des critères pour qu'une matrice des périodes appartenant au demi-espace de Siegel soit la matrice des périodes d'une surface de Riemann. Géométriquement, le problème de Schottky consiste à caractériser les jacobiennes parmi toutes les variétés abéliennes principalement polarisées.

Dans ce travail, on aborde la théorie des déformations isospectrales (paires de Lax) c'est-à-dire laissant invariant le spectre d'opérateurs linéaires contenant une indéterminée rationnelle. Vu l'importance du sujet, de nombreux articles et ouvrages lui ont été consacrés (voir bibliographie). C'est une méthode puissante, mais difficile, permettant d'obtenir des résultats précis sur l'intégrabilité des systèmes dynamiques. Elle donne un moyen de déterminer les intégrales premières du système différentiel et aussi (d'après une méthode de van Moerbeke-Mumford [53]) le résoudre. Aussi, un lien avec la théorie des groupes et algèbres de Lie a été fait. Cette approche est basée sur le théorème d'Adler-Kostant-Symes [3, 28, 50] qui donne une construction de grandes familles de fonctions basée sur des décompositions d'algèbres de Lie et fournit des systèmes intégrables comme déformations isospectrales sur des orbites coadjointes dans des algèbres de Kac-Moody (extensions formelles de dimensions infinies d'algèbres de Lie semi-simples). Des résultats précis ont été obtenus pour une classe intéressante d'orbites que ce soit dans le cas d'algèbres de Lie de dimension finie ou infinie. On montre sur quelques exemples l'utilité des résultats obtenus; on étudie le flot géodésique sur le groupe $SO(n)$ (voir par exemple [4, 5, 22, 31, 33, 36, 37, 40]), le flot géodésique sur un ellipsoide (voir par exemple [4, 5, 25, 26, 41, 42]) et le problème de C. Neumann (voir par exemple [4, 5, 41, 42, 45]). Aussi, nous présentons une étude approfondie sur le spectre des matrices de Jacobi et les opérateurs aux différences [53], à la fois pour leurs intérêts propres et parce que celà conduit à clarifier un certain nombre de résultats ultérieurs. On aborde ensuite en détail la méthode de Griffiths [21], sur l'interprétation cohomologique du critère de linéarisation. Il a trouvé des conditions nécessaires et suffisantes, de nature cohomologique, sans référence aux algèbres de Kac-Moody pour que le flot puisse être linéarisé. Sa méthode se base sur l'observation que l'espace tangent aux déformations se trouve toujours dans des espaces de cohomologie bien choisis. On applique cette méthode à l'étude des équations de Nahm [21, 23, 44] et au réseau de Toda [17, 21, 51]. Les équations de Nahm considérées ici portent sur trois fonctions à valeurs dans l'algèbre $u(n)$ formée des matrices antihermitiennes complexes d'ordre n. Ces équations interviennent lors de l'étude de monopoles. On montre que la courbe spectrale $\mathcal{C}$ (dans l'espace des twisteurs $\mathcal{T}\mathbb{P}^1$) associée à ces équations est une courbe lisse de genre $(n-1)^2$ et que le flot en question se linéarise sur la variété jacobienne de $\mathcal{C}$. Le réseau de Toda (version discrète de l'équation de Korteweg-de-Vries) décrit un système de N masses vibrantes reliées entre elles par des ressorts dont la force de rappel est exponentielle. On étudie le cas non périodique, i.e., les masses sont disposées sur une droite et le cas périodique, i.e., les masses reliées sont disposées sur un cercle. Pour le premier cas, on utilise la transformation de Flaschka [17] et on montre que le spectre d'une matrice tridiagonale A liée au problème demeure constant sur toute la trajectoire et que le réseau de Toda peut-être considéré comme une déformation isospectrale de la matrice A^k, $1 \leq k \leq N$, dont le spectre fournit N intégrales premières indépendantes et en involution. On en déduit que le réseau de Toda est un système complètement intégrable. En ce qui concerne le second cas, le spectre de la matrice de Jacobi périodique liée au problème reste invariant dans le temps et on montre que le flot en question se linéarise sur la variété jacobienne d'une courbe de genre $N-1$. Comme autres exemples d'application de la méthode de la courbe spectrale ou déformation isospectrale, on étudie le corps solide d'Euler et le flot géodésique sur $SO(4)$ [4, 5, 22, 31, 33, 36, 37, 40], un potentiel quartique lié au système de Garnier [19, 47, 54], les équations aux dérivées partielles couplées non-linéaires de Schrödinger [11, 36] ainsi que le champ de Yang-Mills [35, 36]. Pour le mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe dans le cas particulier d'Euler, on montre que les équations du mouvement s'intégrent au moyen de fonctions elliptiques. Le flot géodésique sur le groupe $SO(4)$ est un flot hamiltonien pour la structure symplectique de Kostant-Kirillov induite sur l'orbite formé par l'action coadjointe du groupe $SO(4)$ sur le dual de l'algèbre de Lie $so(4)^* \approx so(4)$. Sous la condition de Manakov [37], les équations d'Euler-Arnold définissant ce problème se linéarisent sur la variété Prym $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$ où Γ est une surface de

Riemann de genre trois et Γ_0 une courbe elliptique. Pour le système hamiltonien correspondant à un potentiel quartique (système de Garnier), on montre que celui-ci admet une autre intégrale première quartique qui détermine avec l'hamiltonien du problème, un système intégrable. On détermine explicitement cette intégrale première et on montre que la linéarisation s'effectue sur la jacobienne d'une courbe hyperelliptique de genre deux. En utilisant la théorie des lacunes [10], on exprime les solutions du problème en termes de fonctions elliptiques. On utilise à cette fin, la fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass, la fonction elliptique de Backer-Akhiezer ainsi que quelques propriétés de l'équation de Korteweg-de-Vries. On termine la section par des informations concernant les équations couplées non-linéaires de Schrödinger, le champ de Yang-Mills avec groupe de jauge $SU(2)$.

Je remercie le referee pour ses remarques et commentaires éclairants.

1 Equation de Lax, théorème d'Adler-Kostant-Symes, théorème de van Moerbeke-Mumford et linéarisation

Considérons le système hamiltonien

$$\dot{x}(t) = J\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (\cdot = \frac{d}{dt}).$$

où $H : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction de classe $\mathbb{C}^\infty$ (l'hamiltonien) et $J = J(x)$ une matrice antisymétrique à éléments satisfaisant à l'identité de Jacobi:

$$\{\{H, F\}, G\} + \{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} = 0,$$

où

$$\{H, F\} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}, J\frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle = \sum_{i,j} J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j},$$

sont les crochets de Poisson.

Définition 1. *On dit que le système hamiltonien ci-dessus est complètement intégrable lorsque :* ***i)*** *si dét $J \neq 0$, alors $m = 2n$ (le rang d'une matrice antisymétrique est toujours pair). Le système possède n intégrales premières $H_1 = H, H_2, ..., H_n$, en involution (i.e., $\{H_i, H_j\} = 0$, $1 \leq i, j \leq n$) et fonctionnellement indépendantes (i.e., $dH_1 \wedge \ldots \wedge dH_n \neq 0$). D'après le théorème d'Arnold-Liouville [6, 8, 34], si pour presque tous les $c_i \in \mathbb{R}$ les variétés invariantes*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left\{x \in \mathbb{R}^{2n} : H_i(x) = c_i\right\},$$

sont compactes et connexes, alors elles sont difféomorphes au tore réel $\mathbb{R}^n$/réseau. En outre, les flots définis par les champs de vecteurs $X_{H_i}, 1 \leq i \leq n$, sont des *mouvements rectilignes. Ces flots déterminent sur ce tore un mouvement quasi-périodique et les équations du problème sont intégrables par quadratures c'est-à-dire les solutions exactes s'expriment par un nombre fini de calculs d'intégrales et d'autres opérations algébriques.* ***ii)*** *si dét $J = 0$, on réduit dans ce cas le problème à $m = 2n + k$ et on cherche k intégrales premières $H_{n+1}, ..., H_{n+k}$, dites triviales ou fonctions de Casimir telles que:*

$$J \frac{\partial H_{n+i}}{\partial x} = 0, 1 \leq i \leq k.$$

Puis ce qui a été dit dans i) s'applique ici pour la variété

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} \left\{ x : H_{n+i}(x) = c_{n+i} \right\} \right) \cap \mathbb{R}^m,$$

de dimension $m - k = 2n$. Si les mêmes conditions sont remplies, alors les variétés

$$\bigcap_{i=1}^{n+k} \left\{ x \in \mathbb{R}^m : H_i(x) = c_i \right\},$$

sont difféomorphes au tore réel de dimension n.

Dans ce travail, on va travailler avec des complexes (au lieu de réels).

Définition 2. *Une équation de Lax est une équation différentielle de la forme*

$$\dot{A}(h) = [A(h), B(h)], \quad (\dot{} = \frac{d}{dt}). \tag{1.1}$$

avec $A(h) = \sum_{k=1}^{N} A_k h^k$, $B(h) = \sum_{k=1}^{N} B_k h^k$, des fonctions dépendant d'un paramètre complexe h (paramètre spectrale) et où les A_k et B_k sont des matrices. Le couple (A, B) s'appelle paire de Lax. La courbe algébrique complexe projective $\mathcal{C}$, d'équation affine

$$P(h, z) \equiv \det (A - zI) = 0, \tag{1.2}$$

(où z est une autre variable et I la matrice unité d'ordre n), est appelée courbe spectrale. Un point (h, z) de la courbe $\mathcal{C}$ décrit une valeur propre z de la matrice A.

Il existe des équations de Lax sans paramètre. Par contre, celles qui seront considérées dans cet article dépendent souvent d'un paramètre h et lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, on omettra de ne pas les mentionner explicitement dans les lettres A et B.

Proposition 3. *Le polynôme caractéristique (1.2) ne dépend pas de t. En outre, pour tout $n \geq 0$, la fonction trA^n est une intégrale première.*

Démonstration. Posons $L \equiv A - zI$. D'où

$$\dot{P} = \dot{\det} L = detL.tr(L^{-1}\dot{L}) = detL.tr(L^{-1}BL - B) = 0,$$

car $trL^{-1}BL = trB$. On a

$$\begin{aligned}
\dot{A^n} &= \dot{A}A^{n-1} + A\dot{A}A^{n-2} + \cdots + A^{n-1}\dot{A}, \\
&= [A,B]\,A^{n-1} + A\,[A,B]\,A^{n-2} + \cdots + A^{n-1}\,[A,B]\,, \\
&= (AB - BA)\,A^{n-1} + \cdots + A^{n-1}\,(AB - BA)\,, \\
&= ABA^{n-1} - BA^n + \cdots + A^nB - A^{n-1}BA, \\
&= A\left(BA^{n-1}\right) - \left(BA^{n-1}\right)A + \cdots + A\left(A^{n-1}B\right) - \left(A^{n-1}B\right)A.
\end{aligned}$$

Or pour $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $tr\,(X+Y) = trX + trY$, $trXY = trYX$, donc $\dot{\overbrace{trA^n}} = tr\dot{A^n} = 0$, et par conséquent trA^n sont des intégrales premières. $\square$

Nous avons montré ci-dessus, que le spectre de A est un invariant (ne dépend pas de t) de la trajectoire de A sous le flot (1.1). Autrement dit, les coefficients du polynôme caractéristique $P(h,z)$ ne dépendent pas du temps t : ces coefficients sont déterminés uniquement par trA^n et ce sont des intégrales premières. En d'autres termes, on dit que l'équation différentielle (1.1) décrit une déformation isospectrale. D'après la proposition précédente, la courbe $\mathcal{C}$ ne dépend pas du temps, son équation s'écrit explicitement sous la forme

$$P(h,z) = h^N + p_1(z)h^{N-1} + \cdots + p_N(z),$$

et l'on peut utiliser les méthodes de la géométrie algébrique pour l'étudier. Dans plusieurs travaux, un lien avec la théorie des groupes et algèbres de Lie a été fait. Cette approche est basée sur le théorème d'Adler-Kostant-Symes [3, 6, 28, 32, 50] suivant qui fournit des systèmes intégrables comme déformations isospectrales sur des orbites coadjointes dans des algèbres de Kac-Moody.

Théorème 4. *Soit $\mathcal{L} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{N}$ une algèbre de Lie, somme directe de deux sous algèbres $\mathcal{K}$ et $\mathcal{N}$. On suppose que $\mathcal{L}$ est munie d'une forme bilinéaire non-dégénérée Ad-invariante $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $\mathcal{K}^\perp$ et $\mathcal{N}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{N}$ respectivement. Alors, la projection $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}^\perp$ munit $\mathcal{K}^\perp$ de la structure coadjointe pour $\mathcal{N}$. En outre, on a $\mathcal{L} = \mathcal{L}^* = \mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{N}^\perp$ et $\mathcal{K}^\perp = \mathcal{N}^*$ (dual de $\mathcal{N}$) est munie avec $\mathcal{N}$ d'une forme induite héritant de la structure de Kostant-Kirillov. Soit $V \subset \mathcal{N}^*$ une variété invariante sous l'action coadjointe de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{N}^*$ et notons $\mathcal{A}(V)$ l'algèbre des fonctions définies sur un voisinage de V, invariante sous l'action coadjointe de $\mathcal{L}$ (ce qui est distinct de l'action de $\mathcal{N} - \mathcal{N}^*$). Alors les fonctions H dans $\mathcal{A}(V)$ mènent à des champs de vecteurs commutants et ayant la forme de Lax suivante :*

$$\dot{a} = [a, pr_{\mathcal{K}}(\nabla H)]\ \ ,\ pr_{\mathcal{K}}\ projection\ sur\ \mathcal{K}$$

Démonstration. Rappelons que le gradient ∇H d'une fonction H sur un espace vectoriel E est défini par $dH = (\nabla H, dv)_V$, où $v \in E$, $\nabla H \in E^*$ (dual de E) et $(.,.)_V$ la forme entre E, E^*. Soit $H \in \mathcal{L}^* \approx \mathcal{L}$. Notons que

$$\nabla_{\mathcal{K}^\perp} H = pr_{\mathcal{N}}(\nabla H), \qquad \nabla_{\mathcal{N}^\perp} H = pr_{\mathcal{K}}(\nabla H).$$

Soit $V \subset \mathcal{K}^\perp$ une variété invariante sous l'action coadjointe de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{K}^\perp \approx \mathcal{N}^*$. De l'identité $\left.\overbrace{H(Ad_{g(t)}(a))}^{\cdot}\right|_{t=0} = 0$, où $g(t) = 1 + bt + o(t)$, $b \in \mathcal{L}$, $a \in V$, on déduit la relation $[\nabla H(a), a] = 0$, $a \in V$ ou ce qui revient au même

$$[a, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H] = -\left[a, pr_{\mathcal{K}}(\nabla H)\right] \tag{1.3}$$

Le crochet (de Poisson) entre deux fonctions H_1 et H_2 sur $\mathcal{N}^*$ s'écrit

$$\{H_1, H_2\}(a) = \langle\langle a, [\nabla_{\mathcal{N}^*} H_1, \nabla_{\mathcal{N}^*} H_2]\rangle\rangle \ , \ a \in \mathcal{N}^*,$$

où $\langle\langle .,.\rangle\rangle$ est la forme induite héritant de la structure de Kostant-Kirillov et $\nabla_{\mathcal{N}^*} H_1 \in \mathcal{N}$ est le gradient défini par $dH_1(X) = \langle\langle dX, \nabla_{\mathcal{N}^*} H_1, \rangle\rangle$. Comme $\mathcal{K}^\perp \approx \mathcal{N}^*$ et $\langle\langle .,.\rangle\rangle = \langle .,.\rangle|_{\mathcal{K}^\perp \times \mathcal{N}}$, alors

$$\{H_1, H_2\}(a) = \langle a, [\nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2]\rangle\,. \tag{1.4}$$

Supposons maintenant que $H_1, H_2 \in \mathcal{A}(V)$ et satisfaisant à la relation (1.3). Alors, en vertu des relations (1.3) et (1.4) et le fait que $\langle .,.\rangle$ est ad-invariante, on obtient

$$\begin{aligned}\{H_1, H_2\} &= \langle [a, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1], \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2\rangle,\\ &= -\langle [a, pr_{\mathcal{K}} H_1], \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2\rangle,\\ &= -\langle a, [pr_{\mathcal{K}} H_1, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2]\rangle.\end{aligned}$$

En utilisant un raisonnement similaire pour H_2, on obtient

$$\{H_1, H_2\} = \langle a, [pr_{\mathcal{K}} H_1, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2]\rangle.$$

Puisque $\mathcal{K}$ est une algèbre de Lie et $a \in \mathcal{K}^\perp$, on obtient finalement $\{H_1, H_2\} = 0$. Le champ de vecteurs hamiltonien s'écrit

$$X_{H_1}(H_2) = \{H_1, H_2\} = \langle [\nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1, a], \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2\rangle,$$

et on a $X_{H_1}(a) = pr_{\mathcal{K}^\perp}[\nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1, a]$. Dès lors, le flot hamiltonien correspondant est

$$\dot{a} = pr_{\mathcal{K}^\perp}[\nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1, a], \quad H_1 \in \mathcal{A}(V),$$

et d'après (1.3),

$$\dot{a} = pr_{\mathcal{K}^\perp}[a, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1].$$

Or $[\mathcal{K}^{\perp}, K] \subset \mathcal{K}^{\perp}$, donc

$$\dot{a} = [a, \nabla_{\mathcal{K}^{\perp}} H_1],$$

d'où le résultat. □

Pour toute algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de dimension finie munie du crochet $[,]$ et de la forme de Killing $\langle,\rangle$, il existe une extension formelle (dimension infinie) sous forme de série de Laurent :

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{-\infty}^{N} A_i h^i : A_i \in \mathcal{L}, N \in \mathbb{Z} \text{ arbitraire} \right\},$$

munie du crochet $\left[\sum A_i h^i, \sum B_j h^j\right] = \sum_{i,j} [A_i, B_j]\, h^{i+j}$, et des formes symétriques ad-invariantes $\left\langle \sum A_i h^i, \sum B_j h^j \right\rangle_k = \sum_{i+j=-k} \langle A_i, B_j\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Si $\langle,\rangle$ est non-dégénérée, alors il en est de même des formes $\langle,\rangle_k$. Soit $\mathcal{L}_{p,q}$ $(p \leq q)$ l'espace vectoriel des puissances de h compris entre p et q. Une classe intéressante de problèmes s'obtient en prenant $\mathcal{L} = \mathcal{G}l(n, \mathbb{R})$ et en choisissant la forme $\langle,\rangle_1$ sur l'extension de Kac-Moody. Alors nous avons la décomposition en sous algèbres de Lie $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0,\infty} \oplus \mathcal{L}_{-\infty,-1} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{N}$, avec $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{\perp}$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\perp}$ et $\mathcal{K} = \mathcal{N}^*$. Considérons la variété invariante V_m , $m \geq 1$ dans $\mathcal{K} = \mathcal{N}^*$, définie par

$$V_m = \left\{ A = \sum_{i=1}^{m-1} A_i h^i + \alpha h^m \ ,\ \alpha = diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \text{ fixé} \right\},$$

avec $diag\,(A_{m-1}) = 0$. On montre [4, 5] (voir aussi [48, 49]) que :

Théorème 5. *La variété V_m possède une structure symplectique naturelle, les fonctions $H = \left\langle f(Ah^{-j}), h^k \right\rangle_1$ sur V_m(f étant régulière) mènent à des systèmes complètement intégrables ayant la forme*

$$\dot{A} = \left[A, pr_{\mathcal{K}}(f'(Ah^{-j})h^{k-j})\right],\ A = \sum_{i=0}^{m-1} A_i h^i + \alpha h.$$

Ces systèmes se linéarisent sur la variété jacobienne d'une courbe algébrique $\mathcal{C}$ d'équation affine : $P(z,h) = \det(A - zI) = 0$, et de genre $(n-1)(nm-2)/2$. Les coefficients de ce polynôme fournissent les invariants d'orbite de V_m et un ensemble d'intégrales premières indépendantes. En particulier, pour $j = m$, $k = m+1$, les flots s'écrivent sous la forme

$$\dot{A} = \left[A\ ,\ ad_\beta\, ad_\alpha^{-1} A_{m-1} + \beta h\right], \tag{1.5}$$

avec $\beta_i = f'(\alpha_i)$.

Une autre classe intéressante s'obtient en choisissant une algèbre de Lie L semi-simple quelconque. Alors pour l'extension de Kac-Moody $\mathcal{L}$ munie de la forme $\langle,\rangle = \langle,\rangle_0$, on a $\mathcal{L} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} L_i$, $[L_i,L_j] \subset L_{i+j}$, $[L_0,L_0] = 0$, $L_i^* = L_{-i}$. Soit $B^+ = \sum_{i\geq 0} L_i$ et $B^- = \sum_{i\langle 0} L_i$. Alors le produit $\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ où

$$\left[(l_1,l_2)\,,(l_1',l_2')\right] = \left([l_1,l_1'], -[l_2,l_2']\right), \quad \left\langle (l_1,l_2)\,,(l_1',l_2')\right\rangle = \langle l_1,l_1'\rangle - \langle l_2,l_2'\rangle,$$

admet la décomposition en $\mathcal{K}\oplus\mathcal{N}$ avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \{(l,-l) : l\in\mathcal{L}\}, \qquad \mathcal{K}^\perp = \{(l,l) : l\in\mathcal{L}\},\\
\mathcal{N} &= \left\{(l_-,l_+) : l_-\in B^-, l_+\in B^+, pr_0(l_-) = pr_0(l_+)\right\},\\
\mathcal{N}^\perp &= \left\{(l_-,l_+) : l_-\in B^-, l_+\in B^+, pr_0(l_+ + l_-) = 0\right\},
\end{aligned}$$

où pr_0 désigne la projection sur L_0. Dès lors, en vertu du théorème précédent, les orbites dans $\mathcal{N}^*$=$K^\perp$ possèdent un ensemble de champs de vecteurs hamiltoniens commutatifs. Plus précisément, on a le résultat [4, 5, 53] suivant :

Théorème 6. *La variété N-invariante $V_{-j,k} = \sum_{-j\leq i\leq k} L_i \subseteq \mathcal{L} \simeq \mathcal{K}^\perp$, possède une structure symplectique naturelle et les fonctions $H(l_1,l_2) = f(l_1)$ sur $V_{-j,k}$ mènent à des champs de vecteurs commutants et ayant la forme de Lax suivante :*

$$\dot{l} = \left[l,(pr^+ - \frac{1}{2}pr_0)\nabla H\right],\ pr^+ \textit{ projection sur} B^+.$$

La linéarisation s'effectue sur la variété jacobienne d'une courbe définie par le polynôme charactéristique d'éléments dans $V_{-j,k}$.

1.1 Flot géodésique sur le groupe $SO(n)$, flot géodésique sur un ellipsoide et problème de C. Neumann

Dans le cas particulier $m = 1$, i.e., pour V_1, on choisit $A = X + \alpha h$ où $X \in so(n)$. Dans ce cas, le flot hamiltonien décrit par l'équation (1.5) se ramène à l'étude des équations d'Euler-Arnold [8] pour le flot géodésique sur $SO(n)$ (voir [13, 37, 40]). Ce problème sera étudié en détail plus loin dans le cas $n = 4$. Pour $m = 2$, i.e., V_2, si on choisit (voir [4, 5, 41, 42])

$$A = \alpha h^2 - hx\wedge y - y\otimes y,$$

où $x,y\in\mathbb{R}^n$, alors l'équation (1.5) se ramène à

$$\dot{A} = [A, V + \beta h],$$

où $V = ad_\beta ad_\alpha^{-1}(y\wedge x)$, $\beta_i = f'(\alpha_i)$. On peut ramener cette équation au système hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -Vx - \beta y = -\frac{\partial H_\beta}{\partial y},\\
\dot{y} &= -Vy = \frac{\partial H_\beta}{\partial x},
\end{aligned}$$

où
$$H_\beta = \frac{1}{2}\sum_i \beta_i F_i(x,y),$$
avec
$$F_i(x,y) = y_i^2 + \sum_{j\neq i} \frac{(x_i y_j - x_j x_i)^2}{\alpha_i - \alpha_j}.$$
Pour $f(z) = \ln z$, i.e., $\beta_i = \frac{1}{\alpha_i}$, on obtient le problème du flot géodésique sur un ellipsoide
$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + ... + \frac{x_n^2}{\alpha_n^2} = 1,$$
qui décrit le mouvement de la droite $x + sy, s \in \mathbb{R}$, tangente à l'ellipsoide en x dans la direction y de la géodésique. Pour $f(z) = \frac{1}{2}z^2$, i.e., $\beta_i = \alpha_i$, on obtient le problème de C. Neumann [45] régissant le mouvement d'un point sur la sphère $S^{n-1} : |X| = 1$, sous l'influence de la force $-\alpha x$. D'après ce qui précéde, le flot géodésique sur un ellipsoide et le problème de C. Neumann sont des mouvements rectilignes sur la variété jacobienne $Jac(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est une courbe hyperelliptique de genre $n-1$. (Pour de plus amples informations, voir [12, 25, 26, 41, 42]).

1.2 Spectre des matrices de Jacobi et opérateurs aux différences

Nous présentons une étude approfondie [52, 53] sur le spectre des matrices de Jacobi et les opérateurs aux différences, à la fois pour leurs intérêts propres et parce que celà conduit à clarifier un certain nombre de résultats ultérieurs. Rappelons qu'une matrice de Jacobi est une matrice doublement infinie (a_{ij}) pour $i, j \in \mathbb{Z}$ telle que : $a_{ij} = 0$ si $|i-j|$ est assez grand. On montre que l'ensemble de ces matrices forme une algèbre associative et par conséquent une algèbre de Lie par antisymétrisation. Comme exemple de $V_{-j,k}$ (théorème 6), considérons la matrice de Jacobi infinie (tridiagonale symétrique et N-périodique):
$$A = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & b_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & \\ & a_0 & b_1 & a_1 & & \vdots & \\ & 0 & a_1 & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & a_{N-1} & \\ & 0 & \cdots & 0 & a_{N-1} & b_N & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$
avec $a_i, b_i \in \mathbb{C}$. La matrice A est N-périodique signifie que l'on a : $a_{i+N} = a_i$, $b_{i+N} = b_i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. On désigne par $f = (..., f_{-1}, f_0, f_1, ...)^\top$ le vecteur colonne

(infinie) et par D l'opérateur (de passage) de degré $+1$, $Df_i = f_{i+1}$. La matrice A étant N-périodique, on a donc $AD^N = D^N A$. Réciproquement, cette relation de commutation signifie que N est la période de A. Soit

$$A(h) = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & a_N h^{-1} \\ a_1 & b_2 & a_2 & & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{N-1} \\ a_N h & \cdots & 0 & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{C}^*$$

la matrice de Jacobi finie (tridiagonale symétrique et N-périodique). Le déterminant de la matrice $A(h) - zI$ est

$$F(h, h^{-1}, z) \equiv \det(A(h) - zI) = (-1)^{N+1}\left(Q(h + h^{-1}) - P(z)\right), \tag{1.7}$$

où $(z, h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $Q \equiv \prod_{i=1}^N a_i$, $P(z) = z^N + \cdots$, est un polynôme de degré N à coefficients réels. Soit $\mathcal{C}$ la surface de Riemann définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \left\{(z, h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* : Af = zf, D^N f = hf\right\}, \\ &= \left\{(z, h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* : F(h, h^{-1}, z) = 0\right\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

On suppose que $Q \neq 0$. De l'équation $F(h, h^{-1}, z) = 0$, on tire la relation suivante:

$$h = \frac{P(z) \pm \sqrt{P^2(z) - 4Q^2}}{2Q}.$$

Notons que $\mathcal{C}$ est une courbe hyperelliptique ramifiée en $2N$ points donnés par les zéros du polynôme $P^2(z) - 4Q^2$ et admet deux points à l'infini $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$; le point $\mathcal{P}$ recouvrant le cas $z = \infty$, $h = \infty$ tandis que le point $\mathcal{Q}$ est relatif au cas $z = \infty$, $h = 0$. D'après la formule de Riemann-Hurwitz [20], le genre de $\mathcal{C}$ est $g = N - 1$. La fonction méromorphe h n'a ni zéro, ni pôles sauf au voisinage de $z = \infty$. Lorsque $z \nearrow \infty$, on a sur le feuillet $+$,

$$h \simeq \frac{P(z) + P(z)}{2Q} = \frac{P(z)}{Q} = \frac{z^N}{Q} + \ldots,$$

ce qui montre que h a un pôle d'ordre N. De même, lorsque $z \nearrow \infty$, on a sur le feuillet -,

$$h = \frac{P(z) - \sqrt{P^2(z) - 4Q^2}}{2Q} = \frac{2Q}{P(z) + \sqrt{P^2(z) - 4Q^2}} \simeq \frac{Q}{z^N} + \ldots,$$

et donc h a un zéro d'ordre N. Donc le diviseur (h) de la fonction h sur $\mathcal{C}$ est $(h) = -N\mathcal{P} + N\mathcal{Q}$, où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, rappelons que ce sont les deux points recouvrant

∞ sur les feuillets + et - respectivement. L'application définie par $\sim: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, $(z,h) \longmapsto (\overline{z}, \overline{h}^{-1})$, est une involution antiholomorphe. Lorsque $|h|=1$, la matrice finie $A(h)$ est auto-adjointe et admet donc un spectre réel. Dès lors, l'ensemble des points fixes de cette involution que l'on désigne par $\mathcal{C}^{\sim}$ est déterminé par

$$\mathcal{C}^{\sim} = \{p \in \mathcal{C} : \widetilde{p} = p\} = \{(z,h) \in \mathcal{C} : h = \overline{h}^{-1} \overline{z} = z\} = \{(z,h) \in \mathcal{C} : |h| = 1\}.$$

Notons que cet ensemble divise $\mathcal{C}$ en deux régions distinctes $\mathcal{C}_+$ et $\mathcal{C}_-$. Plus précisément, on a

$$\mathcal{C} \backslash \mathcal{C}^{\sim} = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_- = \{p \in \mathcal{C} : |h| > 1\} \cup \{p \in \mathcal{C} : |h| < 1\},$$

donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}^{\sim} \cup \mathcal{C}_-$. La première région $\mathcal{C}_+$ contient le point $\mathcal{P}$ tandis que la seconde $\mathcal{C}_-$ contient le point $\mathcal{Q}$. En fait $\mathcal{C}^{\sim}$ peut être vue comme étant la frontière de $\mathcal{C}_+$ et $\mathcal{C}_-$, donc $\mathcal{C}^{\sim}$ est homologue à zéro. Par ailleurs, l'involution $\sim$ se prolonge en une involution $*$ sur le corps des fonctions méromorphes avec $\varphi^*(p) = \overline{\varphi(\widetilde{p})}$ et sur l'espace des différentielles avec $(\varphi d\psi)^* = \varphi^* d\psi^*$. Dès lors, on a $h^* = h^{-1}$ et $z^* = z$. La condition pour que les matrices A et D^N aient un vecteur propre en commun est paramétrée par la surface de Riemann $\mathcal{C}$ (1.8), soit donc $f = (..., f_{-1}, f_0, f_1, ...)^\top$ un tel vecteur propre. On utilise dans la suite une normalisation appropriée en choisissant $f_0 \equiv 1$, d'où $F_N = h$. Posons donc $\overline{f} = (f_1, f_2, ..., f_N)^\top == (f_1, f_2, ..., f_{N-1}, h)^\top$. Puisque $\overline{f}$ vérifie la relation $(A(h) - zI)\overline{f} = 0$, alors on a

$$f_k = \frac{\Delta_{1,k}}{\Delta_{1,l}} f_l = \frac{\Delta_{2,k}}{\Delta_{2,l}} f_l = ... = \frac{\Delta_{N,k}}{\Delta_{N,l}} f_l, \quad 1 \leq k, l \leq N,$$

où $\Delta_{k,l} = (-1)^{k+l} \times (k,l) -$ mineur de $(A(h) - zI)$, est le (k,l)-cofacteur de $(A(h) - zI)$. En particulier, f peut s'exprimer comme une fonction rationnelle en z et h,

$$f_k = \frac{\Delta_{N,k}}{\Delta_{N,N}} h = \frac{\Delta_{k,k}}{\Delta_{k,N}} h.$$

Soit $\mathcal{D}$ un diviseur positif minimal sur $\mathcal{C}$ tel que : $(f_k) + \mathcal{D} \geq -k\mathcal{P} + k\mathcal{Q}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. On montre que le degré de $\mathcal{D}$ est $\deg \mathcal{D} = g = N - 1$. En outre, le divieur $\mathcal{D}$ est régulier par rapport $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. La preuve consiste à montrer tout d'abord que le diviseur $\mathcal{D}$ est général et qu'ensuite

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D} + k\mathcal{P} - (k+1)\mathcal{Q}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

On déduit de ces propriétés et de la définition de $\mathcal{D}$, que si $f \in \mathcal{L}(\mathcal{D} + k\mathcal{P} - k\mathcal{Q})$, alors f est une combinaison linéaire des f_k et que de plus $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D} + k\mathcal{P} - k\mathcal{Q}) = 1$,

---

Rappelons qu'un diviseur positif $\mathcal{D}$ de degré g sur $\mathcal{C}$ est général si $(\omega_j(p_j)) \neq 0$, $p_j \in \mathcal{C}$, $1 \leq j \leq g$ où $(\omega_1, ..., \omega_g)$ est une base normalisée de différentiels holomorphes sur $\mathcal{C}$. On montre que $\mathcal{C}$ est général si et seulement si $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = 1$ ou si et seulement si $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) = 0$ où $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ désigne l'ensemble des formes différentielles méromorphes ω sur $\mathcal{C}$ telles que le diviseur $(\omega) + \mathcal{D} \geq 0$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$ et $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}+\mathcal{P}+\mathcal{Q})=1$. Considérons la différentielle de $F(7)$ tout en tenant compte que z n'apparait que sur la diagonale de la matrice $A(h)-zI$. On a

$$-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{ii}dz+h\frac{\partial F}{\partial h}\frac{dh}{h}=0,$$

et soit $\omega=\frac{-i\Delta_{NN}dz}{h\frac{\partial F}{\partial h}}$. On a

$$\omega=\frac{-i\frac{dh}{h}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta_{ii}}{\Delta_{NN}}}=\frac{-i\frac{dh}{h}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta_{ii}}{\Delta_{iN}}\cdot\frac{\Delta_{iN}}{\Delta_{NN}}}=\frac{-i\frac{dh}{h}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta_{Ni}}{\Delta_{NN}}\cdot\frac{\Delta_{iN}}{\Delta_{NN}}}.$$

Or $\Delta_{iN}=\Delta_{Ni}^{*}$, $1\leq i\leq N$, donc

$$\omega=\frac{-i\frac{dh}{h}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta_{Ni}}{\Delta_{NN}}.\left(\frac{\Delta_{iN}}{\Delta_{NN}}\right)^{*}}=\frac{-i\frac{dh}{h}}{\sum_{i=1}^{N}f_if_i^{*}},$$

et par conséquent

$$\omega=\pm\frac{\Delta_{NN}dz}{\sqrt{P^2(z)-4Q^2}}.$$

On en déduit que $\omega^{*}=\omega$. En outre, on a $\omega\geq 0$ sur $\mathcal{C}^{\sim}$. (En effet, notons que sur $\mathcal{C}^{\sim}$ on a $\sum_{i=1}^{N}f_if_i^{*}=\sum_{i=1}^{N}|f_i|^2\geq 0$. Soit $h=\rho e^{i\theta}$. En tous les points en nombre fini, h est un paramètre local sur $\mathcal{C}$ tandis que θ est un paramètre local sur $\mathcal{C}^{\sim}$. Comme $-ih^{-1}dh=d\theta$, $\omega\geq 0$, en ces points et par continuité en tous les points). On a aussi une relation qui montre que le produit scalaire entre f_k et f_l est

$$\langle f_k,f_l\rangle=\int_{\mathcal{C}^{\sim}}f_k.f_l^{*}\omega=\begin{cases}0 & \text{si } k\neq l\\ >0 & \text{si } k=l\end{cases}$$

i.e., les fonctions f_k, $k\in\mathbb{Z}$, sont orthogonales sur $\mathcal{C}^{\sim}$ par rapport ω. On déduit de ces propriétés que le diviseur de ω est $(\omega)=\mathcal{D}+\widetilde{\mathcal{D}}-\mathcal{P}-\mathcal{Q}$, pour l'involution $\sim$ introduite précédemment. Etant donné une matrice de la forme $A(6)$, on a obtenu une série de données $\{\mathcal{C},z,h,\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{D},\omega\}$. L'inverse est aussi vrai. En résumé, on a [53] :

Proposition 7. *Il existe une correspondance biunivoque entre les ensembles de données suivants :*
a) Soit $a_i,b_i\in\mathbb{C}$, $a_{i+N}=a_i$, $b_{i+N}=b_i$, $-\infty<i<+\infty$. *Une matrice infinie*

N-périodique

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & b_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & \\ & \overline{a}_0 & b_1 & a_1 & & \vdots & \\ & 0 & \overline{a}_1 & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & a_{N-1} & \\ & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}_{N-1} & b_N & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

modulo une conjugaison par des matrices diagonales périodiques.
b) Une courbe $\mathcal{C}$ (éventuellement singulière) de genre $N-1$, deux points P et Q sur $\mathcal{C}$, un diviseur $\mathcal{D}$ de degré $N-1$ sur $\mathcal{C}$ et deux fonctions méromorphes h et z sur $\mathcal{C}$ telles que : $(h) = -N\mathcal{P} + N\mathcal{Q}$ et

$$(z) = -\mathcal{P} - \mathcal{Q} + \textit{un diviseur positif ne contenant pas les points } \mathcal{P} \textit{ et } \mathcal{Q}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ est dotée d'une involution antiholomorphe $\sim: (z,h) \longmapsto (\overline{z}, \overline{h}^{-1})$ telle que : $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}^\sim \cup \mathcal{C}_-$ où

$$\mathcal{C}^\sim = \{p \in \mathcal{C} : \widetilde{p} = p\} = \{(z,h) : |h| = 1\},$$

$$\mathcal{C}_+ = \{p \in \mathcal{C} : |h| > 1\}, \qquad \mathcal{C}_- = \{p \in \mathcal{C} : |h| < 1\},$$

et tels que : $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_+$, $\mathcal{Q} \in \mathcal{C}_-$. L'involution $\sim$ se prolonge en une involution $*$ sur le corps des fonctions méromophes avec $\varphi^*(p) = \widetilde{\varphi(\widetilde{p})}$ et sur l'espace des différentielles avec $(\varphi d\psi)^* = \varphi^* d\psi^*$ et donc $h^* = h^{-1}$, $z^* = z$. Le diviseur d'une forme différentielle ω sur $\mathcal{C}$ est $(\omega) = \mathcal{D} + \widetilde{\mathcal{D}} - \mathcal{P} - \mathcal{Q}$.

Pour tout opérateur aux différences X, on pose

$$\left(X^{[+]}\right)_{ij} = \begin{cases} X_{ij} & \text{si } i < j \\ \frac{1}{2} X_{ij} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}, \qquad X^{[-]} = X - X^{[+]}.$$

Soit $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel des matrices infinies A, N-périodiques telles que : pour un certain K, $c_{ij} = 0$ si $|i-j| > K$. Sur $\mathcal{M}$, on introduit le produit scalaire suivant : $\langle C, D\rangle = Tr(CD^\top) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} c_{ij} D_{ij}$. On dit qu'une fonctionnelle F est différentiable, s'il existe une matrice $\frac{\partial F}{\partial C}$ dans $\mathcal{M}$ telle que pour tout D,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{F(C+\epsilon D) - F(C)}{\epsilon} = \langle \frac{\partial F}{\partial C}, D\rangle.$$

Notons que l'on a aussi $\langle [A,B],C\rangle = \langle [A^\top, C], B\rangle$. On définit le crochet (de Poisson) entre deux fonctionnelles différentiables F et G sur l'espace $\mathcal{M}$, en posant

$$\{F,G\} = \left\langle \left[\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^{[+]}, \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)^{[+]}\right], \left[\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^{[-]}, \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)^{[-]}\right], X\right\rangle.$$

On vérifie aisément que ce crochet satisfait à l'identité de Jacobi. Soit $P(A,S,S^{-1})$ un polynôme en $S+S^{-1}$ et A à coefficients réels. Considérons l'équation de Lax suivante :

$$\dot{A} = \left[P(A,S,S^{-1})^{[+]} - P(A,S,S^{-1})^{[-]}, A\right]. \tag{1.9}$$

Lorsque la matrice $A(t)$ se déforme avec t, alors seul le diviseur $\mathcal{D}$ varie tandis que les données $\{\mathcal{C}, z, h, \mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$ restent fixées. Comme nous l'avons déjà montré (proposition 3), les coefficients de $z^i h^j$ dans l'équation (1.7) sont des invariants de ce mouvement. Le diviseur $\mathcal{D}(t)$ évolue de fàçon linéaire sur la variété jacobienne $\mathrm{Jac}(\mathcal{C})$. Tout flot linéaire sur $\mathrm{Jac}(\mathcal{C})$, est équivalent à l'équation (1.9) et il s'agit d'un flot hamiltonien par rapport au crochet de Poisson ci-dessus. En particulier, le flot

$$\dot{A} = \left[A, (S^{-k}A^l]^{[+]}\right],$$

s'écrit en terme du crochet de Poisson comme suit :

$$\dot{a}_{ij} = \{F, a_{ij}\},$$

où $F = \frac{1}{l+1}Tr\left(S^{-k}A^{l+1}\right)$. Le crochet de Poisson de deux fonctionnelles de la forme $Tr\left(S^{-k}A^{l+1}\right)$ est nul, ce qui signifie que nous avons un ensemble d'intégrales premières en involution. Soit $(\omega_1, ..., \omega_g)$ une base de différentielles holomorphes sur la courbe hyperelliptique $\mathcal{C}$. On a

$$\omega_k = \frac{z^{k-1}}{\sqrt{P^2(z) - 4Q^2}},$$

et soit $c_k = \mathrm{Res}_p(\omega_k z^j)$, $1 \le j \le g$. Puisque l'ordre des zéros de ω_k aux points à l'infini $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ est égal à $g-k$, alors $c_k = 0$ pour $k < g-j+1$ et $c_k \neq 0$ pour $k = g-j+1$. Par conséquent, un ensemble complet de flots est donné par les fonctions $z, z^2, ..., z^g$ et le flot qui laisse invariant le spectre de A et X est donné par un polynôme $P(z)$ de degré au plus égal à g :

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\left[A, P(A)^+ - P(A)^-\right],$$

où $P(A)^+$ (resp. $-P(A)^-$) est la partie triangulaire supérieure de $P(A)$ (resp. inférieure), y compris la diagonale de $P(A)$. Le crochet de Poisson entre deux fonctionnelles F et G peut encore s'écrire sous la forme

$$\{F,G\} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial a} \\ \frac{\partial F}{\partial b} \end{pmatrix}^\top, J \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial a} \\ \frac{\partial G}{\partial b} \end{pmatrix} \right\rangle,$$

où $\frac{\partial F}{\partial a}$ et $\frac{\partial F}{\partial b}$ sont les vecteurs colonnes dont les éléments sont donnés par $\frac{\partial F}{\partial a_i}$ et $\frac{\partial F}{\partial b}_i$ respectivement tandis que J est la matrice antisymétrique d'ordre $2n$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} O & \mathcal{A} \\ -\mathcal{A}^\top & O \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & -a_N \\ -a_1 & a_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & -a_2 & a_3 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -a_{N-1} & a_N \end{pmatrix}.$$

La structure symplectique est donnée (voir [52]) par

$$\omega = \sum_{j=2}^{N} db_i \wedge \sum_{j\leq i\leq N} \frac{da_i}{a_i}.$$

On a

$$\det(A_h - zI)|_{h=i} = (-1)^N z^N + \sum_{i=1}^{N} \beta_i z^{N-1},$$

où $\beta_2, ..., \beta_N$ désignent les g invariants fonctionnellement indépendants et en involution. Ces invariants sont aussi donnés par les $g = N-1$ points choisis à partir du spectre de A_1 et A_{-1} ou ce qui revient au même des $N-1$ points de branchements de la courbe hyperelliptique $\mathcal{C}$ ou encore par les quantités TrA^k, $2 \leq k \leq N$.

Dans la partie 2.2, on reprendra l'exemple du réseau de Toda périodique avec l'approche de Griffiths étudiée dans la section suivante.

2 Méthode de linéarisation de Griffiths

2.1 Le théorème de Griffiths

Dans [21], Griffiths a fourni des conditions nécessaires et suffisantes (de nature cohomologique) sur la matrice B, sans référence aux algèbres de Kac-Moody, pour que le flot de la forme de Lax puisse être linéarisé sur la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$ pour $\mathcal{C}$ défini par (1.2). On suppose que pour tout $p = (h,z)$ appartenant à la courbe d'équation affine (1.2), i.e.,

$$\mathcal{C} = \{(h,z) : \det(A - zI) = 0\},$$

l'espace propre (de A) correspondant est de dimension 1 et engendré par un vecteur $v(t,p) \in V$ où V est un espace vectoriel de dimension n. On a donc une famille d'applications holomorphes qui envoient $(h,z) \in \mathcal{C}$ vers $\ker(A - zI)$:

$$f_t : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}V, \quad p \longmapsto \mathbb{C}v(t,p). \tag{2.1}$$

Posons

$$L_t = f_t^* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}V}(1)\right) \in \mathrm{Pic}^d(\mathcal{C}), \tag{2.2}$$

où $d = \deg f_t(\mathcal{C})$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}V}(1)$ est le fibré en droites hyperplane sur $\mathbb{P}V$ et $\mathrm{Pic}^d(\mathcal{C})$ la variété de Picard de $\mathcal{C}$, i.e., rappelons que c'est l'ensemble des fibrés en droites de degré d sur $\mathcal{C}$. Par continuité, le degré de L_t ne varie pas avec le temps t. Soit $\mathbf{H}$ la classe hyperplane de $\mathbb{P}V$. On a

$$\mathrm{deq}\ L_t = \int_{\mathcal{C}} f_t^* \mathbf{H} = \int_{f_t(\mathcal{C})} \mathbf{H}.$$

Cette dernière expression n'est autre que le dual de Poincaré de la classe de $\mathcal{C}$ et coincide avec le degré de $\mathcal{C}$. Donc $\deg L_t = \deg(\mathcal{C})$. Lorsque t varie, L_t évolue dans $\mathrm{Pic}^d(\mathcal{C})$. Dès lors, si on fixe un fibré en droite $L_0 \in \mathrm{Pic}^d(\mathcal{C})$, alors le fibré en droite $L_0^{-1} \otimes L_t$ évolue sur la variété jacobienne

$$\mathrm{Jac}(\mathcal{C}) = H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})/H^1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}) \simeq H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}})^*/H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}),$$

i.e., l'application $L \longmapsto L_0^{-1} \otimes L$ induit un morphisme $\mathrm{Pic}^d(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Jac}(\mathcal{C})$. Le mouvement du fibré en droite $L_0^{-1} \otimes L_t$ dépend du choix de la matrice B. Comme nous l'avons signalé, Griffiths [21] a fourni des conditions nécessaires et suffisantes (de nature cohomologique) sur la matrice B pour que le flot $t \longmapsto L_t \in \mathrm{Jac}(\mathcal{C})$, puisse être linéarisé sur la variété jacobienne $\mathrm{Jac}(\mathcal{C})$. Sa méthode se base sur l'observation que l'espace tangent aux déformations se trouve toujours dans des espaces de cohomologie bien choisis. Par ailleurs, la cohomologie H^1 peut toujours se réduire à la cohomologie H^0 en utilisant la dualité. Près du point $p = (h,z) \in \mathcal{C}$, le problème des valeurs propres

$$Av(t,p) = zv(t,p),$$

entraine que $Bv = -\dot{v} + Av$, pour une certaine fonction méromorphe λ dépendant de h, z et t. Alors, en définissant

$$[\text{Laurent tail}(B)]_p \equiv \{\text{partie principale du développement de Laurent de } \lambda \text{ en } p\},$$

Le flot de Lax (1.1) peut être linéarisé sur la variété jacobienne $\mathrm{Jac}(\mathcal{C})$ si et seulement si pour tout $p \in (h)_\infty$ (diviseur des pôles de h), on a

$$\begin{aligned} \overbrace{[\text{Laurent tail}(B)]_p}^{\cdot} \quad \in \quad & \text{combinaison linéaire } \{[\text{Laurent tail}(B)]_p \\ & \text{Laurent tail en } p \text{ de toute fonction méromorphe} \\ & f \text{ sur } \mathcal{C} \text{ telle que } : (f) \geq n(h)_\infty\}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant préciser tout celà avec un peu plus de détail. L'équation (1.1) est invariante sous la substitution $B \longmapsto B + P(h, A)$, où $P(h, g) \in \mathbb{C}[h, g]$, ce qui montre que B n'est pas unique et que sa place naturelle se trouve quelque part dans un groupe de cohomologie. Soit donc $B(t, h) = \sum_{k=0}^{n} B_k h^k$, un polynôme de degré n. Soit $\mathcal{D} = h^{-1}(\infty) = \sum_j n_j p_j$, $n_j \geq 0$, (où h est vue comme étant une fonction méromorphe) un diviseur positif sur $\mathcal{C}$ et soit z_j une coordonnée locale autour de p_j. Il faut interpréter B comme étant un élément de $H^0(\mathcal{C}, \mathrm{Hom}(V, V(\mathcal{D}))$ où V désigne le faisceau des sections du fibré trivial $\mathcal{C} \times V$ et $V(\mathcal{D}) = V \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$. Une section de $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})$ s'écrit $\varphi = \sum \varphi_j$ où $\varphi_j = \sum_{k=-n_j}^{-1} a_k z_j^k$, est une partie principale (Laurent tail) centrée en p_j. Le problème de Mittag-Leffler peut se formuler comme suit : Etant donnée une partie principale φ_j, trouver des conditions pour qu'il existe une fonction $\varphi \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}))$ telle que $\varphi - \varphi_j$ soit holomorphe autour de p_j. La réponse est fournie par la proposition suivante :

Proposition 8. *Il existe $\varphi \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}))$ telle que $\varphi - \varphi_j$ soit holomorphe autour de p_j si et seulement si*

$$\sum_j Res_{p_j}(\varphi_j.\omega) = 0, \tag{2.3}$$

pour toute forme différentielle holomophe ω sur $\mathcal{C}$.

Démonstration. On considère la suite exacte de Mittag-Leffler attachée au diviseur $\mathcal{D}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}) \longrightarrow 0.$$

On en déduit la suite de cohomologie ainsi que son dual

$$\begin{array}{l} H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})) \xrightarrow{res} H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}) \longrightarrow H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})) \longrightarrow 0, \\ H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-\mathcal{D})) \longleftarrow H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}))^* \xleftarrow{\delta^*} H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}) \longleftarrow H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-\mathcal{D})), \end{array}$$

où $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}})$ est l'espace des 1-formes différentielles holomorphes sur $\mathcal{C}$. Le problème est équivalent à la résolution de l'équation $\delta\varphi = 0$ et à cause de la dualité ceci revient à résoudre le système d'équations linéaires $\langle \delta\varphi, \omega \rangle = 0$, $\forall \omega \in H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}})$. Considérons un recouvrement ouvert de $\mathcal{C}$ par des petits disques U_j centrés en p_j. On suppose que sur chaque U_j, il existe une fonction méromorphe f_j telle que : $\mathrm{Res}_{p_j}(f_j) = \varphi_j$, si U_j contient p_j (sinon, on choisira la fonction nulle). Dès lors, le cocycle $\delta(\varphi)_{ik} = \{f_i - f_k\}$ représente un élément de $H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})$. La $(0,1)$-forme correspondante sous l'isomorphisme de Dolbeault $H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}) \simeq H^{0,1}_{\overline{\partial}}(\mathcal{C})$, est $hA = \sum_j \overline{\partial}(z_j f_j)$, où $\{z_j\}$ est une partition de l'unité (supp $z_j \subset U_j$ et $\sum_j z_j = 1$ dans un voisinage de p_j) et $h(p_j) = 0$. Rappelons que par définition, on a $\langle \delta\varphi, \omega \rangle = \int_{\mathcal{C}} \phi$, où ϕ est une représentation de Dolbeault relative à la forme cup-produit $\delta\varphi.\omega$. Avec les notations introduites ci-dessus, on a donc

$$\begin{aligned}
\langle \delta\varphi, \omega\rangle &= \int_{\mathcal{C}} h\wedge\omega,\\
&= \int_{\mathcal{C}} \sum_j \overline{\partial}(z_j f_j \omega),\\
&= \int_{\mathcal{C}} \sum_j d(z_j f_j \omega),\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathcal{C}\setminus(\cup_j V_j(\epsilon))} \sum_j d(z_j f_j \omega), (V_j(\epsilon)\equiv \text{disque de rayon } \epsilon \text{ et de centre } p_j),\\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial V_j(\epsilon)} \sum_j d(z_j f_j \omega),\\
&= -2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{p_j}(f_j\omega),\\
&= -2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{p_j}(\varphi_j\omega).
\end{aligned}$$

Dès lors, $\langle \delta\varphi, \omega\rangle = 0$, $\forall\omega\in H^0(\mathcal{C},\Omega_{\mathcal{C}})$, est équivalente à (2.3). Notons que le nombre d'équations indépendantes de ce système de g équations linéaires à d inconnues, est égal à $g - \dim \mathcal{I}(-\mathcal{D})$ où $\mathcal{I}(-\mathcal{D})$ est l'ensemble des formes différentielles méromorphes ω sur $\mathcal{C}$ telles que le diviseur $(\omega)+\mathcal{D}\geq 0$. Or deux fonctions méromorphes ayant la même partie principale ne diffèrent que par une constante, donc $\dim H^0(\mathcal{C},\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})) = \deg\mathcal{D} - g + 1 + \dim\mathcal{I}(-\mathcal{D})$, i.e., le théorème de Riemann-Roch. Finalement, le résultat annoncé résulte de (2.3) et du fait que les suites ci-dessus sont exactes. □

On considère près du point $p = (h,z)\in\mathcal{C}$, le problème des valeurs propres suivant : $Av(t,p) = zv(t,p)$. Dès lors, $\dot{A}v + A\dot{v} = z\dot{v}$, et d'après l'équation de Lax, on a $A(\dot{v} - Bv) = z(\dot{v} - Bv)$. Par hypothèse, l'espace propre de A est génériquement de dimension égale à 1, i.e., la multiplicité des valeurs propres est (génériquement) égale à 1, on en déduit que pour un certain λ, $\dot{v} - Bv = -\lambda v$, ou ce qui revient au même

$$Bv = \dot{v} + \lambda_j v, \tag{2.4}$$

où λ_j désigne la partie principale (Laurent tail) du développement de Laurent de λ en p. Le résidu de B, noté $r(B)$, est la section de $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})$ induite par λ dans (2.6) (λ possède des pôles sur $\mathcal{D}$). Autrement dit, le résidu $r(B)\in H^0(\mathcal{C},\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})$ est la collection des parties principales (Laurent tails) (λ_j) données par (2.4). Le théorème de Griffiths [21], s'énonce comme suit :

Théorème 9. *Soit Im res $\subset H^0(\mathcal{C},\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})$ les parties principales (Laurent tails) des fonctions méromorphes dans $H^0(\mathcal{C},\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})$. Alors, le flot L_t(11) dans Pic($\mathcal{C}$)*

est linéaire si et seulement si

$$r\dot{B} = 0 \; mod.(r(B), Im\; res).$$

Si cette condition est satisfaite, alors le flot linéaire sur $Jac(\mathcal{C})$ est donné par l'application bilinéaire

$$(t, \omega) \longmapsto t \sum_j Res_{p_j}(\lambda_j \omega), \quad \omega \in H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}). \tag{2.5}$$

2.2 Equations de Nahm sur l'algèbre $u(n)$ et le réseau de Toda

Les équations de Nahm [21, 23, 44] considérées ici portent sur trois fonctions $(T_j(t))_{j=1,2,3}$ à valeurs dans l'algèbre $u(n)$ formée des matrices antihermitiennes complexes d'ordre n. Ces équations interviennent lors de l'étude de monopoles et s'écrivent sous la forme

$$\dot{T}_j = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} [T_k, T_l],$$

où ϵ_{jkl} est le symbole de Levi-Civita,

$$\epsilon_{jkl} = \begin{cases} +1 & \text{si } (j,k,l) = (1,2,3), (3,1,2) \text{ ou } (2,3,1), \\ -1 & \text{si } (j,k,l) = (3,2,1), (1,3,2) \text{ ou } (2,1,3), \\ \;\;0 & \text{si } j = k, k = l \text{ ou } l = j. \end{cases}$$

Les équations de Nahm sont équivalentes à l'équation de Lax $\dot{A} = [B, A]$, où

$$\begin{aligned} A &= (T_1 + iT_2) - 2iT_3 h + (T_1 - iT_2)h^2, \\ B &= -\frac{1}{2}\frac{dA}{dh} = iT_3 - (T_1 - iT_2)h. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe spectrale (dans l'espace des twisteurs $\mathcal{T}\mathbb{P}^1$) associée à ces équations. C'est une courbe lisse d'équation

$$P(h, z) = \det((T_1 + iT_2) - 2iT_3 h + (T_1 - iT_2)h^2 - zI) = 0,$$

et son genre est égal à $(n-1)^2$. Les coefficients du polynôme $P(h, z)$ sont indépendants de t et sont des invariants des équations de Nahm. On a $\mathcal{D} = h^{-1}(\infty) = \sum_{j=1}^n p_j$. Soit $z_j = \lambda_j \xi_j^{-1} + \xi_j^{-1} +$ Taylor, où $\xi_j = h^{-1}$ est une coordonnée locale autour de p_j. D'après (2.6), on a autour de p_j,

$$\begin{aligned} A &= (T_1 + iT_2) - 2iT_3 \xi_j^{-1} + (T_1 - iT_2)\xi_j^{-2}, \\ B &= iT_3 - (T_1 - iT_2)\xi_j^{-1}. \end{aligned}$$

Les vecteurs propres v_j satisfont à $Av_j = z_j v_j$, d'où

$$\begin{aligned}(T_1 + iT_2 - 2iT_3h + (T_1 - iT_2)h^2)v_j &= (\lambda_j h^2 + h + \text{Taylor})v_j,\\ Bv_j &= iT_3 - (T_1 - iT_2)hv_j.\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}(T_1 - iT_2)h^2 v_j &= z_j v_j + o(h),\\ Bv_j &= -(T_1 - iT_2)hv_j + o(1).\end{aligned}$$

On a donc $(T_1 - iT_2)v_j(p_j) = \lambda_j v_j(p_j)$, tandis que le résidu est donné par $r(B) = \sum_j \lambda_j z_j^{-1}$. Par conséquent, $r\dot{B} = 0$ et (2.5) linéarise le flot en question sur la variété jacobienne de $\mathcal{C}$.

On reprend ici l'exemple du réseau de Toda périodique avec l'approche de Griffiths [21]. Rappelons que le réseau de Toda [4, 17, 21, 52] (version discrète de l'équation aux dérivées partielles non-linéaire de Korteweg-de-Vries) décrit un système de N masses vibrantes reliées entre elles par des ressorts dont la force de rappel est exponentielle. Le hamiltonien du réseau de Toda s'écrit

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} y_j^2 + \sum_{j=1}^{N} e^{x_j - x_{j+1}},$$

d'où les équations canoniques :

$$\dot{x}_j = y_j, \qquad \dot{y}_j = -e^{x_j - x_{j+1}} + e^{x_{j-1} - x_j}.$$

On distingue deux cas :

(i) Le premier concerne le cas non périodique, i.e., $x_0 = -\infty$, $x_{N+1} = +\infty$, où les masses sont disposées sur une droite. En utilisant la transformation de Flaschka [17]:

$$a_j = \frac{1}{2}e^{x_j - x_{j+1}}, \qquad b_j = -\frac{1}{2}y_j,$$

le système de Toda s'écrit

$$\dot{a}_j = a_j\left(b_{j+1} - b_j\right), \qquad \dot{b}_j = 2(a_j^2 - a_{j+1}^2),$$

avec $a_{N+1} = a_1$ et $b_{N+1} = b_1$. On déduit de la première équation que $\sum_{j=1}^{N} \dot{b}_j ==$ 0, et on choisit la constante de renormalisation de telle façon que $\sum_{j=1}^{N} b_j = 0$. C'est une intégrale première du système en question et pour montrer que celui-ci est complètement intégrable, il faut trouver $N-1$ autres intégrales premières fonctionnellement indépendantes et en involution. Le système précédent s'écrit sous la forme de Lax $\dot{A} = [B, A]$, où

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & a_N \\ a_1 & b_2 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b_{N-1} & a_{N-1} \\ a_N & \cdots & 0 & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & \cdots & -a_N \\ -a_1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{N-1} \\ a_N & \cdots & \cdots & -a_{N-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le spectre de la matrice tridiagonale A demeure constant sur toute la trajectoire de l'équation de Lax. Donc le réseau de Toda peut-être considéré comme une déformation isospectrale de la matrice A^k dont le spectre fournit les intégrales premières $\frac{1}{k} trA^k$, $1 \leq k \leq N$. Notons que pour $k = 1$, on retombe sur l'intégrale première trouvée précédemment. Comme ces N intégrales premières sont indépendantes et en involution, on en déduit que le réseau de Toda est un système complètement intégrable.

(ii) En ce qui concerne le cas périodique, i.e., $y_{j+N} = y_j$, $x_{j+N} = x_j$, les masses reliées seront disposées sur un cercle. On montre dans ce cas, que le spectre de la matrice de Jacobi périodique

$$A(h) = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & a_N h^{-1} \\ a_1 & b_2 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b_{N-1} & a_{N-1} \\ a_N h & \cdots & 0 & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix},$$

reste invariant dans le temps. La matrice B dépendant du paramètre spectral h, a la forme

$$B(h) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & \cdots & -a_N h^{-1} \\ -a_1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{N-1} \\ a_N h & \cdots & \cdots & -a_{N-1} & 0 \end{pmatrix},$$

et le reste suit de la théorie générale. Notons que si $a_j(0) \neq 0$, alors $a_j(t) \neq 0$ pour tout t. Puisque $A^\top(h) = A(h^{-1})$, alors

$$P(h, z) = \det(A(h) - zI) = P(h^{-1}, z).$$

Dès lors, l'application

$$\sigma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}, \quad (h, z) \longmapsto (h^{-1}, z), \tag{2.7}$$

est une involution sur la courbe spectrale $\mathcal{C}$. On choisit

$$A(h)=\begin{pmatrix}0&\dots&a_N\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&0\end{pmatrix}h^{-1}+\begin{pmatrix}b_1&a_1&&&\\ a_1&b_2&&&\\ &&\ddots&&\\ &&&b_{N-1}&a_{N-1}\\ &&&b_N&a_N\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_N&\dots&0\end{pmatrix}h.$$

Notons qu'ici la matrice $A(h)$ est méromorphe (alors que précédemment nous l'avons considérée comme étant un polynôme en h) mais nous allons voir qu'on peut adopter la théorie à cette situation aussi. On a

$$P(h,z)=-\prod_{j=1}^{N-1}a_j.(h+h^{-1})+z^N+c_1z^{N-1}+\dots+c_N.$$

Supposons que $\prod_{j=1}^{N-1}a_j\neq 0$ et posons

$$\begin{aligned}Q(h,z)&\equiv\frac{P(h,z)}{\prod_{j=1}^{N-1}a_j},\\ &=h+h^{-1}+\frac{z^N+c_1z^{N-1}+\dots+c_N}{\prod_{j=1}^{N-1}a_j},\\ &=h+h^{-1}+d_0z^N+d_1z^{N-1}+\dots+d_N.\end{aligned}$$

Dans $\mathbb{CP}^2$, la courbe algébrique d'équation affine $Q(h,z)=0$, est singulière à l'infini pour $n\geq 4$. Nous allons calculer le genre de la normalisation $\mathcal{C}$ de cette courbe. Notons que $\mathcal{C}$ est un revêtement double de $\mathbb{CP}^1$ ramifié en $2N$ points coincidant avec les points fixes de l'involution $\sigma(16)$, i.e., ce sont des points où $h=\pm1$. D'après la formule de Riemann-Hurwitz [20], le genre g de la courbe $\mathcal{C}$ est $N-1$. Considérons le revêtement $\mathcal{C}\longrightarrow\mathbb{CP}^1$ ci-dessus et posons $z^{-1}(\infty)=\mathcal{P}+\mathcal{Q}$, où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se trouvent sur deux feuillets distincts du revêtement. D'après l'équation $Q(h,z)=0$, le diviseur de h est $(h)=N\mathcal{P}-N\mathcal{Q}$. Dans ce cas, le diviseur $\mathcal{D}$ s'écrit $\mathcal{D}=N\mathcal{P}+N\mathcal{Q}$, d'où $B\in H^0(\mathcal{C},\mathrm{Hom}(V,V(\mathcal{D}))$. Le résidu $r(B)\in H^0(\mathcal{C},\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})$ satisfait aux conditions du théorème 9 et par conséquent le flot linéaire est donné par l'application (2.5). Pour calculer le résidu $r(B)$ de B, nous alons déterminer un ensemble de vecteurs propres holomorphes. On utilisera à cette fin, la méthode de van Moerbeke-Mumford décrite précédemment. Nous allons tout d'abord calculer le résidu en $\mathcal{Q}$ et on en déduira de façon similaire le résultat en $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{E}=\sum_{j=1}^{g}r_j$ un diviseur général de degré g tel que :

$$\dim\mathcal{L}(\mathcal{E}+(k-1)\mathcal{P}-k\mathcal{Q})=0,\quad\forall k.$$

Or d'après le théorème de Riemann-Roch, $\dim\mathcal{L}(\mathcal{E}+k\mathcal{P}-k\mathcal{Q})\geq 1$, donc $\dim\mathcal{L}(\mathcal{E}+k\mathcal{P}-k\mathcal{Q})=1$, $\forall k$. Soit $f_k\in\mathcal{L}(\mathcal{E}+k\mathcal{P}-k\mathcal{Q})=H^0(\mathcal{C},\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}+k\mathcal{P}-k\mathcal{Q}))$, $1\leq k\leq N$, une base avec $f_N = h$. On peut choisir un vecteur v de la forme $v = (f_1...f_N)^\top$, de telle manière que v soit un vecteur propre de A, i.e., $Av = zv$, $(h, z) \in \mathbb{C}$. Dès lors, $V = h^{-1}v$ est un vecteur propre holomorphe. Sans restreindre la généralité, on prend $N = 3$. Le système $Av = zv$, s'écrit explicitement

$$b_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 = z f_1, \quad a_1 f_1 + b_2 f_2 + a_2 h = z f_2, \quad a_3 h f_1 + a_2 f_2 + b_3 h = z h.$$

En multipliant chaque équation de ce système par h^{-1}, tout devient holomorphe sauf la dernière équation, i.e., $a_3 f_1 = z + \text{Taylor}$. Rappelons que le résidu $r(B)$ de B est la section de $\mathcal{O}_\mathcal{D}(\mathcal{D})$ induite par λ dans l'équation $Bv = \dot{v} + \lambda v$. Autrement dit, on a $Bv = r(B)v + \text{Taylor}$ et dès lors

$$\begin{pmatrix} a_1 f_2 h^{-1} - a_3 h^{-1} \\ -a_1 f_1 h^{-1} + a_2 \\ a_3 f_1 - a_2 f_2 h^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \text{Taylor}.$$

On en déduit que $r(B) = zh^{-1}$ et $r\dot{B} = 0$. La même conclusion est valable pour le résidu en $\mathcal{P}$. Par conséquent, le mouvement du réseau de Toda évoluant dans le temps "complexe" se transforme en un mouvement rectiligne sur la variété jacobienne de la courbe $\mathcal{C}$.

3 Autres problèmes résolus par la méthode des déformations isospectrales

3.1 Le corps solide d'Euler et flot géodésique sur $SO(4)$

Nous allons étudier dans cette partie le corps solide d'Euler et le flot géodésique sur le groupe $SO(4)$ via la méthode de la courbe spectrale [4, 5, 22, 31, 37]. Les équations d'Euler, peuvent s'écrire sous la forme

$$\dot{M} = [M, \Lambda M], \tag{3.1}$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda M = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 m_3 & \lambda_2 m_2 \\ \lambda_3 m_3 & 0 & -\lambda_1 m_1 \\ -\lambda_2 m_2 & \lambda_1 m_1 & 0 \end{pmatrix},$$

où λ_i désignent les inverses des moments d'inertie et (m_1, m_2, m_3) sont les moments angulaires du solide. L'équation (3.1) est équivalente à l'équation de Lax $\dot{A} = [A, B]$, avec $A = M + \alpha h$, $B = \Lambda M + \beta h$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

et (conditions de Manakov [37])

$$\lambda_1 = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\alpha_3 - \alpha_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta_1 - \beta_3}{\alpha_1 - \alpha_3}, \quad \lambda_3 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(h,z) = \prod_{j=1}^{3} (\alpha_j h - z) + \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_j m_j^2\right) h - \left(\sum_{j=1}^{3} m_j^2\right) z.$$

Le spectre de la matrice $A = M + \alpha h$ (comme fonction de $h \in \mathbb{C}$) ne dépend pas de t et est donné par les zéros du polynôme caractéristique $P(h,z) = 0$. Ce dernier est l'équation affine d'une courbe elliptique, i.e., en posant $w = hz^{-1}$,

$$z^2 \prod_{j=1}^{3} (\alpha_j w - 1) + 2H_1 w - 2H_2 = 0,$$

où

$$H_1 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2\right), \qquad H_2 = \frac{1}{2}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right).$$

Le flot se linéarise sur la jacobienne de cette courbe elliptique c'est-à-dire sur la courbe elle-même. En conclusion, on a

Théorème 10. *Les équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe dans le cas d'Euler, s'intégrent au moyen de fonctions elliptiques.*

On considère le groupe $so(4)$, son algèbre de Lie $SO(4)$ et la forme de Killing dans $SO(4)$ $\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\, tr\ (X.Y)$, où

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & -x_4 \\ x_3 & 0 & -x_1 & -x_5 \\ -x_2 & x_1 & 0 & -x_6 \\ x_4 & x_5 & x_6 & 0 \end{pmatrix} \in so(4).$$

Une métrique invariante à gauche sur $SO(4)$ est définie par une application linéaire symétrique non-singulière $\Lambda : so(4) \longrightarrow so(4)$, $X \longmapsto \Lambda.X$, avec $\langle gX, gY\rangle = \left\langle X, \Lambda^{-1}.Y\right\rangle$, $g \in so(4)$. Dès lors le flot géodésique pour cette métrique s'écrit sous la forme (Equations d'Euler-Arnold),

$$\dot{X} = [X, \Lambda.X], \tag{3.2}$$

où

$$\Lambda.X = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 x_3 & \lambda_2 x_2 & -\lambda_4 x_4 \\ \lambda_3 x_3 & 0 & -\lambda_1 x_1 & -\lambda_5 x_5 \\ -\lambda_2 x_2 & \lambda_1 x_1 & 0 & -\lambda_6 x_6 \\ \lambda_4 x_4 & \lambda_5 x_5 & \lambda_6 x_6 & 0 \end{pmatrix} \in so(4).$$

L'équation (3.2) est un flot hamiltonien pour la structure symplectique de Kostant-Kirillov induite sur l'orbite

$$\mathcal{O} = \{Ad_g^*(X) = g^{-1}Xg : g \in so(4)\}, \quad X \in so(4), \tag{3.3}$$

formé par l'action coadjointe $Ad_g^*(X) = g^{-1}Xg$ du groupe $SO(4)$ sur le dual de l'algèbre de Lie $so(4)^* \approx so(4)$. Soient $Z_1Z_2, X \in so(4)$ et $\xi_1 = [X, Z_1]$, $\xi_2 = [X, Z_2]$ deux vecteurs tangents à l'orbite ci-dessus. Sur une telle orbite, la structure symplectique (entre ξ_1 et ξ_2) est définie par

$$(\xi_1, \xi_2) = \langle X, [Z_1, Z_2]\rangle = \langle [X, Z_1], Z_2\rangle.$$

Notons que l'orbite $\mathcal{O}$ (3.3) (espace de phase) est une sous-variété de dimension quatre. On a

$$\begin{aligned} \det\left(gXg^{-1}\right) &= \det X = \left(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6\right)^2, \\ tr\left(gXg^{-1}\right)^2 &= tr\left(X^2\right) = -2\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2\right). \end{aligned}$$

Il faut toujours chercher $tr\left(gXg^{-1}\right)^n$ pour n paire. Pour $n = 2$ on a obtenu trX^2, pour $n = 4$ on aura le produit de trX^2 avec $\det X$ donc pas de nouveautés et la même conclusion se repète pour $n = 6, 8, \ldots$ L'orbite $\mathcal{O}$ est donc définie par les deux invariants orbitaux suivants :

$$\sqrt{\det X} = x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6, \tag{3.4}$$

$$-\frac{1}{2}tr\left(X^2\right) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2. \tag{3.5}$$

Les fonctions H définies sur cette orbite déterminent des champs de vecteurs hamiltoniens $\dot{X} = [X, \nabla H(X)]$. Notons que ∇H est antisymétrique. En particulier

$$H = \frac{1}{2}\langle X, \Lambda X\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}\lambda_j x_j^2, \tag{3.6}$$

conduit au mouvement du flot géodésique (3.2). Ici on prend pour espace de phase, l'orbite de X. En effet, on peut être tenté de prendre $SO(4)$ mais ce choix est à exclure car la structure symplectique est dégénérée (en fait on n'a pas de structure symplectique tout simplement), par contre dans l'orbite de X la structure symplectique est non dégénérée. Les constantes du mouvement sont données par les deux invariants triviaux (3.4), (3.5) d'orbite $\mathcal{O}$ (3.3) et par un invariant non trivial H (3.6). L'espace de phase étant de dimension 4, alors pour que le système en question soit complètement intégrable, il faut trouver un quatrième invariant non trivial. Un calcul direct montre que le système est complètement intégrable si la condition suivante est satisfaite

$$\begin{aligned} &\lambda_1\lambda_6\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_5 - \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_6\lambda_5 - \lambda_3\lambda_6\lambda_4 - \lambda_3\lambda_2\lambda_5 \\ &+\lambda_4\lambda_2\lambda_5 + \lambda_4\lambda_1\lambda_3 - \lambda_4\lambda_1\lambda_5 + \lambda_6\lambda_2\lambda_3 - \lambda_6\lambda_2\lambda_5 - \lambda_1\lambda_6\lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Cette relation est invariante par translation cyclique : $1 \to 4$, $2 \to 5$, $3 \to 6$, et elle est vérifiée si

$$\left\{ \begin{array}{lll} \lambda_1 = \dfrac{\beta_2 - \beta_3}{\alpha_2 - \alpha_3}, & \lambda_2 = \dfrac{\beta_1 - \beta_3}{\alpha_1 - \alpha_3}, & \lambda_3 = \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \\ \lambda_4 = \dfrac{\beta_1 - \beta_4}{\alpha_1 - \alpha_4}, & \lambda_5 = \dfrac{\beta_2 - \beta_4}{\alpha_2 - \alpha_4}, & \lambda_6 = \dfrac{\beta_3 - \beta_4}{\alpha_3 - \alpha_4}, \end{array} \right. \tag{3.7}$$

avec $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $\prod_{j<k} (\alpha_j - \alpha_k) \neq 0$. Cette paramétrisation [37] implique que les équations (3.2) peuvent s'écrire sous la forme de Lax

$$\overbrace{X + \alpha h}^{\cdot} = [X + \alpha h, \Lambda X + \beta h], \tag{3.8}$$

avec $\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\beta = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, ce qui est équivalent

$$\begin{array}{rcl} \dot{X} & = & [X, \Lambda.X] \Longleftrightarrow (3.2), \\ {[X, \beta] + [\alpha, \Lambda.X]} & = & 0 \Longleftrightarrow (3.7), \\ {[\alpha, \beta]} & = & 0 \text{ satisfaite pour les matrices diagonales.} \end{array}$$

L'équation (3.8) est un flot hamiltonien sur une orbite définie dans une algèbre de Kac-Moody. Considérons donc l'extension de $gl(n, \mathbb{C})$ (pour $n = 4$) de l'algèbre de Kac-Moody

$$\mathcal{L} = \widetilde{gl(n, \mathbb{C})} = \left\{ \sum_{-\infty}^{N} A_i h^i : A_i \in gl(n),\ N \ \in \mathbb{Z},\ \text{arbitraire} \right\},$$

avec le commutateur $[A(h), B(h)] = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} [A_i, B_j] \right) h^k$ et la forme de Killing sur $gl(n, \mathbb{C})$, $\langle A(h), B(h) \rangle = \sum_{i+j=-1} tr(A_i B_j)$. On obtient ainsi une forme bilinéaire, ad-invariante, non dégénérée et symétrique. En outre, cette algèbre de Lie admet une décomposition naturelle $\mathcal{L} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{N}$, avec $\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i \geq 0} A_i h^i \right\}$, $\mathcal{N} = \left\{ \sum_{i<0} B_i h^i \right\}$. On a pour la forme de Killing ci-dessus $\mathcal{K}^\perp = \mathcal{K}$, $\mathcal{N}^\perp = \mathcal{N}$ où $\mathcal{K}^\perp$ et $\mathcal{N}^\perp$ désignent l'orthogonal de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{N}$ respectivement. Le dual de $\mathcal{N}$ s'identifie à $\mathcal{K}$, i.e., $\mathcal{N}^* \approx \mathcal{K}^\perp = \mathcal{K}$. Le groupe de Lie de dimension infinie sous-jacent à $\mathcal{N}$ agit de manière coadjointe sur le dual $\mathcal{N}^*$ et définit sur ses orbites une structure symplectique avec un crochet de Poisson $\{H_1, H_2\}(a) = \langle a, [\nabla_{\mathcal{N}^*} H_1, \nabla_{\mathcal{N}^*} H_2] \rangle$, où $a \in \mathcal{N}^*$ et $\nabla_{\mathcal{N}^*} H_j \in \mathcal{N}$, $j = 1, 2$. Toutes les fonctions définies sur cette orbite sont en involution en vertu du théorème d'Adler-Kostant-Symes et les champs de vecteurs correspondants s'écrivent sous la forme $\dot{a} = [a, \mathrm{Proj}_{\mathcal{K}} \nabla H]$. L'élément $a = X + \alpha h \in \mathcal{N}^*$ comme dans l'équation (3.8), définit une orbite dans $\mathcal{N}^*$ et une structure symplectique; toutes les fonctions $\mathcal{L}$-invariantes $\frac{1}{k} \left(a h^{-1} \right)^k h^2$, $k \geq 3$, fournissent des champs de vecteurs hamiltoniens commutants

$$\overbrace{X + \alpha h}^{\cdot} = \left[X + \alpha h, \mathrm{Proj}_{\mathcal{K}} \left((X h^{-1} + \alpha)^{k-1} h \right) \right] = [X + \alpha h, Y + \beta h],$$

où $Y_{ij} = \frac{\alpha_i^{k-1} - \alpha_j^{k-1}}{\alpha_i - \alpha_j} X_{ij}$, $\beta = \alpha^{k-1}$. En prolongeant ce fait aux fonctions analytiques, on obtient l'équation de Lax (3.8). Cette dernière signifie que pour tout $h \in \mathbb{C}$, le spectre de la matrice $(X + \alpha h)$ est un invariant (ne dépend pas de t) de la trajectoire de $X + \alpha h$ sous le flot (3.8). Autrement dit, Les coefficients de $z^i h^i$ apparaissant dans l'équation définissant la surface de Riemann

$$\Gamma : \quad \left\{ (z, h) \in \mathbb{C}^2 : \det (X + \alpha h - zI) = 0 \right\}, \tag{3.9}$$

associée à l'équation (3.8), sont des intégrales premières en involution pour la structure symplectique de cette orbite. En effet, explicitement on a

$$\det(X + \alpha h - zI) = \prod_{j=1}^{4} (\alpha_j h - z) + Q_2 z^2 - Q_3 z h + Q_4 h^2 + Q_1^2,$$

où

$$\begin{aligned}
Q_1 &\equiv x_6 x_3 + x_4 x_1 + x_2 x_5, \\
Q_2 &\equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2, \\
Q_3 &\equiv (\alpha_1 + \alpha_4) x_1^2 + (\alpha_2 + \alpha_4) x_2^2 + (\alpha_3 + \alpha_4) x_3^2 \\
&\quad + (\alpha_2 + \alpha_3) x_4^2 + (\alpha_1 + \alpha_3) x_5^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_6^2, \\
Q_4 &\equiv \alpha_1 \alpha_4 x_1^2 + \alpha_2 \alpha_4 x_2^2 + \alpha_3 \alpha_4 x_3^2 + \alpha_2 \alpha_3 x_4^2 + \alpha_1 \alpha_3 x_5^2 + \alpha_1 \alpha_2 x_6^2.
\end{aligned}$$

Notons que Q_1 et Q_2 sont les invariants d'orbites trouvés dans (3.4) et (3.5). On peut vérifier aisément que Q_1 et Q_2 sont des invariants triviaux tandis que Q_3 et Q_4 sont des invariants non triviaux. Ces intégrales premières sont en involution et fonctionnellement indépendantes. En posant $Q_j = c_j$, $1 \leq j \leq 4$, où c_j sont des constantes génériques, on obtient

$$\Gamma : \prod_{j=1}^{4} (\alpha_j h - z) + c_2 z^2 - c_3 z h + c_4 h^2 + c_1^2 = 0.$$

En faisant le changement de carte suivant $(h, z) \longmapsto \left(w = h^{-1}, u = z h^{-1} \right)$, l'équation ci-dessus s'écrit

$$\Gamma : \prod_{j=1}^{4} (\alpha_j - u) + \left(c_2 u^2 - c_3 u + c_4 \right) w^2 + c_1^2 w^4 = 0. \tag{3.10}$$

L'application $\sigma : \Gamma \longrightarrow \Gamma$, $(w, u) \longmapsto (-w, u)$, est une involution sur Γ et le quotient $\Gamma_0 = \Gamma / \sigma$ est une courbe elliptique définie par

$$\Gamma_0 : v^2 = \left(c_2 u^2 - c_3 u + c_4 \right)^2 - 4 c_1^2 \prod_{j=1}^{4} (\alpha_j - u). \tag{3.11}$$

La courbe Γ est un revêtement double $\Gamma \longrightarrow \Gamma_0$, $(w, v, u) \longmapsto (v, u)$, ramifié le long de Γ_0,

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{l} w^2 = \dfrac{v - c_2u^2 + c_3u - c_4}{2c_1^2}, \\ v^2 = \left(c_2u^2 - c_3u + c_4\right)^2 - 4c_1^2 \prod_{j=1}^{4} (\alpha_j - u) . \end{array} \right. \tag{3.12}$$

La courbe Γ possède quatre points à l'infini p_j $(1 \leq j \leq 4)$ et quatre points de branchements $q_j \equiv (w = 0, v = c_2u^2 - c_3u + c_4, u = \alpha_j)$, $(1 \leq j \leq 4)$, sur la courbe elliptique Γ_0. La structure des diviseurs de α et β est

$$(w) = \sum_{j=1}^{4} q_j - \sum_{j=1}^{4} p_j, \qquad (u) = 4 \text{ zéros} - \sum_{j=1}^{4} p_j.$$

D'après la formule de Riemann-Hurwitz [20], le genre de la courbe Γ est 3. La variété jacobienne $Jac(\Gamma)$ se décompose en deux parties : une partie paire $Jac\,(\Gamma_0)$ c'est-à-dire ici une courbe elliptique $\Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ et une partie impaire notée $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$ (variété de Prym). La méthode de linéarisation étudiée précédement détermine une application algébrique de la variété affine complexe $\bigcap_{j=1}^{4} \{x : Q_j(x) = c_j\} \subset \mathbb{C}^6$, vers la variété de Jacobi $Jac\,(\Gamma)$ et par l'antisymétrie de Γ, cette application envoie cette variété vers la variété de Prym $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$:

$$\bigcap_{j=1}^{4} \{x : Q_j(x) = c_j\} \longrightarrow Prym(\Gamma/\Gamma_0), \quad x \longmapsto s_1 + s_2 + s_3,$$

de telle façon que les flots complexes engendrés par les constantes du mouvement soient des mouvements rectilignes sur la variété $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$, i.e.,

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{3} \int_{p_j}^{s_j(t)} (\omega_1, \omega_2, \omega_3)}^{\cdot} = (0, k, l),$$

où $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une base de différentielles holomorphes sur la courbe Γ telle que: $\sigma^*\omega_1 = \omega_1$, $\sigma^*\omega_2 = -\omega_2$ et $\sigma^*\omega_3 = -\omega_3$ pour l'involution σ. Finalement, on a le résultat [4, 5, 22, 31] suivant :

Théorème 11. *Sous la condition (3.7), les équations d'Euler-Arnold (3.2) se linéarisent sur la variété* $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$ *où* Γ *(3.10) ou (3.12) est une surface de Riemann de genre 3 et* Γ_0 *(3.11) est une courbe elliptique.*

3.2 Potentiel quartique, système de Garnier, équations couplées non-linéaires de Schrödinger et champ de Yang-Mills avec groupe de jauge $SU(2)$

Considérons le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2\right) + \frac{1}{4}\left(y_1^2 + y_2^2\right)^2, \tag{3.13}$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes. Le système correspondant est donné par

$$\ddot{y}_1 = \left(\lambda_1 - y_1^2 - y_2^2\right) y_1, \qquad \ddot{y}_2 = \left(\lambda_2 - y_2^2 - y_1^2\right) y_2. \tag{3.14}$$

Pour de plus amples informations concernant le système de Garnier on pourra consulter par exemple les références [19, 47, 54].

Théorème 12. *Le système différentiel (3.14) admet une paire de Lax de sorte que la fonction*

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{4}\left((x_1y_2 - x_2y_1)^2 - \left(\lambda_2 y_1^4 + \lambda_1 y_2^4\right) - (\lambda_1+\lambda_2)\, y_1^2 y_2^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\lambda_1\lambda_2\left(y_1^2+y_2^2\right) - \left(\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2\right)\right). \end{aligned}$$

est une intégrale première quartique et la linéarisation s'effectue sur la jacobienne d'une courbe hyperelliptique de genre 2.

Démonstration. Considérons la forme de Lax (1.1) et choisissons suivant une méthode d'Eilbeck & al. [16] (voir aussi [35]) les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} U & V \\ W & -U \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ R & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} V &= -(h-\lambda_1)(h-\lambda_2)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{h-\lambda_1} + \frac{y_2^2}{h-\lambda_2}\right)\right), \\ U &= \frac{1}{2}(h-\lambda_1)(h-\lambda_2)\left(\frac{x_1y_1}{h-\lambda_1} + \frac{x_2y_2}{h-\lambda_2}\right), \\ W &= (h-\lambda_1)(h-\lambda_2)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{h-\lambda_1} + \frac{x_2^2}{h-\lambda_2}\right) - h + \frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)\right), \\ R &= h - y_1^2 - y_2^2. \end{aligned}$$

Explicitement, l'équation (1.2) fournit

$$\mathcal{H} : z^2 = P_5(h) == (h-\lambda_1)(h-\lambda_2)\left(h^3 - (\lambda_1+\lambda_2)h^2 + (\lambda_1\lambda_2 - H_1)h - H_2\right), \tag{3.15}$$

avec $H_1 \equiv H$ (3.13) et

$$\begin{aligned} H_2 &= -\frac{1}{4}\left(\lambda_2 y_1^4 + \lambda_1 y_2^4 + (\lambda_1+\lambda_2) y_1^2 y_2^2 - (x_1y_2 - x_2y_1)^2\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2 - \lambda_1\lambda_2(y_1^2+y_2^2)\right). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que les deux intégrales premières H_1 et H_2 sont en involution et que le système en question est intégrable. Le flot est donc linéaire dans la variété jacobienne de la courbe d'équation affine (3.15). Le polynôme $P_5(h)$ étant de degré cinq, la courbe est de genre 2 et on a donc une linéarisation sur la jacobienne d'une courbe hyperelliptique de genre 2. Introduisons, suivant une méthode de Vanhaecke [54], deux coordonnées s_1 et s_2 sur la surface invariante

$$M_c = \bigcap_{i=1}^{2} \left\{ x \in \mathbb{C}^4 : H_i(x) = c_i \right\},$$

telles que : $M_c(s_i) = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, i.e.,

$$s_1 + s_2 = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) + \lambda_1 + \lambda_2, \tag{3.16}$$

$$s_1 s_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda_2 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2\right) + \lambda_1 \lambda_2. \tag{3.17}$$

Un calcul direct montre que :

$$\dot{s}_1 = 2\frac{\sqrt{P_5(s_1)}}{s_1 - s_2}, \qquad \dot{s}_2 = 2\frac{\sqrt{P_5(s_2)}}{s_2 - s_1},$$

où le polynôme $P_5(s)$ est défini par (3.15). Ces équations s'intégrent via l'application d'Abel

$$\mathcal{H} \longrightarrow Jac(\mathcal{H}) = \mathbb{C}^2/\Lambda \ , \ p \longmapsto \left(\int_{p_0}^{p} \omega_1 \ , \ \int_{p_0}^{p} \omega_2 \right),$$

$\mathcal{H}$ est la surface de Riemann hyperelliptique donnée par l'équation (3.15), Λ est le réseau engendré par les vecteurs $n_1 + \Omega n_2$, $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, Ω est la matrice des périodes de la surface de Riemann $\mathcal{H}$ et (ω_1, ω_2) une base de différentielles holomorphes sur $\mathcal{H}$, i.e.,

$$\omega_1 = \frac{ds}{\sqrt{P_5(s)}} \ , \quad \omega_2 = \frac{sds}{\sqrt{P_5(s)}},$$

avec p_0 un point fixé. $\square$

En utilisant la théorie des lacunes [10], on peut exprimer les solutions du problème en termes de fonctions elliptiques. On utilise à cette fin, la fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass, la fonction elliptique de Backer-Akhiezer ainsi que quelques propriétés de l'équation aux dérivées partielles non-linéaire de Korteweg-de-Vries. Les solutions en termes de fonctions elliptiques que l'on cherche à déterminer sont solutions du problème spectral suivant :

$$L\psi = \lambda\psi, \tag{3.18}$$

où $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathcal{U}(x)$, est l'opérateur de Strum-Liouville dépendant du potentiel elliptique

$$\mathcal{U}(x) = 2\sum_{i=1}^{N} \wp(x - x_i) + C, \tag{3.19}$$

et λ est un paramètre spectral. Ici $\psi = \psi(x, \lambda)$ est un vecteur propre (fonction elliptique de Backer-Akhiezer) de l'opérateur L, $\wp$ est la fonction elliptique de Weierstrass, C est une constante et $x_1, ..., x_N$ appartiennent au lieu

$$\Delta = \left\{ (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{C}^N : \sum_{i \neq j} \wp'(x_i - x_j) = 0, \ x_i \neq x_j, \ j = 1, ..., N \right\}.$$

La géométrie du lieu Δ a été étudiée par plusieurs auteurs (voir [7] par exemple). On sait que Δ est non vide pour $N = \frac{g(g+1)}{2}$, où g est le nombre de lacunes dans le spectre ou ce qui revient au même le genre de la courbe hyperelliptique associée. Lorsque $x_i = x_i(t)$, $j = 1, ..., N$, évolue selon la loi

$$\dot{x}_i = -12 \sum_{i \neq j} \wp(x_i - x_j),$$

alors [7] la fonction (3.19) est une solution elliptique de l'équation de Korteweg-de Vries :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

et il existe une relation avec le système complètement intégrable de Calogero-Moser décrit par le hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2\sum_{i \neq j} \wp(x_i - x_j),$$

où y_i, x_i, $i = 1, ..., N$ sont des variables canoniques. Considérons le potentiel associé à l'équation (3.18) et normalisé à l'aide de son développement au voisinage de $x = 0$ comme suit

$$\mathcal{U}(x) = \frac{6}{x^2} + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^6 + \alpha_4 x^8 + \cdots \tag{3.20}$$

Ce potentiel satisfait à l'équation de Novikov [46] : $\sum_{i=-1}^{2} c_i \frac{\delta S_i}{\delta u} = 0$, où c_i sont des constantes, $\dfrac{\delta S_i}{\delta u}$ est la dérivée variationnelle de la fonctionnelle S_i, et

$$S_{-1} = \int u dx, \qquad S_1 = \int \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u^3 \right) dx,$$

$$S_0 = \int u^2 dx, \qquad S_2 = \int \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{5}{2}u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{5}{2}u^4 \right) dx,$$

sont des intégrales premières de l'équation de Korteweg-de Vries. Dès lors la courbe algébrique associée au potentiel (3.20) a la forme [9] :

$$\begin{aligned} w^2 &= z^5 - 35\alpha_1 z^3 - 63\alpha_2 z^2 + \frac{1}{2}\left(567\alpha_1^2 + 297\alpha_3\right) z + 1377\alpha_1\alpha_2 - 1287\alpha_4, \\ &= \prod_{i=1}^{5} (z - z_i). \end{aligned} \tag{3.21}$$

On déduit de la formule des traces [46], que

$$s_1 + s_2 = -\sum_{i=1}^{N} \wp(x - x_j) - \frac{C}{2}, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= 3\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\langle j}}^{N} \wp(x - x_i)\wp(x - x_j) - \frac{1}{8} N g_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\langle j}}^{5} z_i z_j + \frac{3C}{2}\sum_{i=1}^{N} \wp(x - x_i) + \frac{3C^2}{8}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

où $z_1, ..., z_5$ sont les points de branchements de la courbe d'équation (3.21). Nous voulons que la courbe spectrale $\mathcal{H}$ (3.15) soit associée à la courbe algébrique (3.21). Soient z_α et z_β deux points distincts sur la courbe (3.21) lesquels seront subtitués aux points de branchements λ_1, λ_2 de la courbe $\mathcal{H}$ (3.15). En utilisant le système de Garnier (3.14) ainsi que les expressions (3.16), (3.17), (3.22), (3.23) et (3.19), on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - \mathcal{U}(x) y_1 &= (\lambda_1 - 2(z_\alpha + y_\beta)) y_1, \\ \ddot{y}_2 - \mathcal{U}(x) y_2 &= (\lambda_2 - 2(z_\alpha + y_\beta)) y_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

Théorème 13. *Supposons que $\lambda_1 = 3z_\alpha + 2z_\beta$ et $\lambda_2 = 2z_\alpha + 3z_\beta$ où z_α et z_β sont deux points de branchements sur la surface de Riemann d'équation (3.21). Alors les solutions du système en question sont données par*

$$y_1^2 = \frac{1}{z_{\alpha\beta}}\left\{\Phi + 2z_\alpha^2 + (3C - 2z_\alpha)\sum_{i=1}^{N} \wp(x - x_i) + \left(\frac{3C}{4} - z_\alpha\right) C\right\},$$

$$y_2^2 = \frac{-1}{z_{\alpha\beta}}\left\{\Phi + 2z_\beta^2 + (3C - 2z_\beta)\sum_{i=1}^{N} \wp(x - x_i) + \left(\frac{3C}{4} - z_\beta\right) C\right\},$$

où $z_{\alpha\beta} \equiv z_\alpha - z_\beta$,

$$\Phi \equiv 6 \sum_{1 \leq i \langle j \leq N} \wp(x - x_i) \wp(x - x_j) - \frac{N g_2}{4} + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} z_i z_j,$$

et $z_1, ..., z_5$ *sont les points de branchements sur la surface de Riemann (3.21) et* $\wp$ *est la fonction elliptique de Weierstrass.*

Les équations couplées non linéaires de Schrödinger [11] s'écrivent:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \Omega_0 a + \frac{2}{3}\left(|a|^2 + |b|^2\right) a + \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2\right)\overline{a} &= 0, \\ i\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - \Omega_0 b + \frac{2}{3}\left(|a|^2 + |b|^2\right) b + \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2\right)\overline{b} &= 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Les fonctions $a(z,t)$ et $b(z,t)$ dépendent des variables z et t, la notation "$-$" désigne l'opérateur de conjugaison complexe, "||" désigne le module et enfin Ω_0 est une constante. On cherche les solutions de (3.24) sous la forme :

$$a(z,t) = y_1(t) \exp(i\Omega z), \qquad b(z,t) = y_2(t) \exp(i\Omega z),$$

où $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont deux fonctions et Ω une constante arbitraire. Dès lors, on obtient un système de deux équations différentielles non-linéaires de second ordre :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \left(y_1^2 + y_2^2\right) y_1 &= (\Omega - \Omega_0) y_1, \\ \ddot{y}_2 + \left(y_1^2 + y_2^2\right) y_2 &= (\Omega + \Omega_0) y_2. \end{aligned}$$

Ce dernier s'écrit sous la forme du système hamiltonien (3.13) avec $\lambda_1 = \Omega - \Omega_0$, $\lambda_2 = \Omega + \Omega_0$ et il suffit d'appliquer les résultats obtenus précédemment.

Soit F_{kl} le champ de Yang-Mills dans l'algèbre de Lie $T_e su(2)$ du groupe $su(2)$. C'est une expression locale du champ de Jauge ou connexion A_k définissant la dérivée covariante de F_{kl} à l'aide de l'expression:

$$\nabla_k F_{kl} = \frac{\partial F_{kl}}{\partial \tau_k} + [A_k, F_{kl}] = 0, \qquad F_{kl}, A_k \in T_e su(2), \quad 1 \leq k, l \leq 4,$$

dans laquelle $[A_k, F_{kl}]$ est le crochet des deux champs dans l'algèbre de Lie du groupe de Lie $SU(2)$ et

$$F_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial \tau_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \tau_l} + [A_k, A_l],$$

Dans le cas qui nous intéresse, on a $\frac{\partial A_l}{\partial \tau_k} = 0$, $(k \neq 1)$, $A_1 = A_2 = 0$, $A_3 = n_1 U_1 \in su(2)$, $A_4 = n_2 U_2 \in su(2)$, où $n_1 = [n_2, [n_1, n_2]]$ et $n_2 = [n_1, [n_2, n_1]]$ engendre $su(2)$ et le système de Yang-Mills devient

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + U_1 U_2^2 = 0, \qquad \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + U_2 U_1^2 = 0,$$

avec $t = \tau_1$. En posant $U_1 = q_1$, $U_2 = q_2$, $\frac{\partial U_1}{\partial t} = p_1$, $\frac{\partial U_2}{\partial t} = p_2$, les équations de Yang-Mills s'écrivent sous la forme d'un champ de vecteurs hamiltonien

$$\dot{x} = J\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x = (q_1, q_2, p_1, p_2)^\intercal, \quad J = \begin{pmatrix} O & -I \\ I & O \end{pmatrix},$$

où $H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 q_2^2\right)$. Ce système hamiltonian joue un rôle important en théorie des champs. En utilisant la transformation symplectique $p_1 = \alpha(x_1 + x_2)$, $p_2 = \alpha(x_1 - x_2)$, $q_1 = \beta(y_1 + iy_2)$, $q_2 = \beta(y_1 - iy_2)$, où $\alpha \equiv \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\beta \equiv \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{2}\right)^3$, on réecrit le hamiltonien ci-dessus sous la forme

$$H = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{4}\left(y_1^2 + y_2^2\right)^2,$$

lequel coincide évidemment avec (3.13) pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Références

[1] M. Adams, J. Harnad and E. Previato, *Isospectral Hamiltonian Flows in Finite and Infinite Dimensions. I. Generalized Moser Problem and Moment Maps into Loop Algebras*, Commun. Math. Phys., **117** (1988), 451-500. MR0953833(MR89k:58112). Zbl 0659.58022.

[2] M. Adams, J. Harnad and J. Hurtubise, *Isospectral Hamiltonian Flows in Finite and Infinite Dimensions II. Integration of Flows*, Commun. Math. Phys., **134** (1990), 555-585. MR1086744(MR92a:58055). Zbl 0717.58051.

[3] M. Adler, *On a trace functional for pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries equation*, Invent. Math., **50** (1979), 219-248. MR0520927(80i:58026) Zbl 0393.35058.

[4] M. Adler, P. and van Moerbeke, *Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves*, Adv. in Math., **38** (1980), 267-317. MR0597729(83m:58041). Zbl 0455.58017.

[5] M. Adler, P. and van Moerbeke, *Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory*, Adv. in Math., **38** (1980), 318-379. MR0597730(83m:58042). Zbl 0455.58010.

[6] M. Adler, P., van Moerbeke and P. Vanhaecke, *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, A series of modern surveys in mathematics, Volume **47**, Springer-Verlag, 2004. MR2095251(MR2006d:37106). Zbl 1083.37001.

[7] H. Airault, H. P. Mc Kean and J. Moser, *Rational and elliptic solutions of the KdV equation and a related many-body problem*, Comm. Pure Appl. Math., **30** (1977), 94-148. MR0649926(58:31214). Zbl 0338.35024.

[8] V. I. Arnold, *Mathematical methods in classical mechanics*, Springer-Verlag, 1978. MR0690288(MR57:14033b). Zbl 0386.70001.

[9] A. I. Belokolos and V. Z. Enol'skii, *Isospectral deformations of elliptic potentials*, Russ. Math. Surveys, **44** (1989), 155-156. MR1040275(91c:58046).

[10] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'skii, A.R. Its and V.B. Matveev, *Algebro-Geometric approach to nonlinear integrable equations*, Springer-Verlag, 1994. Zbl 0809.35001.

[11] P. L. Christiansen, J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii and N. A. Kostov, *Quasi-periodic and periodic solutions for systems of coupled nonlinear Schrödinger equations*, Proc. Roy. Soc., A **456** (2000), 2263-2281. MR1794725(2001h:37153).

[12] P. Deift, F. Lund, E. Trubowitz, *Nonlinear wave equations and constrained harmonic motion*, Comm. Math. Phys., **74** (1980), 141-188. MR0576269(82g:35102). Zbl 0435.35072.

[13] L. A. Dikii, *Hamiltonian systems connected with the rotation group*, Funct. Anal. Appl., **6** (1972), 83-84. MR312527(47:1084). Zbl 0288.58004.

[14] B. A. Dubrovin and S. P. Novikov, *Periodic and conditionally periodic analogs of the many-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation*, Sov. Phys.-JETP, **40** (1975), 1058-1063. MR0382877(52:3759).

[15] B. A. Dubrovin, *Theta functions and non-linear equations*, Russian Math. Surveys, **36** (2) (1981), 11-92. MR0616797(83i:35149)

[16] J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, V. B. Kuznetsov and A. V. Tsiganov, *Linear r-matrix algebra for classical separable systems*, J. Phys. A.: Math. Gen., **27** (1994), 567-578.

[17] H. Flaschka, *The Toda lattice I*, Phys. Rev., B **9**, 1924-1925; The Toda lattice II. *Progr. Theor. Phys.* **51** (1974), 703-716. MR408647(MR53:12412). Zbl 0942.37504.

[18] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. review letters, **19** (1967), 1095-1097. Zbl 1103.35360.

[19] R. Garnier, *Sur une classe de systèmes différentiels abéliens déduits de la théorie des équations linéaires*, Ren. Circ. Math. Palermo, **43**(4) (1919), 155-191.

[20] P. A. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience 1978. MR0507725(80b:14001). Zbl 0408.14001.

[21] P. A. Griffiths, *Linearizing flows and a comological interpretation of Lax equations*, Amer. J. of Math., **107** (1985), 1445-1483. MR0815768(87c:58048). Zbl 0585.58028.

[22] L. Haine, *Geodesic flow on $SO(4)$ and Abelian surfaces*, Math. Ann., **263** (1983), 435-472. MR0707241(84k:14031). Zbl 0521.58042.

[23] N. J. Hitchin, *On the construction of monopoles*, Comm. Math. Phys., **89** (1983), 145-190. MR0709461. Zbl 0517.58014.

[24] A. R. Its and V. B. Matveev, *Schrdinger operators with finite-gap spectrum and N-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation*, Theoret. Math. Phys., **23** (1975), 343-355. MR0479120(57:18570).

[25] H. Knörrer, *Geodesics on the ellipsoid*, Invent. Math., **59** (1980), 119-143. MR0577358(81h:58050).

[26] H. Knörrer, *Geodesics on quadrics and a mechanical problem of C. Neumann*, J. Reine Angew. Math., **334** (1982), 69-78. MR0667450(84b:58089).

[27] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves*, Phil. Mag., **39** (1895), 422-443. JFM 26.0881.02.

[28] B. Kostant, *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory*, Adv. in Math., **34** (1979), 195-338. MR550790(MR82f:58045).

[29] I. M. Krichever, *Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations*, Russian Math. Surveys, **32**(6) (1977), 185-213. MR494262(MR58:24353).

[30] P. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure and Appl. Math., **21** (1968), 467-490. MR235310(MR38:3620). Zbl 0162.41103.

[31] A. Lesfari, *Geodesic flow on SO(4), Kac-Moody Lie algebra and singularities in the complex t-plane*, Publ. Mat., Barc., **43**(1) (1999), 261-279. MR1697525(MR2000f:37078.) Zbl 0968.35010.

[32] A. Lesfari, *Completely integrable systems: Jacobi's heritage*, J. Geom. Phys., **31** (1999), 265-286. MR1711527(MR2000f:37077). Zbl 0937.37046.

[33] A. Lesfari, *The problem of the motion of a solid in an ideal fluid. Integration of the Clebsch's case*, Nonlinear Diff. Eq. Appl., **8** (2001), 1-13. MR1828945. Zbl 0982.35085.

[34] A. Lesfari, *Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences*, Elem. Math., **58**(1) (2003), 6-20. MR1961831(2004e:37091). Zbl 1112.37043.

[35] A. Lesfari and A. Elachab, *On the integrability of the generalized Yang-Mills system*, Appl. Math., (Warsaw), **31**(3) (2004), 345-351. Zbl 1125.37050.

[36] A. Lesfari, *Integrable systems and complex geometry*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **30**(4) (2009), 292-326.

[37] S. V. Manakov, *A remark on the integration of the Euler equations of the dynamics of an n-dimensional rigid body*, Functional Anal. Appl, **10** (1976), 328-329. MR0455031(56 #13272) .

[38] H. P. Mc Kean and P. van Moerbeke, *The spectrum of Hill's equation*, Invent. Math., **30** (1975), 217-274. MR397076(MR53:936). Zbl 0319.34024.

[39] H. P. Mc Kean and E. Trubowitz, *Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points*, Comm. Pure. Appl. Math., **29** (1976), 143-226. MR427731(MR55:761).

[40] A. S. Mishchenko and A.T. Fomenko, *The Euler equations on finite-dimensional Lie groups*, Math. USSR-Izv, **42** (1978), 371-389. MR0482832(58 #2881).

[41] J. Moser, *Geometry of quadrics and spectral theory*, Chern Sympos., Springer-Verlag, pp. 147-188, 1980. MR609560(MR82j:58064.) Zbl 0455.58018.

[42] J. Moser, *Various aspects of integrable Hamiltonian systems*, Progress in Math. **8**, 223-289, Birkhäuser-Verlag, 1980. MR0589592(83a:58042a).

[43] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta II*, Progress in Math., Birkhauser, Boston, 1984. MR742776(MR86b:14017.) Zbl 0549.14014.

[44] W. Nahm, *All self-dual multi-monopoles for all gauge groups*, CERN-TH-3172, Sep 1981. 10pp. Presented at Int. Summer Inst. on Theoretical Physics, Freiburg, West Germany, Aug 31 - Sep 11, 1981.

[45] C. Neumann, *De problemate quodam mechanics, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur*, Reine und Angew. Math. J., **56** (1859), 46-63. ERAM 056.1472cj.

[46] S. P. Novikov, *The periodic problem for for the Korteweg-de-Vries equation*, Funct. Anal. Pril., **8** (1974), 53-66. MR0382878(52 #3760).

[47] A. M. Perelomov, *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras*, Birkhäuser, 1990. MR1048350 Zbl 0717.70003.

[48] A. G. Reyman and M.A. Semenov-Tian-Shansky, *Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations I*, Invent. Math., **54** (1) (1979), 81-100. MR0549548(81b:58021). Zbl 0403.58004.

[49] A. G. Reyman and M.A. Semenov-Tian-Shansky, *Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations II*, Invent. Math., **63**(3) (1981), 423-432. MR620678(MR82k:58049). Zbl 0442.58016.

[50] W. Symes, *Systems of Toda type, inverse spectral problems and representation theory*, Invent. Math., **59** (1980), 13-51. MR575079. Zbl 0474.58009.

[51] M. Toda, *Wave propagation in anharmonic lattices*, J. Phys. Soc. of Japan, **23** (1967), 501-506.

[52] P. van Moerbeke, *The spectrum of Jacobi matrices*, Invent. Math., **37** (1976), 45-81. MR0650253(58 #31226). Zbl 0361.15010.

[53] P. van Moerbeke and D. Mumford, *The spectrum of difference operators and algebraic curves*, Acta Math., **143** (1979), 93-154. MR0533894(80e:58028). Zbl 0502.58032.

[54] P. Vanhaecke, *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, Lecture Notes in Math., 1638, Springer-Verlag, Second edition 2001. MR1850713(MR2003a:14053). Zbl 0997.37032.

[55] V. E. Zaharov and L.D. Faddeev, *Korteweg-de Vries equation is a fully integrable Hamiltonian system*, Funktsional Anal. i Prilozhen, **5** (1971), 18-27. MR0303132(46 #2270),

Ahmed Lesfari
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences, Université Chouaïb Doukkali,
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
e-mail: lesfariahmed@yahoo.fr