Séminaire Lotharingien de Combinatoire **70** (2013), Article B70a

SUR UNE SÉRIE EN ARBRES À DEUX PARAMÈTRES

F. CHAPOTON*

Résumé. On introduit une série en arbres $\mathbb{A}$, dont les coefficients sont des polynômes en x à coefficients dans $\mathbb{Q}(q)$. On considère les spécialisations de cette série en différentes valeurs de x, dont les q-entiers. Par une certaine limite en $x = -1/q$, on retrouve essentiellement la série en arbres Ω_q introduite dans un article antérieur, elle-même un q-analogue d'une série en arbres classique.

Abstract. We define a new tree-indexed series $\mathbb{A}$, with coefficients that are polynomials in x over the ring $\mathbb{Q}(q)$. Several special evaluations of this series are obtained, in particular when x is replaced by a q-integer. By taking a limit value when $x = -1/q$, we recover the tree-indexed series Ω_q that was introduced in a previous article as a q-analog of a classical tree-indexed series Ω.

Introduction

Les arbres enracinés sont des objets combinatoires simples et classiques, qui sont apparus pour la première fois en mathématiques dans un article de Cayley [5] portant sur les champs de vecteurs. Depuis lors, ils sont également intervenus dans des domaines variés, notamment en analyse numérique dans les travaux fondateurs de Butcher [3] sur les méthodes de Runge–Kutta.

Des structures algébriques très riches en relation avec les arbres enracinés ont été mises en évidence plus récemment, en particulier plusieurs structures d'algèbres de Hopf, ainsi que les groupes qui leur sont associés. On peut citer en particulier leur rôle dans le point de vue de Connes et Kreimer sur la renormalisation [13].

La plupart de ces structures sont dérivées de la structure d'algèbre pré-Lie libre sur les espaces vectoriels d'arbres enracinés décorés. Au centre de tout ceci se trouve l'opérade PreLie, qui décrit toutes les algèbres pré-Lie libres simultanément. La structure d'opérade permet en particulier de définir une loi de groupe sur le complété de l'algèbre pré-Lie libre sur un générateur, qui est un analogue de la loi de composition des séries formelles. On appelle les éléments de ce complété des séries en arbres.

Le sujet principal du présent article est une série en arbres particulière $\mathbb{A}$ dont les coefficients dépendent de deux variables x et q. Cette série se place dans le

*Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche (projet Carma, référence ANR-12-BS01-0017).

contexte de plusieurs séries en arbres plus simples, étudiées dans des articles antérieurs.

La première de ces séries en arbres est définie par

$$\sum_T \frac{1}{T!}\frac{T}{\mathrm{aut}(T)},$$

où la somme porte sur les arbres enracinés, $T!$ est une fonction combinatoire simple appelée la factorielle de l'arbre T et $\mathrm{aut}(T)$ est le cardinal du groupe d'automorphismes de T. Cette série apparaît naturellement comme solution formelle pour l'équation différentielle ordinaire décrivant le flot d'un champ de vecteur. Elle joue donc un rôle central dans la théorie de Butcher portant sur les méthodes de Runge–Kutta.

Comme cette série est un élément du groupe des séries en arbres, on peut considérer son inverse Ω dans ce groupe, qui joue également un rôle en analyse numérique ("analyse rétrograde de l'erreur"). La série en arbres Ω est un objet nettement plus complexe, dont certains coefficients sont des nombres de Bernoulli.

Par le biais d'une relation entre Ω et une certaine famille d'idempotents de Lie dans les algèbres de descentes des groupes symétriques, une nouvelle série en arbres Ω_q a été définie dans [6], dont les coefficients dépendent de la variable q. La série Ω_q est un q-analogue de la série Ω, au sens où la spécialisation $\Omega_{q=1}$ redonne Ω.

Une description du coefficient Ω_T d'un arbre enraciné T dans la série Ω a été obtenue dans [22]. Voici une description équivalente, détaillée dans [17]. On associe à chaque arbre T un polynôme P_T en x, dont la valeur en $x = n$ compte les coloriages décroissants des sommets de T par les entiers de 0 à n. Le coefficient Ω_T est alors donné par la dérivée en $x = -1$ du polynôme P_T.

On obtient ici un q-analogue de ce résultat, qui donne une description similaire du coefficient de T dans la série Ω_q, ou plus exactement dans une légère variante $\overline{\Omega}_q$. Cette description fait intervenir pour chaque arbre T un polynôme en x à coefficients dans $\mathbb{Q}(q)$, noté $♙_T$. La série en arbres ♙ regroupe tous ces polynômes en un objet global, que l'on caractérise par une équation fonctionnelle, et dont on étudie diverses spécialisations.

Les coefficients de la série ♙ admettent une interprétation naturelle en termes de polytopes : ce sont des q-analogues de polynômes d'Ehrhart, dont la théorie générale est développée dans [9].

L'article est organisé comme suit. La section 1 introduit diverses notations sur les arbres et rappelle brièvement les structures algébriques sur les séries en arbres qui seront utilisées. La section 2 introduit l'équation fonctionnelle qui caractérise la série en arbres ♙, montre qu'elle admet une unique solution et considère certains de ses coefficients. La section 3 calcule les évaluations de la série ♙ pour différentes valeurs de x, et démontre en particulier la relation voulue

avec la série $\overline{\Omega}_q$. La section 4 introduit l'opérateur de Hahn Δ, décrit son action sur les coefficients de $\mathbb{A}$ et démontre deux identités ombrales remarquables sur les coefficients de $\overline{\Omega}_q$. La section 5 présente deux conjectures portant sur les coefficients de $\mathbb{A}$ et de $\overline{\Omega}_q$. La section 6 démontre un résultat auxiliaire sur les séries en arbres. Enfin, l'annexe 6 présente les premiers termes des séries en arbres considérées.

Pour finir, quelques mots sur l'histoire de cet article, qui a commencé par le calcul des coefficients des doubles corolles[1] dans la série Ω. Les coefficients des corolles dans la série Ω forment la suite

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, \dots$$

dans laquelle on reconnaît les célèbres nombres de Bernoulli. Pour les doubles corolles, les premiers coefficients sont

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{30}, -\frac{1}{105}, \frac{1}{210}, -\frac{1}{231}, \frac{191}{30030}, -\frac{29}{2145}, \frac{2833}{72930}, \dots$$

Cette suite est bien moins connue, mais apparaît cependant dans la littérature. Elle a été utilisée par Ramanujan, voir le numéro 9 du chapitre 38 de [2], et son prolongement par Villarino dans [20, 21]. Elle est aussi étudiée par K.-W. Chen dans [12] sous un autre aspect.

Cette dernière référence fournit une interprétation ombrale à cette suite de nombres. C'est en cherchant à généraliser cette description ombrale aux mêmes coefficients dans la série Ω_q que cette recherche a commencé.

Cette recherche s'est fortement appuyée sur le logiciel libre de calcul formel `Sage` [19] et sur les routines de combinatoire algébrique développées par la communauté `Sage-combinat` [18].

1. Notations

Dans tout l'article, q sera une indéterminée.

On note Φ_d le polynôme cyclotomique d'ordre d, en la variable q.

On note $[n]_q$ le q-analogue de l'entier n défini par

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

1.1. **Arbres enracinés.** Par **arbre**, on entend toujours un arbre enraciné, c'est-à-dire un graphe fini connexe et sans cycle, muni d'un sommet distingué appelé la racine.

On note $\#T$ le nombre de sommets d'un arbre T.

On appelle hauteur d'un sommet s de l'arbre T le nombre de sommets dans l'unique chaîne reliant ce sommet s à la racine de T.

La **hauteur d'un arbre** est le maximum des hauteurs de ses sommets.

1. Arbres obtenus par greffe de copies de l'arbre à 2 sommets sur une racine commune.

On oriente implicitement les arêtes en direction de la racine.

On appelle **feuille** les sommets qui n'ont pas d'arête entrante.

On note $\circ$ l'arbre à un sommet.

On appelle corolles les arbres de hauteur au plus 2. Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathtt{Crl}_n$ la corolle à n feuilles.

On appelle arbre linéaire et on note $\mathtt{Lnr}_n$ l'unique arbre à n sommets de hauteur n.

Si $T_1, \ldots, T_k$ sont des arbres, on note $B_+(T_1, \ldots, T_k)$ l'arbre obtenu en greffant $T_1, \ldots, T_k$ sur une nouvelle racine commune.

Un **sous-arbre** d'un arbre T est donné par le choix d'une partie des sommets de T, telle que le graphe induit soit connexe.

1.2. **Structures algébriques.** On va utiliser dans cet article des structures algébriques assez complexes sur les séries en arbres. On les rappelle très brièvement ci-dessous, ainsi que certaines de leurs propriétés. Pour plus de détails et pour les preuves, le lecteur pourra consulter [6] et [10].

On appelle **série en arbre** un élément du complété de l'algèbre pré-Lie libre sur un générateur, par rapport à sa graduation naturelle. Par la description connue de l'opérade PreLie en termes d'arbres enracinés [11], une série en arbres est donc une somme infinie d'arbres enracinés (sans étiquettes). Deux exemples sont présentés explicitement dans l'appendice 6. On note $\curvearrowleft$ le produit pré-Lie, qui est décrit sur les éléments de base par la greffe : $S \curvearrowleft T$ est la somme des greffes de l'arbre T sur l'arbre S par ajout d'une arête entre la racine de T et un sommet de S.

Pour toute série en arbres A et tout arbre T, on appelle coefficient de T dans A et on note A_T le coefficient dans le développement

$$A = \sum_T A_T \frac{T}{\mathrm{aut}(T)}, \tag{1}$$

où $\mathrm{aut}(T)$ est le cardinal du groupe d'automorphismes de T.

Pour toute série en arbres A, on note A_n la restriction de la somme (1) aux arbres à n sommets, c'est-à-dire la composante homogène de degré n de A.

On note Σ_α la suspension de paramètre α, définie par

$$\Sigma_\alpha \sum_{n\geq 1} A_n = \sum_{n\geq 1} \alpha^{n-1} A_n. \tag{2}$$

Elle vérifie $\Sigma_\alpha \Sigma_\beta = \Sigma_{\alpha\beta}$.

On note Crls la série en arbres particulière

$$\textsc{Crls} = \sum_{n\geq 0} \frac{\mathtt{Crl}_n}{n!} = \circ + \circ + \frac{\vee}{2} + \frac{\curlyvee}{6} + \cdots . \tag{3}$$

Sur l'espace des séries en arbres, il existe un produit associatif $\circ$ (linéaire à gauche seulement) et un raffinement de cette structure de monoïde sous la forme

d'une opération $\diamond$ à trois arguments. Ces structures sont définies via l'opérade PreLie, voir l'appendice de [10]. Le produit $\mathsf{A} \circ \mathsf{B}$ formalise l'insertion d'une série en arbres B dans les sommets d'une série en arbres A. L'opération $\mathsf{A} \diamond (\mathsf{B}, \mathsf{C})$ correspond à l'insertion de deux séries en arbres différentes, la série B dans la racine et la série C dans les autres sommets de la série en arbres A. En particulier, $\mathsf{A} \diamond (\mathsf{B}, \mathsf{B}) = \mathsf{A} \circ \mathsf{B}$.

L'opération $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}) \mapsto \mathsf{A} \diamond (\mathsf{B}, \mathsf{C})$ est linéaire en A et en B. Elle vérifie

$$\textsc{Crls} \diamond (\textsc{Crls} \diamond (\mathsf{A}, \mathsf{B}), \mathsf{C}) = \textsc{Crls} \diamond (\mathsf{A}, \textsc{Crls} \diamond (\mathsf{B}, \mathsf{C})). \tag{4}$$

Lorsque les coefficients A_T d'une série en arbres A sont les cardinaux d'ensembles finis associés aux arbres enracinés, la série A est en quelque sorte une série génératrice, au sens usuel en combinatoire, pour une certaine structure combinatoire sur les arbres. Dans cette situation, on convient d'appeler A-structures sur T les éléments de l'ensemble associé à T.

Par exemple, il existe une unique Crls-structure sur chaque corolle, et aucune sur les arbres qui ne sont pas des corolles.

Pour la série $\mathsf{U} = \circ$, il existe une unique U-structure sur l'arbre $\circ$, et aucune sur les autres arbres.

On verra dans la suite de l'article des exemples où les structures sont des coloriages décroissants des sommets de T.

Soient A et B deux telles séries en arbres, séries génératrices pour certaines A-structures et B-structures.

Lemme 1.1. *La série en arbres* C *définie par*

$$\mathsf{C} = \textsc{Crls} \diamond (\mathsf{A}, \mathsf{B}) \tag{5}$$

est la série génératrice des C*-structures, où une* C*-structure sur* T *est un triplet formé d'un sous-arbre* T_0 *de* T *contenant la racine, d'une* A*-structure sur l'arbre* T_0*, et d'une* B*-structure sur chacun des arbres qui sont les composantes connexes du complémentaire de* T_0 *dans* T*.*

Par exemple, si A et B sont $\circ$, alors une C-structure unique existe sur les corolles, et aucune n'existe sur les autres arbres. On reconnaît les structures pour la série Crls. On a donc

$$\textsc{Crls} \diamond (\circ, \circ) = \textsc{Crls},$$

ce qui résulte aussi du fait que $\circ$ est une unité pour $\circ$.

Par la suite, on utilisera souvent *implicitement* cette interprétation combinatoire de l'opération $\diamond$ dans la série en arbres Crls.

L'énoncé suivant est du même type, mais sans hypothèse sur la nature combinatoire des séries concernées.

Lemme 1.2. *Soient* A *et* B *deux séries en arbres telles que* $A = \mathrm{Crls} \diamond (\circ, B)$. *Alors*

$$A_{B_+(T_1,\dots,T_k)} = \prod_{i=1}^{k} B_{T_i}. \tag{6}$$

La suspension agit sur le produit $\diamond$ comme suit :

$$\Sigma_\alpha (A \diamond (B, C)) = A \diamond (\Sigma_\alpha B, \alpha \Sigma_\alpha C). \tag{7}$$

2. Définition principale

On introduit dans cette section une série en arbres $\triangle$, définie par une équation fonctionnelle simple, et on en donne quelques propriétés élémentaires. Cette équation fonctionnelle a été devinée en se basant entre autres sur l'équation fonctionnelle de la série Ω_q.

L'équation fonctionnelle est la suivante :

$$q\Sigma_q \triangle - \mathrm{Crls} \diamond (\triangle, -\circ) = q(1 + (q-1)x)\mathrm{Crls} \diamond (\circ, q\Sigma_q \triangle) - \circ. \tag{8}$$

On va montrer qu'elle admet une solution unique.

En considérant la composante homogène de degré 1 de cette équation, on obtient que le terme de degré 1 de toute solution est $(1+qx)\circ$.

On peut écrire (8) sous la forme suivante :

$$q\Sigma_q \triangle - \triangle = \underbrace{(\mathrm{Crls} \diamond (\triangle, -\circ) - \triangle)} + q(1 + (q-1)x)\mathrm{Crls} \diamond (\circ, q\Sigma_q \triangle) - \circ. \tag{9}$$

Considérons la composante homogène de degré n de cette égalité. Le membre de gauche est exactement $q^n - 1$ fois la composante de degré n de $\triangle$. Le membre de droite fait intervenir seulement des composantes de $\triangle$ de degré strictement inférieur à n. En effet, la différence (soulignée) entre les deux premiers termes du membre de droite ne contient plus les composantes homogènes de $\triangle$ de degré n. On peut donc calculer les composantes de $\triangle$ par récurrence. Il en résulte que la solution de (8) existe et est unique. Pour les premiers termes, voir l'appendice 6.

On note que ce même raisonnement marche aussi pour toute spécialisation de la variable x.

La relation (8) peut s'écrire élégamment sous la forme

$$(-\circ) \sharp \triangle = (q\Sigma_q \triangle) \sharp \big(- q(1 + (q-1)x)\circ \big), \tag{10}$$

où le produit $\sharp$, défini par

$$x \sharp y = x + \mathrm{Crls} \diamond (y, x), \tag{11}$$

est associatif. La formule (11) est un analogue dans le cadre pré-Lie de la formule de Baker–Campbell–Hausdorff, voir par exemple [1] pour un énoncé équivalent (exprimé sans arbres).

Proposition 2.1. *Le coefficient* $\triangle_T$ *est le quotient d'un polynôme en* q *et* x *par un produit de polynômes cyclotomiques en* q.

Preuve. Ça résulte de la récurrence via la formule (9), car c'est vrai en degré 1, et à chaque étape on divise par $q^n - 1$ une combinaison linéaire de produits de coefficients précédents. □

Proposition 2.2. *Le coefficient* $♙_T$ *est un polynôme en* x *de degré au plus* $\#T$.

Preuve. Cette condition est vraie en degré 1, et est préservée par la récurrence via la formule (9). □

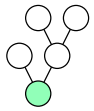

FIGURE 1. Un arbre T sur 5 sommets.

Le numérateur du coefficient $♙_T$ pour l'arbre T de la figure 1 est

$$(qx+1)(q^2x+q+1)(q^3x+q^2+q+1)$$
$$((q^9+2q^8+2q^7+2q^6+q^5)x^2+(2q^8+4q^7+5q^6+6q^5+6q^4+3q^3+q^2)x$$
$$+q^7+2q^6+3q^5+4q^4+4q^3+3q^2+2q+1)$$

et son dénominateur est $[2]_q[3]_q[4]_q[5]_q$.

Remarque 2.3. *Les coefficients du numérateur de* $♙_T$ *ne sont pas toujours des entiers positifs. Le plus petit exemple ayant des coefficients négatifs est fourni par l'arbre à* 10 *sommets de la figure 2. C'est aussi le cas pour les corolles ayant au moins* 12 *sommets.*

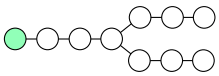

FIGURE 2. Contre-exemple avec 10 sommets.

2.1. **Cas des corolles.** Par les méthodes décrites dans [6], en utilisant un quotient de l'opérade PreLie, on déduit de l'équation (8) une équation

$$qG(qt) - e^{-t}G(t) = q(1+(q-1)x)e^{q(1+qx)t} - 1 \tag{12}$$

pour la série génératrice exponentielle

$$G(t) = \sum_{n\geq 0} ♙_{\mathtt{Crl}_n} \frac{t^n}{n!}. \tag{13}$$

Par exemple, on obtient pour la corolle à trois feuilles le coefficient

$$\frac{(qx+1)(q^2x+q+1)(q^4\Phi_3x^2+(2q^5+2q^4+3q^3+2q^2)x+\Phi_3\Phi_4)}{\Phi_2\Phi_3\Phi_4}$$

Il semble que les coefficients des corolles aient des dénominateurs simples et réguliers.

Conjecture 2.4. *Le dénominateur de* $♙_{\mathtt{Crl}_n}$ *est le produit* $\prod_{d=2}^{n+1} \Phi_d$.

On a vérifié cette conjecture pour $n \leq 25$.

2.2. **Cas des arbres linéaires.** Par les méthodes décrites dans [6], en utilisant le morphisme standard de l'opérade PreLie vers l'opérade associative, on déduit de l'équation (8) l'équation suivante :

$$G(qt) - (1-t)G = q(1+(q-1)x)t(1+G(qt)) - t, \tag{14}$$

pour la série génératrice ordinaire

$$G(t) = \sum_{n\geq 1} ♙_{\mathtt{Lnr}_n} t^n. \tag{15}$$

Proposition 2.5. *Le coefficient de l'arbre linéaire à* n *sommets est donné par*

$$♙_{\mathtt{Lnr}_n} = (1+qx) \prod_{i=2}^{n} \frac{[i]_q + q^i x}{[i]_q}. \tag{16}$$

Preuve. En effet, en degré 1 on trouve bien $1+qx$. La vérification que la formule (16) satisfait la récurrence correspondant à l'équation (14) est un calcul sans difficulté. □

3. Évaluations diverses

On considère diverses évaluations de la série ♙. En particulier, on relie les valeurs lorsque x est un q-entier $[n]_q$ à l'énumération des coloriages décroissants, au sens large pour n positif et au sens strict pour n négatif.

3.1. **Valeur en** $x = 0$**.** L'équation (8) devient en $x = 0$ l'équation

$$q\Sigma_q Z - \mathrm{CRLS} \diamond (Z, -\bullet) = q\mathrm{CRLS} \diamond (\bullet, q\Sigma_q Z) - \bullet, \tag{17}$$

pour la série $Z = ♙\,|_{x=0}$.

Soit E la série définie par

$$E = \sum_{T} \frac{T}{\mathrm{aut}(T)}. \tag{18}$$

La série E est une série génératrice (au sens de la section 1.2), avec une unique E-structure sur chaque arbre enraciné.

Alors on a, par le lemme 1.1,

$$E = \mathrm{CRLS} \diamond (\bullet, E). \tag{19}$$

On en déduit par la formule de suspension (7) que

$$q\Sigma_q E = q\mathrm{CRLS} \diamond (\bullet, q\Sigma_q E). \tag{20}$$

Par ailleurs, la proposition 6.1 et (19) entraînent que

$$\textsc{Crls} \diamond (E, -\bullet) = \bullet. \tag{21}$$

On déduit des égalités (20) et (21) que E est solution de (17).

Par unicité de la solution, on obtient

Proposition 3.1. *La valeur de* $\triangle$ *en* $x = 0$ *est la série* E *définie par* (18).

3.2. **Valeur en $x = [n]_q$ pour n positif ou nul.** Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, l'équation (8) devient en $x = [n]_q$ l'équation

$$q\Sigma_q Z - \textsc{Crls} \diamond (Z, -\bullet) = q^{n+1}\textsc{Crls} \diamond (\bullet, q\Sigma_q Z) - \bullet, \tag{22}$$

pour la série $Z = \triangle\,|_{x=[n]_q}$.

On remarque que le cas $n = -1$ est particulier, l'unique solution étant identiquement nulle. Le cas $n = 0$ est celui du paragraphe précédent.

On suppose dans cette section que n est positif ou nul.

Pour chaque arbre T, on définit un polynôme en q comme suit. Soit $\leq$ la relation d'ordre partiel naturelle sur les sommets de T, avec la racine pour minimum.

Définition 3.2. *Un* n*-coloriage décroissant de* T *est une application décroissante* c *de* T *dans l'ensemble* $\{0, \ldots, n\}$.

On pose

$$F_T^{(n)} = \sum_{c \in \mathrm{Color}(T,n)} q^{\sigma(c)}, \tag{23}$$

où la somme porte sur les n-coloriages décroissants de T et $\sigma(c)$ est la somme des valeurs de c.

Ces polynômes sont déterminés par la relation

$$F^{(n)}_{B_+(T_1,\ldots,T_k)} = \sum_{j=0}^{n} q^j \prod_{i=1}^{k} F_{T_i}^{(j)}. \tag{24}$$

En effet, si la couleur de la racine est j, les sous-arbres T_i sont coloriés par des entiers inférieurs ou égaux à j.

Par exemple, le polynôme $F_T^{(1)}$ pour l'arbre T de la figure 1 est

$$q^5 + 3q^4 + 3q^3 + 2q^2 + q + 1. \tag{25}$$

Soit $F^{(n)}$ la série en arbres définie par

$$F^{(n)} = \sum_T F_T^{(n)} \frac{T}{\mathrm{aut}(T)}. \tag{26}$$

On a

$$F^{(n)} = E + \textsc{Crls} \diamond (q\Sigma_q F^{(n-1)}, E). \tag{27}$$

En effet, on distingue les sommets de couleur 0 et le reste. Soit tous les sommets ont couleur 0, et on a la série E, soit on a la greffe d'arbres de couleur 0

sur un arbre colorié par $\{1,\dots,n\}$. Ceci donne exactement le second terme du membre de droite.

Par ailleurs, la proposition 6.1 et (27) entraînent que

$$\textsc{Crls} \diamond (F^{(n)}, -\circ) = \circ + q\Sigma_q F^{(n-1)}. \tag{28}$$

Considérons la série $q\Sigma_q F^{(n)}$. Le coefficient d'un arbre T dans cette série est la somme

$$q\Sigma_q F^{(n)}_T = \sum_c q^{\sigma(c)}$$

portant sur les coloriages décroissants par $\{1,\dots,n+1\}$. On distingue deux types de tels coloriages. Si la couleur de la racine est $n+1$, les sous-arbres sont coloriés par $\{1,\dots,n+1\}$. Sinon, l'arbre T est colorié par $\{1,\dots,n\}$. On obtient la formule

$$q\Sigma_q F^{(n)} = q\Sigma_q F^{(n-1)} + q^{n+1}\textsc{Crls} \diamond (\circ, q\Sigma_q F^{(n)}). \tag{29}$$

On déduit des égalités (28) et (29) que F est solution de (22).

Par unicité de la solution, on obtient

Théorème 3.3. *La valeur de* $\triangle$ *en* $x = [n]_q$ *est la série* $F^{(n)}$*, dont les coefficients comptent les coloriages décroissants par* $\{0,\dots,n\}$.

3.3. **Valeur en $x = 1/(1-q)$.** On peut passer à la limite des coloriages lorsque $n = \infty$. Ceci correspond à spécialiser x en $1/(1-q)$. L'équation (8) devient alors

$$q\Sigma_q Z - \textsc{Crls} \diamond (Z, -\circ) = -\circ, \tag{30}$$

pour la série $Z = \triangle\,|_{x=1/(1-q)}$.

La solution Z a pour coefficients des fractions en q ayant des pôles en $q = 1$. Le coefficient d'un arbre T est la fraction définie par la série formelle

$$\sum_{c \in \mathrm{Color}(T)} q^{\sigma(c)},$$

la somme portant sur tous les coloriages décroissants de T. En particulier, pour le coefficient de la corolle $\mathtt{Crl}_k$, on trouve l'expression

$$\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}[j]_q^k. \tag{31}$$

On rappelle l'opérateur $\zeta_q(-k)$ (agissant sur les séries formelles en q sans terme constant) introduit dans [7], défini par

$$\zeta(-k)(f) = \sum_{j=1}^{\infty} f(q^j)[j]_q^k.$$

Le coefficient de la corolle $\mathtt{Crl}_k$ peut s'exprimer comme

$$\frac{1}{q}\zeta_q(-k)(q). \tag{32}$$

3.4. **Évaluation en $x = 1$ puis $q = -1$.** On obtient une série intéressante en spécialisant en $q = -1$ la série $F^{(1)}$. Notons $\overline{F}$ la série obtenue.

Lorsque $n = 1$ et $q = -1$, la relation (24) devient

$$\overline{F}_{B_+(T_1,\dots,T_k)} = 1 - \prod_{i=1}^{k} \overline{F}_{T_i}. \tag{33}$$

Cette relation entraîne par récurrence que $\overline{F}_T \in \{0, 1\}$ pour tout T.

On dit qu'un arbre T est de type 0 (resp. 1) si $\overline{F}_T = 0$ (resp. 1).

Un arbre est de type 0 si et seulement si il est de la forme $B_+(T_1, \dots, T_k)$ avec tous les T_i de type 1. Un arbre est de type 1 si et seulement si il est de la forme $B_+(T_1, \dots, T_k)$ avec au moins un T_i de type 0. En particulier, l'arbre ○ est de type 0.

Il y a une relation entre cette partition de l'ensemble des arbres enracinés en deux types et les résultats de [23] et de [14] portant sur un tri-coloriage canonique des arbres non-enracinés. Les arbres enracinés de type 0 sont exactement les arbres enracinés dont la racine est verte au sens du second article. On peut en déduire la description suivante des arbres de type 0 et 1.

On appelle **couverture minimale par sommets** d'un arbre T un ensemble C de sommets de T, tel que chaque arête ait au moins une des ses extrémités dans C, et de cardinal minimal pour cette propriété.

Alors un arbre est de type 1 si et seulement si et seulement si il existe une couverture minimale par sommets contenant la racine, et de type 0 si et seulement si aucune couverture minimale par sommets ne contient la racine. Par exemple, l'arbre de la figure 1 est de type 1.

3.5. **Valeur en $x = [n]_q$ pour n négatif.** Lorsque n est un entier négatif, l'équation (22) reste valable. En remplaçant dans cette équation q par $1/q$ et n par $-n$, on obtient, pour tout entier n positif, l'équation

$$1/q\Sigma_{1/q}Z - \textsc{Crls} \diamond (Z, -○) = q^{n-1}\textsc{Crls} \diamond (○, 1/q\Sigma_{1/q}Z) - ○, \tag{34}$$

pour la série Z obtenue en remplaçant q par $1/q$ dans $♙|_{x=[n]_q}$. Pour $n = 1$, la seule solution est identiquement nulle, comme on l'a déjà dit plus haut. On suppose maintenant que $n \geq 2$.

En posant $Z = (-q)\Sigma_{-q}Y$, on trouve

$$-Y + \textsc{Crls} \diamond (q\Sigma_q Y, ○) = q^{n-1}\textsc{Crls} \diamond (○, Y) - ○. \tag{35}$$

Soit $\leq$ la relation d'ordre partiel sur les sommets de T ayant la racine pour minimum.

Définition 3.4. *Un n-coloriage décroissant strict de T est une application strictement décroissante c de T dans l'ensemble $\{0, \dots, n\}$.*

Pour chaque arbre T et un entier n, on définit un polynôme $G_T^{(n)}$ en q par la formule

$$G_T^{(n)} = \sum_{c \in \mathrm{Color}(T,n,<)} q^{\sigma(c)}, \tag{36}$$

la somme portant sur les n-coloriages décroissants stricts de T.

Ces polynômes sont déterminés par la relation

$$G^{(n)}_{B_+(T_1,\dots,T_k)} = \sum_{j=0}^{n} q^j \prod_{i=1}^{k} G_{T_i}^{(j-1)}. \tag{37}$$

En effet, si la couleur de la racine est j, les sous-arbres T_i sont coloriés par des entiers strictement inférieurs à j.

Par exemple, le polynôme $G_T^{(3)}$ pour l'arbre T de la figure 1 est

$$q^9 + 3q^8 + 4q^7 + 4q^6 + 2q^5 + 2q^4 + q^3. \tag{38}$$

Soit $G^{(n)}$ la série définie par

$$G^{(n)} = \sum_T G_T^{(n)} \frac{T}{\mathrm{aut}(T)}. \tag{39}$$

On a

$$G^{(n+1)} - \circ = \mathrm{CRLS} \diamond (q\Sigma_q G^{(n)}, \circ). \tag{40}$$

En effet, le terme de gauche correspond aux coloriages décroissants stricts par $\{0, \dots, n+1\}$ dont la racine ne porte pas la couleur 0. Le terme de droite correspond à la greffe de sommets isolés portant la couleur 0 sur un coloriage décroissant strict par $\{1, \dots, n+1\}$.

Par ailleurs, on a

$$G^{(n+1)} - G^{(n)} = q^{n+1} \mathrm{CRLS} \diamond (\circ, G^{(n)}). \tag{41}$$

En effet, le terme de gauche correspond aux coloriages décroissants stricts par $\{0, \dots, n+1\}$ dont la racine porte la couleur $n+1$. Le terme de droite correspond à la greffe sur une racine portant la couleur $n+1$ de coloriages décroissants stricts par $\{0, \dots, n\}$.

On déduit des égalités (40) et (41) que $G^{(n-2)}$ est solution de (35).

Par unicité de la solution, on obtient

Théorème 3.5. *La valeur de* $\mathbb{A}$ *en* $x = [-n]_q$*, évaluée en* $q = 1/q$*, est la série* $-q\Sigma_{-q} G^{(n-2)}$.

On en déduit le corollaire suivant.

Proposition 3.6. *Soit* H *la hauteur de* T*. Le numérateur de* $\mathbb{A}_T$ *est divisible par le produit*

$$\prod_{i=1}^{H} \left([i]_q + q^i x \right). \tag{42}$$

Preuve. Soit i un entier entre 1 et H. Comme $i-1$ est strictement inférieur à la hauteur de l'arbre, il n'existe aucun coloriage décroissant strict par $\{0,\dots,i-2\}$. Par conséquent, le coefficient $♙_T$ s'annule en $x=[-i]_q$, ce qui entraîne le résultat. □

3.6. **Limite en $q=1$.**

Proposition 3.7. *Pour tout T, la fraction $♙_T$ n'a pas de pôle en $q=1$.*

Preuve. Les évaluations en les q-entiers $[n]_q$ pour $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ sont des polynômes en q. Comme le degré de $♙_T$ par rapport à la variable x est borné par la taille de T, on peut retrouver $♙_T$ par interpolation. Il résulte de la formule d'interpolation que $♙_T$ est bien défini en $q=1$. □

On peut déduire de (9) que la limite Z de $♙$ en $q=1$ vérifie

$$0=(\textsc{Crls}\diamond(Z,-\bullet)-Z)+\textsc{Crls}\diamond(\bullet,Z)-\bullet. \tag{43}$$

Proposition 3.8. *La condition initiale $Z_1=1+x$ et l'équation (43) caractérisent la série Z.*

Preuve. L'équation (43) peut s'écrire sous la forme

$$[Z,\bullet]=(\textsc{Crls}\diamond(Z,-\bullet)-Z+Z\curvearrowleft\bullet)+(\textsc{Crls}\diamond(\bullet,Z)-\bullet-\bullet\curvearrowleft Z),$$

où le membre de gauche fait intervenir le crochet de Lie associé au produit pré-Lie $\curvearrowleft$. Soit $n\geq 2$. La composante homogène de degré $n+1$ de cette équation permet d'exprimer la composante de degré $n+1$ de $[Z,\bullet]$ en fonction des composantes Z_k pour $k\leq n-1$. Il suffit alors d'utiliser que l'application $x\mapsto[x,\bullet]$ est injective lorsque le degré de x est au moins 2, ce qui résulte du fait que les algèbres pré-Lie libres sont libres en tant qu'algèbres de Lie [15, 8]. □

3.7. **Valeur limite en $x=-1/q$.** On rappelle la série Ω_q introduite et étudiée dans l'article [6]. Elle est définie par l'équation

$$\textsc{Crls}\diamond(q\Sigma_q\Omega_q,\bullet)-\Omega_q=\bullet\curvearrowleft\Omega_q+(q-1)\bullet. \tag{44}$$

On introduit une variante $\overline{\Omega}_q$ définie par

$$\overline{\Omega}_q=\Sigma_{(-1/q)}\Omega_{1/q}. \tag{45}$$

On montre aisément que cette variante vérifie l'équation

$$q\Sigma_q\overline{\Omega}_q-\textsc{Crls}\diamond(\overline{\Omega}_q,-\bullet)=(q-1)\bullet+q\,\bullet\curvearrowleft\Sigma_q\overline{\Omega}_q, \tag{46}$$

qui la caractérise.

Par la proposition 3.6, tous les coefficients de $♙$ sont divisibles par $1+qx$.

On considère ici la limite de $\frac{1}{1+qx}♙$ lorsque $x=-1/q$.

Théorème 3.9. *La limite de $\frac{1}{1+qx}♙$ en $x=-1/q$ est la série $\overline{\Omega}_q$.*

Preuve. On trouve exactement comme limite pour l'équation (8) l'équation (46) vérifiée par $\overline{\Omega}_q$. □

Par exemple, on trouve ainsi que le coefficient de l'arbre de la figure 1 dans la série $\overline{\Omega}_q$ est la fraction

$$\frac{1+q-q^3}{\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5}. \tag{47}$$

D'après [6], on sait que les dénominateurs des coefficients de la série Ω_q sont des produits de polynômes cyclotomiques sans multiplicité. C'est donc vrai aussi pour la variante $\overline{\Omega}_q$. Par contre, c'est faux pour la série $\mathbb{A}$, par exemple pour l'arbre de la figure 1.

Il se produit donc nécessairement des simplifications lors de la limite en $x = -1/q$. Certaines de ces simplifications font intervenir les facteurs du numérateur de $\mathbb{A}_T$ décrits dans la proposition 3.6. Mais ceci ne suffit pas à expliquer toutes les simplifications nécessaires, comme on le voit en considérant l'exemple de $B_+(\mathtt{Crl}_2, \circ, \circ)$.

3.8. **Valeur en $x = \infty$.** Par valeur en $x = \infty$, on entend la série obtenue en ne gardant que le terme homogène de degré n en x dans chaque composante $\mathbb{A}_n$ de $\mathbb{A}$.

Par un passage à la limite convenable dans (8), on obtient pour cette valeur l'équation

$$q\Sigma_q Z - Z = q(q-1)\textsc{Crls} \diamond (\circ, q\Sigma_q Z), \tag{48}$$

pour la série $Z = \mathbb{A}\,|_{x=\infty}$. Le terme de degré 1 de Z est $q\circ$.

On peut écrire ceci sous la forme

$$\frac{q\Sigma_q Z - Z}{q-1} = q\textsc{Crls} \diamond (\circ, q\Sigma_q Z). \tag{49}$$

Définition 3.10. *La q-factorielle d'un arbre T est définie comme suit :*

$$[T]!_q = q^{-\sum_{v\in T} \#T_v} \prod_{v\in T} [\#T_v]_q \tag{50}$$

où T_v est le sous-arbre de T associé au sommet v.

En $q = 1$, on retrouve la factorielle d'un arbre usuelle, définie par

$$T! = \prod_{v\in T} \#T_v. \tag{51}$$

Par exemple, la q-factorielle de l'arbre T de la figure 1 est

$$q^{-1-1-1-3-5}[1]_q[1]_q[1]_q[3]_q[5]_q = q^{-11}[3]_q[5]_q. \tag{52}$$

Proposition 3.11. *La valeur de $\mathbb{A}$ en $x = \infty$ est la série*

$$\sum_T \frac{1}{[T]!_q} \frac{T}{\mathrm{aut}(T)}. \tag{53}$$

Preuve. L'énoncé est vrai en degré 1 par inspection. La composante homogène de (49) de degré n s'écrit

$$[n]_q Z_n = q\mathrm{CRLS} \diamond (\bullet, q\Sigma_q Z), \tag{54}$$

en ne gardant à droite que la partie de degré n.

Par le lemme 1.2, ceci est équivalent à la relation suivante entre les coefficients

$$[\#T]_q Z_T = q \prod_{i=1}^{k} q^{\#T_i} Z_{T_i}, \tag{55}$$

lorsque $T = B_+(T_1, \dots, T_k)$. Cette relation est exactement la définition des inverses des q-factorielles des arbres. □

Remarque 3.12. *En particulier, le degré de* $\mathbb{A}_T$ *est toujours exactement* $\#T$.

4. Propriétés ombrales

Cette section est consacrée à la description d'une relation, distincte de celle du théorème 3.9, entre les séries $\mathbb{A}$ et $\overline{\Omega}_q$, par le biais de certains q-analogues des nombres de Bernoulli.

4.1. Opérateur de Hahn et opérateur B_+.

On introduit l'opérateur Δ :

$$\Delta(f) = \frac{f(1+qx) - f(x)}{1 + qx - x}, \tag{56}$$

agissant sur les fonctions de x à coefficients dans $\mathbb{Q}(q)$. Il est $\mathbb{Q}(q)$-linéaire.

Cet opérateur, qui est une forme de q-dérivation, a notamment été considéré par Hahn [16].

Soit f un polynôme en x à coefficients dans $\mathbb{Q}(q)$ et notons $f_n = f([n]_q)$. Alors

$$\Delta(f)([n]_q) = \frac{f_{n+1} - f_n}{q^n}. \tag{57}$$

Proposition 4.1. *Si* $T = B_+(T_1, \dots, T_k)$, *on a*

$$\Delta(\mathbb{A}_T) = q \prod_{i=1}^{k} \mathbb{A}_{T_i}(1+qx). \tag{58}$$

Preuve. Il s'agit de montrer une égalité entre deux polynômes en x. Il suffit de montrer l'égalité de leurs valeurs en $[n]_q$ pour tout entier positif n.

Par la description (57) de l'action de Δ sur les valeurs en $[n]_q$ et par le théorème 3.3, on trouve que $q^n \Delta(\mathbb{A}_T)([n]_q)$ compte les coloriages décroissants de T par les entiers entre 0 et $n+1$, sous la condition de contenir $n+1$.

Pour compter ces coloriages, on peut aussi multiplier le produit des valeurs de $\mathbb{A}_{T_i}$ en $[n+1]_q$ par le facteur q^{n+1} correspondant au coloriage de la racine de

T par $n+1$. On a donc

$$q^n \Delta(\mathbb{A}_T)([n]_q) = q^{n+1} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{A}_{T_i}([n+1]_q).$$

On en déduit le résultat. □

Considérons l'action de Δ sur l'espace $\mathbb{Q}(q)[x]$ des polynômes en x à coefficients dans $\mathbb{Q}(q)$. Le noyau de Δ est le sous-espace $\mathbb{Q}(q)$ des polynômes constants. Un supplémentaire est fourni par les polynômes qui sont divisibles par $1+qx$. La restriction de Δ à ce supplémentaire est un isomorphisme avec l'espace $\mathbb{Q}(q)[x]$.

4.2. **Ombre de Bernoulli.** On rappelle que les nombres de Bernoulli–Carlitz [4] sont des fractions en q définies par $\beta_0 = 1$ et

$$q(q\beta+1)^n - \beta_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n > 1, \end{cases} \tag{59}$$

où par convention on remplace β^k par β_k après avoir développé la puissance du binôme.

Soit P un polynôme en x à coefficient dans $\mathbb{Q}(q)$. On appelle q-ombre de P la valeur en P de la forme $\mathbb{Q}(q)$-linéaire qui envoie x^n sur le nombre de Bernoulli–Carlitz β_n. On note $\Psi(P)$ la q-ombre de P, qui est une fraction en q.

Théorème 4.2. *Si* $T = B_+(T_1, \dots, T_k)$, *on a*

$$\overline{\Omega}_{q,T} = \Psi\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{A}_{T_i}\right). \tag{60}$$

Preuve. L'opérateur Ψ est un opérateur $\mathbb{Q}(q)$-linéaire, agissant sur l'espace vectoriel des polynômes en x. On va montrer que le côté gauche de cette égalité est aussi la valeur d'un opérateur $\mathbb{Q}(q)$-linéaire agissant sur le même argument, et comparer ensuite leurs valeurs sur les puissances de $1+qx$.

Par le théorème 3.9, le côté gauche est la valeur limite de $\mathbb{A}_T/(1+qx)$ lorsque $x = -1/q$. L'application qui associe à un polynôme P divisible par $1+qx$ la limite de $P/(1+qx)$ lorsque $x = -1/q$ est évidemment linéaire.

Par la proposition 4.1, on a

$$\mathbb{A}_T = \Delta^{-1}\left(q \prod_{i=1}^{k} \mathbb{A}_{T_i}(1+qx)\right),$$

où Δ^{-1} est l'opérateur inverse de la restriction de Δ aux polynômes divisibles par $1+qx$.

Les deux côtés de (60) sont donc des opérateurs $\mathbb{Q}(q)$-linéaires sur l'espace vectoriel des polynômes en x. Il suffit donc de comparer leurs valeurs sur la base de cet espace donnée par les puissances $(1+qx)^k$ pour $k \geq 0$.

Comme $\mathbb{A}_{\bullet} = 1 + qx$, ceci revient à vérifier l'identité voulue lorsque tous les T_i sont égaux à $\bullet$. Par la définition de Ψ, et par (59), on obtient à droite 1 si $k = 0$, $1/(q+1)$ si $k = 1$ et β_k/q si $k \geq 2$.

On vérifie aisément que les coefficients de $\bullet$ et de $\mathtt{Crl}_1$ dans $\overline{\Omega}_q$ sont 1 et $1/(1+q)$. Par [4, (5.11)], on a

$$\beta_k(1/q) = (-1)^k q^{k-1} \beta_k,$$

pour $k \geq 2$. Comme le coefficient de $\mathtt{Crl}_k$ dans Ω_q est β_k, on déduit de (45) que le coefficient de $\mathtt{Crl}_k$ dans $\overline{\Omega}_q$ est aussi donné par β_k/q si $k \geq 2$. □

Remarque 4.3. *Dans l'article* [6]*, on a montré que le coefficient de* $\mathtt{Lnr}_n$ *dans la série* Ω_q *est* $(-1)^{n-1}/[n]_q$*. Le coefficient de* $\mathtt{Lnr}_n$ *dans la série* $\overline{\Omega}_q$ *est donc* $1/[n]_q$*.*

Lemme 4.4. *Pour tout* $n \geq 1$*, on a*

$$\Psi(-x\mathbb{A}_{\mathtt{Lnr}_n}) = \frac{1}{[n+2]_q}. \tag{61}$$

Preuve. Par la remarque 4.3 et le théorème 4.2, on déduit que

$$\Psi(\mathbb{A}_{\mathtt{Lnr}_n}) = \frac{1}{[n+1]_q}.$$

Par ailleurs, en se servant de la forme explicite de $\mathbb{A}_{\mathtt{Lnr}_{n+1}}$ donnée par (16), on peut montrer que

$$\frac{q^{n+1}}{[n+1]_q} \Psi(x\mathbb{A}_{\mathtt{Lnr}_n}) = \Psi(\mathbb{A}_{\mathtt{Lnr}_{n+1}}) - \Psi(\mathbb{A}_{\mathtt{Lnr}_n}).$$

Le résultat voulu en découle. □

Théorème 4.5. *On a*

$$\overline{\Omega}_{q,B_+T} = \Psi\left(-x \prod_{i=1}^{k} \mathbb{A}_{T_i}\right). \tag{62}$$

Preuve. Pour les mêmes raisons que dans la preuve du théorème 4.2, les deux membres de cette égalité sont les valeurs en le polynôme $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{A}_{T_i}$ de deux opérateurs $\mathbb{Q}(q)$-linéaires. Il suffit donc de les comparer sur la base formée par les polynômes $\mathbb{A}_{\mathtt{Lnr}_n}$ pour $n \geq 1$ et par le polynôme constant 1.

Pour le polynôme constant 1, on constate que l'opposé du nombre de Bernoulli–Carlitz β_1 est $1/(1+q)$, qui est exactement le coefficient de l'arbre $\mathtt{Lnr}_2$ dans $\overline{\Omega}_q$.

Lorsqu'on prend pour seul T_i l'arbre $\mathtt{Lnr}_n$, le membre de gauche est $1/[n+2]_q$ par la remarque 4.3. Le membre de droite a la même valeur par le lemme 4.4. □

5. Conjectures

On présente dans cette section deux conjectures sur les séries $\mathbb{A}$ et Ω_q.

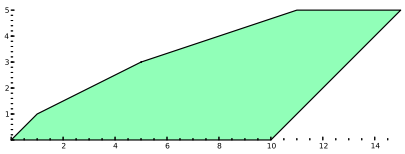

FIGURE 3. Polygone de Newton du numérateur d'un coefficient $\mathbb{A}_T$.

5.1. **Polygones de Newton des numérateurs.** Soit $\square_T$ le polygone de Newton du numérateur de $\mathbb{A}_T$, voir la figure 3 pour celui associé à l'arbre de la figure 1.

Il semble que la forme de $\square_T$ soit comme suit.

Conjecture 5.1. *Le bord supérieur de $\square_T$ est une droite horizontale correspondant au coefficient de degré $\#T$ par rapport à la variable x. Le bord inférieur est une droite horizontale correspondant au coefficient constant par rapport à la variable x. Le bord droit est une droite de pente 1. Le bord gauche est une suite de segments de pente $1/i$ pour tout i entre 1 et la hauteur de T. Le segment de pente $1/i$ a pour hauteur le nombre de sommets de hauteur i dans T.*

On a vérifié cette conjecture pour les arbres de taille au plus 10.

5.2. **Arbres en forme de partitions.** On propose ici une conjecture sur les coefficients de Ω_q.

A chaque partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ d'un entier n, on associe l'arbre T_λ à $n+1$ sommets défini par

$$T_\lambda = B_+(\mathtt{Lnr}_{\lambda_1}, \dots, \mathtt{Lnr}_{\lambda_m}).$$

Conjecture 5.2. *Pour tout entier $k \geq 3$ impair, le coefficient $\Omega_{q,B_+(T_\lambda^k)}$ est divisible par $\Phi_{1+\max\lambda}$.*

Dans le cas de la partition vide, l'arbre T_λ est $\circ$ et les arbres $B_+(T_\lambda^k)$ sont les corolles. Les coefficients des corolles dans Ω_q sont les nombres de Bernoulli–Carlitz, qui donnent les nombres de Bernoulli usuels en $q = 1$. La conjecture est donc bien connue dans ce cas.

La conjecture a été vérifiée pour les partitions de taille au plus 8 avec $k \in \{3, 5, 7, 9\}$.

6. RÉSULTAT AUXILIAIRE

Soit E la série en arbres définie par (18).

Proposition 6.1. *Pour toute série en arbres A, on a*

$$\mathrm{CRLS} \diamond (\mathrm{CRLS} \diamond (A, E)), -\circ) = A. \tag{63}$$

Preuve. En utilisant la formule (4), il s'agit de calculer l'expression équivalente

$$\mathrm{CRLS} \diamond (A, \mathrm{CRLS} \diamond (E, -\circ)).$$

On va considérer, pour k entier positif, l'expression

$$\textsc{Crls} \diamond (E, k\,\circ).$$

Les coefficients de cette série comptent les arbres dont chaque feuille est soit vide, soit décorée par une couleur parmi k. On peut aussi voir ceci comme des arbres dont toutes les feuilles sont décorées par une couleur parmi $k+1$. Par conséquent, tous les coefficients sont divisibles par $k+1$. Donc

$$\textsc{Crls} \diamond (E, -\circ) = 0.$$

Il en résulte que

$$\textsc{Crls} \diamond (A, \textsc{Crls} \diamond (E, -\circ)) = A.$$

□

Annexe : Termes initiaux

La série ♙ commence par

$$(1+qx)\circ + \frac{(1+qx)(1+q+q^2x)}{\Phi_2}\circ\circ + \frac{(1+qx)(1+q+q^2x)(1+q+q^2+q^3x)}{\Phi_2\Phi_3}\circ\circ\circ + \frac{(1+qx)(1+q+q^2x)(1+q+q^2+q^2x+q^3x)}{\Phi_2\Phi_3}\frac{\circ\circ}{2} + \cdots$$

La série $\overline{\Omega}_q$ commence par

$$\overline{\Omega}_q = \circ + \frac{1}{\Phi_2}\circ\circ + \frac{1}{\Phi_3}\circ\circ\circ + \frac{1}{\Phi_2\Phi_3}\frac{\circ\circ}{2} + \frac{1}{\Phi_2\Phi_4}\circ\circ\circ\circ + \frac{1}{\Phi_3\Phi_4}\frac{\circ\circ}{2} + \frac{1}{\Phi_2\Phi_3\Phi_4}\circ\circ\circ + \frac{1-q}{\Phi_2\Phi_3\Phi_4}\frac{\circ\circ}{6} + \cdots$$

Références

[1] Andrei A. Agrachev and Revaz V. Gamkrelidze. Chronological algebras and nonstationary vector fields. In *Problems in geometry, vol. 11 (Russian)*, pp. 135–176, 243. Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1980.

[2] Bruce C. Berndt. *Ramanujan's notebooks. Part V.* Springer–Verlag, New York, 1998.

[3] John C. Butcher. An algebraic theory of integration methods. *Math. Comp.*, 26 :79–106, 1972.

[4] Leonard Carlitz. q-Bernoulli numbers and polynomials. *Duke Math. J.*, 15 :987–1000, 1948.

[5] Arthur Cayley. On the theory of the analytical forms called trees. *Philos. Magazine*, XIII :172–176, 1857.

[6] Frédéric Chapoton. A rooted-trees q-series lifting a one-parameter family of Lie idempotents. *Algebra Number Theory*, 3(6) :611–636, 2009.

[7] Frédéric Chapoton. Fractions de Bernoulli–Carlitz et opérateurs q-zeta. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 22(3) :575–581, 2010.

[8] Frédéric Chapoton. Free pre-Lie algebras are free as Lie algebras. *Canad. Math. Bull.*, 53(3) :425–437, 2010.

[9] Frédéric Chapoton. q-analogues of Ehrhart polynomials. preprint, 2013.

[10] Frédéric Chapoton. Flows on rooted trees and the Menous–Novelli–Thibon idempotents. *Mathematica Scandinavica*, to appear.

[11] Frédéric Chapoton and Muriel Livernet. Pre-Lie algebras and the rooted trees operad. *Internat. Math. Res. Notices*, (8) :395–408, 2001.

[12] Kwang-Wu Chen. A summation on Bernoulli numbers. *J. Number Theory*, 111(2) :372–391, 2005.

[13] Alain Connes and Dirk Kreimer. Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry. *Comm. Math. Phys.*, 199(1) :203–242, 1998.

[14] Stéphane Coulomb and Michel Bauer. On vertex covers, matchings and random trees. `arχiv.org:math/0407456`, 2004.

[15] Loïc Foissy. Finite-dimensional comodules over the Hopf algebra of rooted trees. *J. Algebra*, 255(1) :89–120, 2002.

[16] Wolfgang Hahn. Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleichungen genügen. *Math. Nachr.*, 2 :4–34, 1949.

[17] Bérénice Oger. Etudes de séries particulières dans le groupe des séries en arbres. Mémoire de stage de M2, 2010.

[18] The Sage-Combinat community. Sage-Combinat : enhancing Sage as a toolbox for computer exploration in algebraic combinatorics, 2008. `http://combinat.sagemath.org`.

[19] William A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 5.10)*. The Sage Development Team, 2013. `http://www.sagemath.org`.

[20] Mark B. Villarino. Ramanujan's harmonic number expansion, 2005. arXiv.org :math/0511335.

[21] Mark B. Villarino. Ramanujan's harmonic number expansion into negative powers of a triangular number. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 9(3) :Article 89, 12, 2008.

[22] David Wright and Wenhua Zhao. D-log and formal flow for analytic isomorphisms of n-space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(8) :3117–3141 (electronic), 2003.

[23] Jennifer Zito. The structure and maximum number of maximum independent sets in trees. *J. Graph Theory*, 15(2) :207–221, 1991.