Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d'Euler-Zagier

Hoang Ngoc Minh, Université Lille II, 59024 Lille, France,
Gérard Jacob, Michel Petitot, Nour Eddine Oussous,
Université Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq, France.

30 août 1999

RÉSUMÉ – L'*algèbre des polylogarithmes* est la plus petite $\mathbb{C}$-algèbre qui contient les constantes et qui est stable par les intégrations par rapport aux formes différentielles dz/z et $dz/(1-z)$. D'après le théorème de structure cette algèbre est isomorphe à l'algèbre des polynômes non commutatifs munie du produit de mélange. Comme conséquences de ce résultat, les polylogarithmes $\mathrm{Li}_n(g(z))$ où $n \geq 1$ et où les $g(z)$ appartiennent au *groupe du birapport*, sont des polynômes en les polylogarithmes indicés par les mots de Lyndon et à coefficients dans une certaine extension transcendante de $\mathbb{Q}$: l'*algèbre des sommes d'Euler-Zagier*. Nous conjecturons que cette algèbre est une algèbre de polynômes et nous cherchons actuellement une base pour cette algèbre. Et la question de savoir si les polylogarithmes $\mathrm{Li}_n(g(z))$ vérifient une *équation fonctionnelle linéaire* est alors *effectivement décidable* modulo une conjecture de dimension de Zagier. Cette procédure de décision passe par la décompositions de ces polylogarithmes comme polynômes en les polylogarithmes indicés par la base de Lyndon. Un tel algorithme se base sur la factorisation de la série génératrice de ces polylogarithmes.

1 Introduction

Dans ce travail, nous décrivons l'étude que nous menons actuellement sur l'*algèbre des polylogarithmes* [27, 30, 31, 32, 34, 34].

Soit $X = \{x_0, x_1\}$ un alphabet fini. Le monoïde libre engendré par X est le monoïde X^* des mots sur l'alphabet X. Le mot vide est noté par 1. Nous notons X^+ l'ensemble $X^* \setminus \{1\}$. Nous notons également $\mathbb{C}\langle X\rangle$ et $\mathrm{Sh}_{\mathbb{C}}\langle X\rangle$ les algèbres des polynômes sur X^* à coefficients dans $\mathbb{C}$, munie respectivement du produit de Cauchy (associatif, non commutatif et admettant 1 comme l'élément neutre) et du produit de mélange (associatif, commutatif et admettant 1 comme l'élément neutre) [2, 38, 46, 49]. De même, nous notons $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ et $\mathrm{Sh}_{\mathbb{C}}\langle\langle X\rangle\rangle$ les algèbres des séries formelles sur X^* à coefficients dans $\mathbb{C}$, munis respectivement du produit de Cauchy et du produit de mélange.

Les mots w de X^* permettent de coder les *intégrales itérées de Chen* [14] par rapport aux formes différentielles ω_0, ω_1 et suivant un chemin γ d'origine z_0 de but z. Lorsqu'il y a pas de confusion sur γ, nous notons ces intégrales itérées par $\alpha_{z_0}^z(w)$:

$$\alpha_{z_0}^z(w) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad w = 1, \\ \displaystyle\int_\gamma \omega_{i_1}\omega_{i_2}\ldots\omega_{i_k} & \text{si} \quad w = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}. \end{cases}$$

L'application α qui à tout $w \in X^*$ associe l'intégrale itérée $\alpha_{z_0}^z(w)$ est étendue par linéarité à l'algèbre de mélange $\mathrm{Sh}_{\mathbb{C}}\langle X\rangle$. Nous appelons également cette application α *tranformation d'évaluation* [24, 25, 26]. D'après Fliess, elle réalise un *morphisme* de $\mathrm{Sh}_{\mathbb{C}}\langle X\rangle$ dans une "algèbre de fonctions" [17].

Question 1.1 *Est-ce-que l'application α (relative à ω_0 et ω_1) est un isomorphisme de l'algèbre de mélange $\mathrm{Sh}_{\mathbb{C}}\langle X\rangle$ dans une "algèbre de fonctions" ?*

Exemple 1.1 *Considérons les deux formes différentielles suivantes :*

$$\omega_0 = \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \omega_2 = dz.$$

Nous avons $\ker \alpha \neq \emptyset$ *car, pour tout $n \geq 0$, on vérifie que $\alpha(x_2 x_0^n) = \alpha(x_2)$.*

Question 1.2 *Existe-t-il des exemples telles que α soit un* isomorphisme *d'algèbre de mélange $\mathrm{Sh}_{\mathbb{C}}\langle X\rangle$ dans une "algèbre de fonctions" ?*

Pour répondre à cette question, nous allons considérer les deux formes différentielles suivantes [27] :

$$\omega_0 = \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{dz}{1-z}.$$

1. Nous étudions l'*algèbre des polylogarithmes* [34]. C'est la plus petite $\mathbb{C}$-algèbre qui contient les constantes et qui est stable par les intégrations par rapport aux formes différentielles ω_0 et ω_1. Les polylogarithmes de cette algèbre sont obtenus, par conséquent, comme des intégrales itérées de Chen par rapport à ω_0 et ω_1. Ils admettent les développements en séries entières suivants :

$$\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_k}(z) = \sum_{n_1>\ldots>n_k>0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}\ldots n_k^{s_k}}, \quad |z| < 1.$$

2. La valeur en 1 des polylogarithmes donne des sommes d'Euler-Zagier [51, 52, 53, 35, 36, 4, 5, 6, 7, 32]

$$\zeta(s_1,\ldots,s_k) = \sum_{n_1>\ldots>n_k>0} \frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_k^{s_k}}$$

dont nous établissons une base de Gröbner de l'idéal des relations.

Les sommes d'Euler-Zagier jouent un rôle crucial et théorie des nombres [51, 52, 53], en mécanique quantique [16, 22, 39] (associateur de Drinfel'd), physique des hautes énergies [11, 12] et théorie des nœuds [1, 13](invariants de Vassiliev, représentation par des intégrales de Kontsevich). Elles sont aussi importants dans la résolution des équations différentielles avec singularités (voir [31]). Par conséquent, elles interviennent de manière naturelle dans l'étude de l'équation intégrale des arbres quadrants, comme l'avaient pressenti les auteurs de [18] (voir égalemnet leur bibliographie). En particulier, Flajolet et Salvy ont abordé ces sommes d'Euler-Zagier en se basant sur leur représentation par des d'intégrales de contour [19].

2 Polylogarithmes

2.1 Les polylogarithmes de Nielsen

Les polylogarithmes classiques et les polylogarithmes de Nielsen généralisent, en fait, le *dilogarithme*, appelé *fonction de Legendre* par Nielsen [42](chez les physiciens, il est connu comme la fonction de Spence [40]). Il est connu depuis Leibnitz en 1696, puis par Euler, Abel, Hill, Jonquière, Kummer, Lindelöf, Lobachev (voir [40]). Le polylogarithme d'ordre $n \geq 1$, c'est-à-dire la fonction définie par la série entière (voir [40]) :

$$\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k^n}, \quad |z| < 1. \tag{1}$$

La valeur en $z = 1$ de cette somme est aussi la valeur en $z = n$ de la zêta de Riemann (voir Section 3) :

$$\zeta(n) = \mathrm{Li}_n(1). \tag{2}$$

Ces polylogarithmes classiques sont, en fait, des intégrales itérées impropres de formes différentielles à pôles logarithmiques à l'infini sur $\mathbf{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$:

$$\mathrm{Li}_1(z) = \log\left(\frac{1}{1-z}\right), \qquad \mathrm{Li}_n(z) = \int_0^z \mathrm{Li}_{n-1}(s)\frac{ds}{s}. \tag{3}$$

Sous cette forme, le polylogarithme $\mathrm{Li}_n(z)$ se prolonge en une fonction multivaluée sur $\mathbf{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$. D'après la définition du polylogarithme classique $\mathrm{Li}_n(z)$ par les intégrales itérées, nous considérons cette fonction comme l'évaluation du mot $x_0^{n-1}x_1$ par rapport aux formes différentielles :

$$\omega_0 = \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{dz}{1-z}. \tag{4}$$

Nous notons encore $\mathrm{Li}_n(z)$ par $\mathrm{Li}_{x_1 x_0^{n-1}}(z)$ [27] :

$$\mathrm{Li}_n(z) = \mathrm{Li}_{x_0^{n-1}x_1}(z) = \alpha_0^z(x_0^{n-1}x_1). \tag{5}$$

Nielsen a étudié aussi le polylogarithme $L_{n,p}(z)$ qui est définie récursivement comme suit (notons que $L_{n,1}(z) = \mathrm{Li}_{n+1}(z)$) :

$$L_{0,p}(z) = \frac{1}{p!}\log^p\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad L_{n,p}(z) = \int_0^z L_{n-1,p}(s)\frac{ds}{s}. \tag{6}$$

Le polylogarithme de Nielsen admet également un développement en série entière :

$$L_{n,p}(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{S_k^{(k-p)}}{\Gamma(p)}\frac{z^k}{k^n}, \tag{7}$$

où $S_k^{(k-p)}$ est le nombre de Stirling de première espèce. Nielsen a établi les relations entre les valeurs de ces sommes [1] en $z = 1, z = -1$ et $z = 1/2$ (voir Section 3). De même, nous appelons également polylogarithme de Nielsen [2] la somme suivante:

$$H_{n,p}(z) = \sum_{k\geq 1} H_{k-1}^{(p)}\frac{z^k}{k^n}, \tag{8}$$

où $H_{k-1}^{(p)}$ est le nombre harmonique généralisé. Car Nielsen a également étudié les relations entre les valeurs $H_{n,p}(1)$ et $\mathrm{Li}_n(1)$ [43] (voir Section 3).

D'après les définitions précédentes de $L_{n,p}(z)$ et de $H_{n,p}(z)$, nous considérons ces fonctions comme l'évaluation des mots $x_0^{n-1}x_1^p$ et $x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}x_1$ par rapport aux formes différentielles ω_0 et ω_1. Nous notons encore $L_{n,p}(z)$ par $\mathrm{Li}_{x_0^{n-1}x_1^p}(z)$ et $H_{n,p}(z)$ par $\mathrm{Li}_{x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}x_1}(z)$ [30] :

$$L_{n,p}(z) = \mathrm{Li}_{x_0^{n-1}x_1^p}(z) = \alpha_0^z(x_0^{n-1}x_1^p), \tag{9}$$

$$H_{n,p}(z) = \mathrm{Li}_{x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}x_1}(z) = \alpha_0^z(x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}x_1). \tag{10}$$

Plus généralement, nous étudions les polylogarithmes généralisés suivants :

Définition 2.1 *Pour tout mot* $w = x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_k-1}x_1 \in X^*x_1$*, nous définissons le* polylogarithme de Nielsen $\mathrm{Li}_w(z)$ *comme l'intégrale itérée impropre* $\alpha_0^z(w)$ *par rapport aux formes différentielles* $\omega_0 = dz/z$ *et* $\omega_1 = dz/(1-z)$*.*

Le polylogarithme $\mathrm{Li}_w(z)$ admet également un développent en série :

$$\mathrm{Li}_w(z) = \sum_{n_1>\ldots>n_k>0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}\ldots n_k^{s_k}}. \tag{11}$$

Nous étendons la définition 2.1 sur *tous* les mots w de X^* comme suit :

1. Nielsen note [43] $s_{n,p} = L_{n,p}(1)$, $\sigma_{n,p} = (-1)^p L_{n,p}(-1)$ et $a_{n,p} = L_{n,p}(1/2)$.
2. Nielsen note [43] $c_{n,p} = H_{n,p}(1)$.

Définition 2.2

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_1(z) &= 1, & (12)\\
\mathrm{Li}_{x_0^k}(z) &= \frac{[\log(z)]^k}{k!}, \quad k \geq 0 & (13)\\
\mathrm{Li}_{wx_1x_0^k}(z) &= \int_1^z\int_1^{s_1}\ldots\int_0^{s_k} Li_w(s_{k+1})\frac{ds_{k+1}}{1-s_{k+1}}\frac{ds_k}{s_k}\ldots\frac{ds_1}{s_1}, \quad k \geq 0, w \in X^* & (14)
\end{aligned}$$

Définition 2.3 *Les* sommes d'Euler-Zagier *(MZVs) sont définies par*[3]

$$\zeta(s_1,\ldots,s_k) = \mathrm{Li}_w(1) = \sum_{n_1>\ldots>n_k>0} \frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_k^{s_k}}. \tag{15}$$

k *est la* profondeur *et* $s = s_1 + \ldots + s_k$ *est le* poids *de* $\zeta(s_1,\ldots,s_k)$.

Maintenant, à chaque mot $w = x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_k-1}x_1$ dans X^*x_1, nous associons de manière biunivogue, le multi-indice $s = (s_1,\cdots,s_k)$. Ainsi, il convient de noter :

$$\zeta_w = \zeta(w) = \zeta(s_1,\ldots,s_k) \tag{16}$$

et :

$$\mathrm{Li}_w(z) = \mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_k}(z). \tag{17}$$

Nous étendons par linéarité la définition 2.2 à $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ et la définition 2.3 à $x_0\mathbb{Q}\langle X\rangle x_1$ comme suit :

$$\forall P = \sum_{w\in\operatorname{supp} P}\langle P|w\rangle w \in \mathbb{Q}\langle X\rangle, \quad \mathrm{Li}_P(z) = \sum_{w\in\operatorname{supp} P}\langle P|w\rangle\,\mathrm{Li}_w(z), \tag{18}$$

$$\forall Q = \sum_{w\in\operatorname{supp} Q}\langle Q|w\rangle w \in x_1\mathbb{Q}\langle X\rangle x_0, \qquad \zeta(Q) = \sum_{w\in\operatorname{supp} Q}\langle Q|w\rangle\zeta(w). \tag{19}$$

2.2 Série génératrice non commutative

Les définitions 2.1 et 2.2 nous permettent d'introduire la série génératrice non commutative des polylogarithmes :

Définition 2.4 ([33])

$$L(z) = 1 + \sum_{w\in X^+}\mathrm{Li}_w(z)\; w. \tag{20}$$

Théorème 2.1 ([33]) *La série génératrice* $L(z)$ *satisfait l'équation de Drinfel'd,* i.e. *l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}L(z) &= L(z)\left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z}\right), & (21)\\
L(\varepsilon) &= e^{x_0\log\varepsilon} + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad si\ \varepsilon \to 0^+. & (22)
\end{aligned}$$

3. Les sommes d'Euler-Zagier sont convergente pour $n_1 > 1$.

D'après la condition limite (22), nous déduisons :

$$L(z) \quad \sim \quad e^{x_0 \log z} \quad \text{si } z \to 0^+. \tag{23}$$

En d'autres termes, la limite de $L(z)$ quand $z \in \mathbb{R}, z \to 0^+$ est une exponentielle de Lie. Cette condition nous permet de montrer le théorème :

Théorème 2.2 ([33]) *La série génératrice $L(z)$ est une exponentielle de Lie.*

D'après le théorème de Ree [45], nous en déduisons que la série génératrice $L(z)$ satisfait le *critère de Friedrich* :

Corollaire 2.1

$$\forall u, v \in X^*, \quad \mathrm{Li}_{u \,\sqcup\!\sqcup\, v} = \mathrm{Li}_u \, \mathrm{Li}_v \,. \tag{24}$$

La série génératrice $L(z)$ peut s'obtenir comme l'image par le morphisme $\alpha \otimes \mathrm{Id}$ de la série double $\mathcal{D}$ suivante (rapellons que α est un morphisme de monoïde pour le produit de mélange) :

$$\mathcal{D} \quad = \quad \sum_{w \in X^*} w \otimes w \tag{25}$$

$$L(z) \quad = \quad (\alpha \otimes \mathrm{Id})\mathcal{D}. \tag{26}$$

La série $\mathcal{D}$ est une exponentielle de Lie que l'on peut factoriser en utilisant une factorisation classique, due à Schützenberger [46], de la série double dans $\mathrm{Sh}_{\mathbb{Q}}\langle X \rangle \widehat{\otimes} \mathbb{Q}\langle X \rangle$. On introduit pour cela une base $\{P(l)\}_{l \in \mathcal{L}}$ de l'algèbre de Lie libre sur X indexée par les mots de Lyndon, et sa "base duale" $\{P^*\}_{l \in \mathcal{L}}$, qui est aussi une base de transcendance de l'algèbre de mélange $\mathrm{Sh}_{\mathbb{Q}}\langle X \rangle$. Cette factorisation en produit infini s'écrit :

$$\mathcal{D} = \prod_{\substack{l \in \mathcal{L} \\ \text{lexicographique décroissant}}} e^{P^*(l) \otimes P(l)}, \tag{27}$$

On pose alors:

Définition 2.5 ([33])

$$Z = \prod_{\substack{l \in \mathcal{L} \setminus \{x_0, x_1\} \\ \textit{lexicographique décroissant}}} e^{\zeta(P^*(l)) P(l)}. \tag{28}$$

et on en déduit le corollaire :

Corollaire 2.2

$$L(z) = e^{-\log(1-z) x_1} \; Z \; e^{\log(z) x_0}. \tag{29}$$

On en déduit :

Proposition 2.1 ([33]) *Z est l'unique exponentielle de Lie telle que*

$$(Z|w) = \zeta(w), \quad w \in x_0X^*x_1, \tag{30}$$
$$(Z|x_0) = (Z|x_1) = 0. \tag{31}$$

Cette série Z correspond en fait à la série Φ_{KZ} de Drinfel'd [16]. Et nous avons :

Théorème 2.3 ([33]) *Lorsque $\varepsilon \to 0^+$, la série génératrice des polylogarithmes L admet le développement asymptotique suivant :*

$$L(1-\varepsilon) \sim e^{-x_1 \log \varepsilon}\, Z \quad si\ \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \to 0 \tag{32}$$

Corollaire 2.3 *Pour tout mot de Lyndon $l \in x_0X^*x_1$, nous avons :*

$$\mathrm{Li}_l(1-\varepsilon) \sim \zeta(l) \quad si\ \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \to 0 \tag{33}$$

Le théorème de Radford [44, 46] permet de calculer, en conséquent, le comportement asymptotique en $z = 1$ des autres polylogarithmes Li_w.

Exemple 2.1 *Pour $\varepsilon \to 0^+$, nous avons :*

$$\mathrm{Li}_{x_0}(1-\varepsilon) \sim -\varepsilon \quad et \quad \mathrm{Li}_{x_1}(1-\varepsilon) \sim -\log \varepsilon. \tag{34}$$

Considérons le mot $x_1^2x_0$. Le théorème de Radford nous donne :

$$x_1^2x_0 = x_0x_1^2 - x_1 \sqcup\!\sqcup\, x_0x_1 + 1/2x_0 \sqcup\!\sqcup\, x_1^{\sqcup\!\sqcup\, 2}. \tag{35}$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Li}_{x_1^2x_0}(1-\varepsilon) \sim \zeta(2,1) + \zeta(2)\log \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon \log^2 \varepsilon + \ldots \tag{36}$$

D'après une identité d'Euler $\zeta(3) = \zeta(2,1)$, nous déduisons aussi :

$$\mathrm{Li}_{x_1^2x_0}(1-\varepsilon) \sim \zeta(3) + \zeta(2)\log \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon \log^2 \varepsilon + \ldots \tag{37}$$

Par conséquent, l'étude du comportement asymptotique en $z = 1$ des polylogarithmes conduit aux sommes d'Euler-Zagier et leur relations (voir Section 3).

2.3 Calcul de la monodromie

Rappelons que pour un chemin différentiable $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} - \{0,1\}$ allant de a à b, la série de Chen $S_\gamma \in \mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle$ est la solution évaluée en $z = b$ de l'équation différentielle (21) :

$$\frac{d}{dz}S(z) = \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z}\right)S(z), \tag{38}$$
$$S(a) = 1. \tag{39}$$

S_γ est une *exponentielle de Lie* qui ne dépend pas du paramétrage du chemin γ [45, 46]. A deux chemins appartenant à la même classe d'homotopie [14] correspondent des séries égales. Soit $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ le chemin obtenu en mettant bout à bout deux chemins γ_1 et γ_2. On a alors

$$S_{\gamma_1\gamma_2} = S_{\gamma_2} S_{\gamma_1} \tag{40}$$

et on en déduit que

$$S_{\gamma^{-1}} = S_\gamma^{-1}. \tag{41}$$

Soit z_0 un point de $\mathcal{R}$ que l'on identifie avec sa projection sur $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \rightsquigarrow z$ un chemin différentiable dans $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. On peut prolonger analytiquement la série L le long de ce chemin. Alors les séries $L(z)$ et $S_{z_0 \rightsquigarrow z} L(z)$ satisfont l'équation différentielle (21) et prennent la même valeur en $z = z_0$. Ceci prouve que

Proposition 2.2 ([33]) *Pour tout chemin $z_0 \rightsquigarrow z$ dans $\mathbb{C} - \{0,1\}$, nous avons :*

$$L(z) = S_{z_0 \rightsquigarrow z} L(z_0). \tag{42}$$

En appliquant les formules (42) et (32) on en déduit le développement asymptotique :

Corollaire 2.4

$$S_{\varepsilon \rightsquigarrow 1-\varepsilon} \quad \sim \quad e^{-x_1 \log \varepsilon}\ Z\ e^{-x_0 \log \varepsilon}, \qquad \textit{pour } \varepsilon \to 0^+, \tag{43}$$

On considère le $\mathbb{C}$-morphisme

$$\rho : \mathbb{C}[\varepsilon, \log \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{C} \tag{44}$$

qui à tout polynôme de $\mathbb{C}[\varepsilon, \log \varepsilon]$ associe son terme constant. Ce morphisme s'étend de manière naturelle aux séries en un $\mathbb{C}$-morphisme :

$$\rho : \mathbb{C}[\varepsilon, \log \varepsilon]\langle\langle X \rangle\rangle \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle. \tag{45}$$

La formule (43) prouve que la série Z *renormalise* la série de Chen $S_{\varepsilon \rightsquigarrow 1-\varepsilon}$ ie. :

Proposition 2.3 ([33])

$$Z = \rho(S_{\varepsilon \rightsquigarrow 1-\varepsilon}). \tag{46}$$

Exemple 2.2 *A titre d'exemple, voici le développement à l'ordre* 4 *de* $\log Z$, *calculé en* Axiom *:*

$$\begin{aligned} \log Z &= \zeta(2)[x_0, x_1] + \zeta(3)[x_0, [x_0, x_1]] + \zeta(3)[[x_0, x_1], x_1] \\ &\quad + \frac{2}{5}\zeta(2)^2[x_0, [x_0, [x_0, x_1]]] + \frac{1}{10}\zeta(2)^2[x_0, [[x_0, x_1], x_1]] \\ &\quad + \frac{2}{5}\zeta(2)^2[[[x_0, x_1], x_1], x_1] + \cdots \end{aligned} \tag{47}$$

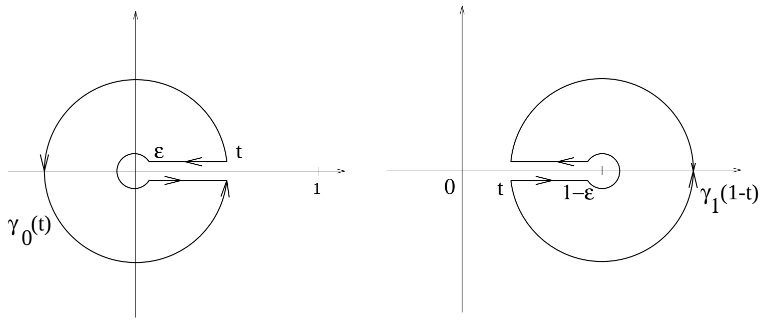

FIG. 1 - *Chemins d'intégration $\gamma_0(t)$ et $\gamma_1(t)$*

Nous étudions le prolongement analytique de la série $L(z)$ le long d'un chemin fermé. D'après (42), ceci permet de calculer la monodromie grâce à la série de Chen du chemin considéré. Nous montrons que la série de Chen d'un chemin circulaire de rayon ε autour de la singularité $z = 0$ (resp. $z = 1$) est égale à $e^{2i\pi x_0} + O(\varepsilon)$ (resp. $e^{-2i\pi x_1} + O(\varepsilon)$). La figure 1 indique les chemins considérés pour calculer la monodromie correspondant à un tour autour d'une des singularités en partant d'un point t de l'axe réel. Le calcul donne :

Théorème 2.4 ([33]) *La monodromie de la série $L(z)$ est donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_0 L(t) & = & L(t)\, e^{2i\pi x_0}, \\ \mathcal{M}_1 L(t) & = & L(t)\, Z^{-1}\, e^{2i\pi \mathfrak{m}_1}, \end{array} \right. \tag{48}$$

où

$$e^{2i\pi \mathfrak{m}_1} = Z^{-1} e^{-2i\pi x_1} Z. \tag{49}$$

En utilisant la factorisation de la série Z donnée par (28) et les propriétés classiques de la représentation adjointe d'un groupe de Lie [10] :

$$e^a e^b e^{-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}_a} b}, \tag{50}$$

on obtient :

Proposition 2.4 ([33])

$$\mathfrak{m}_1 = \prod_{\substack{l \in \mathcal{L}\setminus\{x_0,x_1\} \\ \textit{lexicographique décroissant}}} e^{-\zeta(P^*(l))\,\mathrm{ad}\,P(l)}(-x_1). \tag{51}$$

Exemple 2.3 ([33]) *A titre d'exemple, voici le développement de $\mathfrak{m}_1$ à l'ordre 6, calculé en* AXIOM*(pour simplifier les notations, dans l'expression suivante, nous avons codé $P(l)$ par $[l]$, si l est un mot de Lyndon) :*

$$\mathfrak{m}_1 \quad = \quad -x_1 + \zeta_{x_0x_1}[x_0x_1^2] + \zeta_{x_0^2x_1}[x_0^2x_1^2] + \zeta_{x_0x_1^2}[x_0x_1^3] + \zeta_{x_0^3x_1}[x_0^3x_1^2]$$

$$
\begin{aligned}
&- \zeta_{x_0^3x_1}[x_0^2x_1x_0x_1] + \zeta_{x_0^2x_1^2}[x_0^2x_1^3] + (\zeta_{x_0^2x_1^2} - \frac{1}{2}\zeta_{x_0x_1^2})[x_0x_1x_0x_1^2] \\
&+ \zeta_{x_0x_1^3}[x_0x_1^4] + \zeta_{x_0^4x_1}[x_0^4x_1^2] - 2\zeta_{x_0^4x_1}[x_0^3x_1x_0x_1] \\
&+ \zeta_{x_0^3x_1^2}[x_0^3x_1^3] + (3\zeta_{x_0^3x_1^2} + \zeta_{x_0^2x_1x_0x_1})[x_0^2x_1x_0x_1^2] \\
&+ (3\zeta_{x_0^3x_1^2} + \zeta_{x_0x_1}\zeta_{x_0^2x_1} + 2\zeta_{x_0^2x_1x_0x_1})[x_0^2x_1^2x_0x_1] \\
&+ \zeta_{x_0^2x_1^3}[x_0^2x_1^4] + (4\zeta_{x_0^2x_1^3} + \zeta_{x_0x_1x_0x_1^2})[x_0x_1x_0x_1^3] + \zeta_{x_0x_1^4}[x_0x_1^5]. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

Exemple 2.4 ([33]) *Nielsen a donné la monodromie en* 1 *de* Li_n *(formule (16) dans [42]) :*

$$
\mathcal{M}_1 \,\mathrm{Li}_n(z) = \mathrm{Li}_n(z) - 2\mathrm{i}\pi \frac{\log^n(z)}{n!}. \qquad (53)
$$

Grâce à (48) et (51), nous avons obtenu les monodromies suivantes des plylogarithmes en Axiom*(pour simplifier les notations, dans l'expression suivante, nous avons remplacé* $2i\pi$ *par* p *et* Li *par* L*) :*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}L_{x_0} &= L_{x_0} && (54)\\
\mathcal{M}L_{x_1} &= L_{x_1} - p && (55)\\
\mathcal{M}L_{x_0x_1} &= L_{x_0x_1} - pL_{x_0} && (56)\\
\mathcal{M}L_{x_0^2x_1} &= L_{x_0^2x_1} - \frac{1}{2}pL_{x_0}^2 && (57)\\
\mathcal{M}L_{x_0x_1^2} &= L_{x_0x_1^2} - pL_{x_0x_1} + \frac{1}{2}p^2L_{x_0} + p\zeta_{x_0x_1} && (58)\\
\mathcal{M}L_{x_0^3x_1} &= L_{x_0^3x_1} - \frac{1}{6}pL_{x_0}^3 && (59)\\
\mathcal{M}L_{x_0^2x_1^2} &= L_{x_0^2x_1^2} - pL_{x_0^2x_1} + \frac{1}{4}p^2L_{x_0}^2 + p\zeta_{x_0x_1}L_{x_0} + p\zeta_{x_0^2x_1} && (60)\\
\mathcal{M}L_{x_0x_1^3} &= L_{x_0x_1^3} - pL_{x_0x_1^2} + \frac{1}{2}p^2L_{x_0x_1} - \frac{1}{6}p^3L_{x_0} + p\zeta_{x_0x_1^2} \\
&- \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0x_1} && (61)\\
\mathcal{M}L_{x_0^4x_1} &= L_{x_0^4x_1} - \frac{1}{24}pL_{x_0}^4 && (62)\\
\mathcal{M}L_{x_0^3x_1^2} &= L_{x_0^3x_1^2} - pL_{x_0^3x_1} + \frac{1}{12}p^2L_{x_0}^3 + \frac{1}{2}p\zeta_{x_0x_1}L_{x_0}^2 \\
&+ p\zeta_{x_0^2x_1}L_{x_0} + p\zeta_{x_0^3x_1} && (63)\\
\mathcal{M}L_{x_0^2x_1x_0x_1} &= L_{x_0^2x_1x_0x_1} + 3pL_{x_0^3x_1} - pL_{x_0}L_{x_0^2x_1} - p\zeta_{x_0x_1}L_{x_0}^2 \\
&- 2p\zeta_{x_0^2x_1}L_{x_0} - 3p\zeta_{x_0^3x_1} && (64)\\
\mathcal{M}L_{x_0^2x_1^3} &= L_{x_0^2x_1^3} - pL_{x_0^2x_1^2} + \frac{1}{2}p^2L_{x_0^2x_1} - \frac{1}{12}p^3L_{x_0}^2 \\
&+ (p\zeta_{x_0x_1^2} - \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0x_1})L_{x_0} + p\zeta_{x_0^2x_1^2} - \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0^2x_1} && (65)\\
\mathcal{M}L_{x_0x_1x_0x_1^2} &= L_{x_0x_1x_0x_1^2} + 2pL_{x_0^2x_1^2} - p^2L_{x_0^2x_1} - \frac{1}{2}pL_{x_0x_1}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ && (\frac{1}{2}p^2 L_{x_0} + p\zeta_{x_0x_1})L_{x_0x_1} + (-3p\zeta_{x_0x_1^2} + \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0x_1})L_{x_0} \\
&- && 2p\zeta_{x_0^2x_1^2} + p^2\zeta_{x_0^2x_1} - \frac{1}{2}p\zeta_{x_0x_1}^2 && (66) \\
\mathcal{M}L_{x_0x_1^4} &= && L_{x_0x_1^4} - pL_{x_0x_1^3} + \frac{1}{2}p^2L_{x_0x_1^2} - \frac{1}{6}p^3L_{x_0x_1} + \frac{1}{24}p^4L_{x_0} \\
&+ && p\zeta_{x_0x_1^3} - \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0x_1^2} + \frac{1}{6}p^3\zeta_{x_0x_1} && (67) \\
\mathcal{M}L_{x_0^5x_1} &= && L_{x_0^5x_1} - \frac{1}{120}pL_{x_0}^5 && (68) \\
\mathcal{M}L_{x_0^4x_1^2} &= && L_{x_0^4x_1^2} - pL_{x_0^4x_1} + \frac{1}{48}p^2L_{x_0^4} + \frac{1}{6}p\zeta_{x_0x_1}L_{x_0^3} + \frac{1}{2}p\zeta_{x_0^2x_1}L_{x_0^2} \\
&+ && p\zeta_{x_0^3x_1}L_{x_0} + p\zeta_{x_0^4x_1} && (69) \\
\mathcal{M}L_{x_0^3x_1x_0x_1} &= && L_{x_0^3x_1x_0x_1} + 4pL_{x_0^4x_1} - pL_{x_0}L_{x_0^3x_1} - \frac{1}{3}p\zeta_{x_0x_1}L_{x_0}^3 \\
&- && p\zeta_{x_0^2x_1}L_{x_0}^2 - 3p\zeta_{x_0^3x_1}L_{x_0} - 4p\zeta_{x_0^4x_1} && (70) \\
\mathcal{M}L_{x_0^3x_1^3} &= && L_{x_0^3x_1^3} - pL_{x_0^3x_1^2} + \frac{1}{2}p^2L_{x_0^3x_1} - \frac{1}{36}p^3L_{x_0}^3 \\
&+ && (\frac{1}{2}p\zeta_{x_0x_1^2} - \frac{1}{4}p^2\zeta_{x_0x_1})L_{x_0}^2 + (p\zeta_{x_0^2x_1^2} - \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0^2x_1})L_{x_0} \\
&+ && p\zeta_{x_0^3x_1^2} - \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0^3x_1} && (71) \\
\mathcal{M}L_{x_0^2x_1x_0x_1^2} &= && L_{x_0^2x_1x_0x_1^2} - pL_{x_0^2x_1x_0x_1} - \frac{3}{2}p^2L_{x_0^3x_1} \\
&+ && (\frac{1}{2}p^2L_{x_0} + p\zeta_{x_0x_1})L_{x_0^2x_1} + (-\frac{3}{2}p\zeta_{x_0x_1^2} + \frac{1}{4}p^2\zeta_{x_0x_1})L_{x_0}^2 \\
&+ && (-2p\zeta_{x_0^2x_1^2} + p^2\zeta_{x_0^2x_1} - \frac{1}{2}p\zeta_{x_0x_1}^2)L_{x_0} \\
&+ && \frac{3}{2}p^2\zeta_{x_0^3x_1} + p\zeta_{x_0^2x_1x_0x_1} && (72) \\
\mathcal{M}L_{x_0^2x_1^2x_0x_1} &= && L_{x_0^2x_1^2x_0x_1} + pL_{x_0^2x_1x_0x_1} + 3pL_{x_0^3x_1^2} - pL_{x_0}L_{x_0^2x_1^2} \\
&- && 2p\zeta_{x_0x_1}L_{x_0^2x_1} + (\frac{3}{2}p\zeta_{x_0x_1^2} + \frac{1}{4}p^2\zeta_{x_0x_1})L_{x_0}^2 + \frac{3}{2}p\zeta_{x_0x_1}^2L_{x_0} \\
&- && 3p\zeta_{x_0^3x_1^2} + p\zeta_{x_0x_1}\zeta_{x_0^2x_1} - p\zeta_{x_0^2x_1x_0x_1} && (73) \\
\mathcal{M}L_{x_0^2x_1^4} &= && L_{x_0^2x_1^4} - pL_{x_0^2x_1^3} + \frac{1}{2}p^2L_{x_0^2x_1^2} - \frac{1}{6}p^3L_{x_0^2x_1} + \frac{1}{48}p^4L_{x_0}^2 \\
&+ && (p\zeta_{x_0x_1^3} - \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0x_1^2} + \frac{1}{6}p^3\zeta_{x_0x_1})L_{x_0} + p\zeta_{x_0^2x_1^3} \\
&- && \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0^2x_1^2} + \frac{1}{6}p^3\zeta_{x_0^2x_1} && (74) \\
\mathcal{M}L_{x_0x_1x_0x_1^3} &= && L_{x_0x_1x_0x_1^3} - pL_{x_0x_1x_0x_1^2} - p^2L_{x_0^2x_1^2} + \frac{1}{3}p^3L_{x_0^2x_1} + \frac{1}{4}p^2L_{x_0x_1}^2 \\
&+ && (-\frac{1}{6}p^3L_{x_0} + p\zeta_{x_0x_1^2} - \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0x_1})L_{x_0x_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \quad (-4p\zeta_{x_0x_1^3} + p^2\zeta_{x_0x_1^2} - \frac{1}{6}p^3\zeta_{x_0x_1})L_{x_0} \\
& + \quad p^2\zeta_{x_0^2x_1^2} - \frac{1}{3}p^3\zeta_{x_0^2x_1} + p\zeta_{x_0x_1x_0x_1^2} + \frac{1}{4}p^2\zeta^2_{x_0x_1} \quad (75)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}L_{x_0x_1^5} &= L_{x_0x_1^5} - pL_{x_0x_1^4} + \frac{1}{2}p^2L_{x_0x_1^3} - \frac{1}{6}p^3L_{x_0x_1^2} + \frac{1}{24}p^4L_{x_0x_1} \\
&- \frac{1}{120}p^5L_{x_0} + p\zeta_{x_0x_1^4} - \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0x_1^3} + \frac{1}{6}p^3\zeta_{x_0x_1^2} - \frac{1}{24}p^4\zeta_{x_0x_1} \quad (76)
\end{aligned}
$$

Par conséquent, la monodromie des polylogarithmes s'exprime à l'aide des sommes d'Euler-Zagier et de leur relations (voir Section 3). Et nous avons :

Corollaire 2.5 *La monodromie des polylogarithmes est donnée par*

$$
\begin{aligned}
\forall w \in X^*, \quad \mathcal{M}_0L_{wx_0} &= L_{wx_0} + 2i\pi L_w + \cdots, \quad (77)\\
\mathcal{M}_1L_{wx_1} &= L_{wx_1} - 2i\pi L_w + \cdots, \quad (78)
\end{aligned}
$$

où les restes sont des combinaisons linéaires des polylogarithmes indicés par les mots de longueur plus courte que w.

2.4 Théorème de structure

Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons la relation linéaire suivante :

$$\sum_{w\in X^*,|w|\le n} \lambda_w \operatorname{Li}_w(z) = 0, \quad \lambda_w \in \mathbb{C}. \quad (79)$$

Si $n = 0$ alors comme $\operatorname{Li}_1(z) = 1$ alors $\lambda_1 = 0$. Supposons que pour tout entier $k, 0 \le k \le n-1$, l'expression (79) entraîne la nullité des λ_w. Réécrivons (79) comme suit :

$$\lambda_1 + \sum_{|u|<n} \lambda_{ux_0} \operatorname{Li}_{ux_0} + \sum_{|u|<n} \lambda_{ux_1} \operatorname{Li}_{ux_1} = 0. \quad (80)$$

D'après le Corollaire 2.5, en appliquant les opérateurs $(\mathcal{M}_0 - \mathrm{Id})$ and $(\mathrm{Id} - \mathcal{M}_1)$ à l'expression (80), nous obtenons respectivement :

$$2i\pi \sum_{|u|=n-1} \lambda_{ux_0} \operatorname{Li}_u + \sum_{|u|<n-1} \mu_u \operatorname{Li}_u = 0, \quad (81)$$

$$2i\pi \sum_{|u|=n-1} \lambda_{ux_1} \operatorname{Li}_u + \sum_{|u|<n-1} \nu_u \operatorname{Li}_u = 0. \quad (82)$$

Par hypothèse de récurrence, nous déduisons que les coefficients λ_{ux_0} et λ_{ux_1} sont nuls pour $|u| = n-1$. D'où :

Théorème 2.5 ([33]) *Les polylogarithmes $\{Li_w\}_{w\in X^*}$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants.*

Les conséquences de ce théorème sont importantes car l'algèbre de mélange est une algèbre commutative libre dont on connaît de nombreuses bases de transcendance comme l'ensemble des mots de Lyndon.

Corollaire 2.6 *La $\mathbb{C}$-algèbre des polylogarithmes est isomorphe à l'algèbre de mélange* $\mathrm{Sh}_{\mathbb{C}}\langle X\rangle$.

Corollaire 2.7 *Les polylogarithmes $\{\mathrm{Li}_l\}_{l\in\mathcal{L}}$ forment une base de transcendance de l'algèbre des polylogarithmes.*

Dans toute la suite, les calculs et les algorithmes seront effectués dans cette base.

2.5 Equations fonctionnelles en polylogarithmes

On considère le groupe du birapport $\mathcal{G}$ engendré par les transformations projectives de la droite complexe $P^1\mathbb{C}$ qui laissent globalement invariants les trois points $0, 1, \infty$:

$$\mathcal{G} = \left\{ z, \frac{1}{z}, \frac{z-1}{z}, \frac{z}{z-1}, \frac{1}{1-z}, 1-z \right\}. \tag{83}$$

Un élément g de $\mathcal{G}$ est déterminé par son action sur ces trois points. Le *pull–back* des formes ω_0 et ω_1 vaut :

$$g^*\omega_0 = \frac{dg(z)}{g(z)} \quad \text{et} \quad g^*\omega_1 = \frac{dg(z)}{1-g(z)}.$$

Ainsi, pour le groupe du birapport $\mathcal{G}$, nous avons [27, 34] :

g	z	$\frac{1}{z}$	$\frac{z-1}{z}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z}$	$1-z$
$g^*\omega_1$	ω_1	$\omega_1+\omega_0$	$-\omega_0$	$-\omega_1$	$-\omega_0-\omega_1$	$-\omega_0$
$g^*\omega_0$	ω_0	$-\omega_0$	$-\omega_1-\omega_0$	$\omega_1+\omega_0$	ω_1	$-\omega_1$

Par dualité, l'image réciproque g_* des séries de Chen par g est la substitution donnée sur les lettres par :

g	z	$\frac{1}{z}$	$\frac{z-1}{z}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z}$	$1-z$
g_*x_1	x_1	x_1	$-x_0$	x_0-x_1	x_0-x_1	$-x_0$
g_*x_0	x_0	x_1-x_0	x_1-x_0	x_0	$-x_1$	$-x_1$

Elle s'étend donc aux mots en un morphisme de monoïde (pour la concaténation) et s'étend par linéarité aux séries :

Théorème 2.6 ([33]) *Soient g une transformation du groupe $\mathcal{G}$ et S_γ la série de Chen associée à un chemin γ de $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Nous avons :*

$$S_{g\circ\gamma} = g_*S_\gamma = \sum_{w\in X^*} (S|w) g_* w. \tag{84}$$

Dans la suite, pour chaque $g \in \mathcal{G}$, nous notons $g_* L(t)$ par $L(g_* x_0, g_* x_1 | t)$ et $g_* Z$ par $Z(g_* x_0, g_* x_1)$.

Les formules suivantes permettent de calculer les polylogarithmes en $1-t$, $1/t$ et $1-1/t$, grâce à la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, en fonction des polylogarithmes en t lorsque t est un nombre réel compris entre 0 et 1.

2.6 Calcul des polylogs en $1-t$ pour $0<t<1$

D'après (42) on a :

$$L(1-t) = S_{1-\varepsilon \rightsquigarrow 1-t} L(1-\varepsilon). \tag{85}$$

Pour $g(z) = 1-z$, on a $g_* x_0 = -x_1$ et $g_* x_1 = -x_0$. Le Théorème 2.6 donne

$$S_{1-\varepsilon \rightsquigarrow 1-t} = g_* S_{\varepsilon \rightsquigarrow t} = g_* \left(L(t) L^{-1}(\varepsilon)\right) \sim g_* L(t)\ g_* \left(e^{-x_0 \log \varepsilon}\right). \tag{86}$$

D'autre part, $g_*(e^{-x_0 \log \varepsilon}) = e^{x_1 \log \varepsilon}$. On obtient finalement, en passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$:

Proposition 2.5 ([34]) *Pour tout réel $t \in]0,1[$, on a :*

$$L(1-t) = L(-x_1, -x_0 | t)\ Z. \tag{87}$$

Exemple 2.5 ([34])

$$\log(1-t) = -\mathrm{Li}_1(t) \tag{88}$$

$$\mathrm{Li}_1(1-t) = -\log(t) \tag{89}$$

$$\mathrm{Li}_2(1-t) = -\mathrm{Li}_2(t) + \log(t)\mathrm{Li}_1(t) + \zeta(2) \tag{90}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_3(1-t) &= -\mathrm{Li}_{2,1}(t) + \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_2(t) - \frac{1}{2}\log(t)\mathrm{Li}_1(t)^2 \\ &- \zeta(2)\mathrm{Li}_1(t) + \zeta(3) \end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_{2,1}(1-t) &= -\mathrm{Li}_3(t) + \log(t)\mathrm{Li}_2(t) - \frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{Li}_1(t) \\ &+ \zeta(3) \end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_4(1-t) &= -\mathrm{Li}_{2,1,1}(t) + \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_{2,1}(t) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_1(t)^2\mathrm{Li}_2(t) \\ &+ \frac{1}{6}\log(t)\mathrm{Li}_1(t)^3 + \frac{1}{2}\zeta(2)\mathrm{Li}_1(t)^2 - \zeta(3)\mathrm{Li}_1(t) \\ &+ \frac{2}{5}\zeta(2)^2 \end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_{3,1}(1-t) &= -\mathrm{Li}_{3,1}(t) + \log(t)\mathrm{Li}_{2,1}(t) + \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_3(t) \\ &- \log(t)\mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_2(t) + \frac{1}{4}\log(t)^2\mathrm{Li}_1(t)^2 - \zeta(3)\mathrm{Li}_1(t) \\ &+ \frac{1}{10}\zeta(2)^2 \end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_{2,1,1}(1-t) &= -\mathrm{Li}_4(t) + \log(t)\mathrm{Li}_3(t) - \frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{Li}_2(t) \\ &+ \frac{1}{6}\log(t)^3\mathrm{Li}_1(t) + \frac{2}{5}\zeta(2)^2 \end{aligned} \tag{95}$$

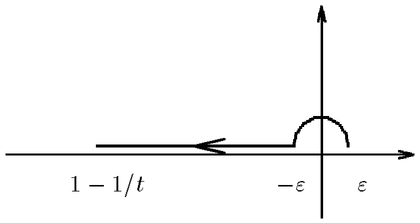

FIG. 2 -

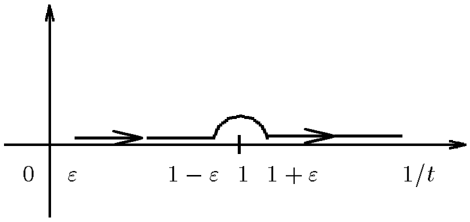

FIG. 3 -

2.7 Calcul des polylogs en $1-1/t$ pour $0<t<1$

D'après (42) en suivant le chemin de la figure 2, on a :

$$L(1-1/t) = S_{-\varepsilon \rightsquigarrow 1-1/t}\ S_{\varepsilon \rightsquigarrow -\varepsilon}\ L(\varepsilon) = S_{-\varepsilon \rightsquigarrow 1-1/t}\ e^{i\pi x_0}\ e^{x_0 \log \varepsilon} \tag{96}$$

Pour $g(z) = 1-1/z$. On a $g_* x_0 = -x_0 + x_1$ et $g_* x_1 = -x_0$. Le Théorème 2.6 donne

$$S_{-\varepsilon \rightsquigarrow 1-1/t} = g_* S_{1-\varepsilon \rightsquigarrow t} = g_*\left(L(t)L^{-1}(1-\varepsilon)\right) = g_*\left(L(t)\ Z^{-1}\ e^{x_1 \log \varepsilon}\right). \tag{97}$$

On obtient finalement, en passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$:

Proposition 2.6 ([34]) *Pour tout réel* $t \in]0,1[$, *on a :*

$$L(1-1/t) = L(-x_0+x_1, -x_0|t)\ Z^{-1}(-x_0+x_1,-x_0)\ e^{i\pi x_0}. \tag{98}$$

Exemple 2.6 ([34])

$$\log\left(\frac{t-1}{t}\right) = (i\pi) - \mathrm{Li}_1(t) - \log(t) \tag{99}$$

$$\mathrm{Li}_1\left(\frac{t-1}{t}\right) = \log(t) \tag{100}$$

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{t-1}{t}\right) = \mathrm{Li}_2(t) - \log(t)\mathrm{Li}_1(t) - \zeta(2) - \frac{1}{2}\log(t)^2 \tag{101}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_3\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \mathrm{Li}_{2,1}(t) - \mathrm{Li}_3(t) - \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_2(t) + \frac{1}{2}\log(t)\mathrm{Li}_1(t)^2 \\ &+ \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\log(t)^2\right)\mathrm{Li}_1(t) + \log(t)\zeta(2) \\ &+ \frac{1}{6}\log(t)^3\end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{2,1}\left(\frac{t-1}{t}\right) &= -\mathrm{Li}_3(t) + \log(t)\mathrm{Li}_2(t) - \frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{Li}_1(t) \\ &+ \zeta(3) - \frac{1}{6}\log(t)^3\end{aligned} \tag{103}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Li}_4\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \mathrm{Li}_{2,1,1}(t) - \mathrm{Li}_{3,1}(t) - \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_{2,1}(t) + \mathrm{Li}_4(t) \\
&+ \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_3(t) + \frac{1}{2}\mathrm{Li}_1(t)^2\mathrm{Li}_2(t) - \frac{1}{6}\log(t)\mathrm{Li}_1(t)^3 \\
&+ \left(-\frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{4}\log(t)^2\right)\mathrm{Li}_1(t)^2 \\
&+ \left(-\log(t)\zeta(2) - \frac{1}{6}\log(t)^3\right)\mathrm{Li}_1(t) \\
&- \frac{7}{10}\zeta(2)^2 - \frac{1}{2}\log(t)^2\zeta(2) - \frac{1}{24}\log(t)^4 \qquad (104) \\
\mathrm{Li}_{3,1}\left(\frac{t-1}{t}\right) &= -\mathrm{Li}_{3,1}(t) + \log(t)\,\mathrm{Li}_{2,1}(t) + 2\,\mathrm{Li}_4(t) \\
&+ (\mathrm{Li}_1(t) - \log(t))\mathrm{Li}_3(t) \\
&- \log(t)\mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_2(t) + \frac{1}{4}\log(t)^2\mathrm{Li}_1(t)^2 \\
&+ \left(-\zeta(3) + \frac{1}{6}\log(t)^3\right)\mathrm{Li}_1(t) \\
&- \log(t)\zeta(3) - \frac{7}{10}\zeta(2)^2 + \frac{1}{24}\log(t)^4 \qquad (105) \\
\mathrm{Li}_{2,1,1}\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \mathrm{Li}_4(t) - \log(t)\mathrm{Li}_3(t) + \frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{Li}_2(t) \\
&- \frac{1}{6}\log(t)^3\mathrm{Li}_1(t) - \frac{2}{5}\zeta(2)^2 - \frac{1}{24}\log(t)^4 \qquad (106)
\end{aligned}
$$

2.8 Calcul des polylogs en $1/t$ pour $0 < t < 1$

D'après (42), en suivant le chemin de la figure 3, on a :

$$L(1/t) = S_{1+\varepsilon \rightsquigarrow 1/t}\ S_{1-\varepsilon \rightsquigarrow 1+\varepsilon}\ S_{\varepsilon \rightsquigarrow 1-\varepsilon}\ L(\varepsilon) = S_{1+\varepsilon \rightsquigarrow 1/t}\ e^{i\pi x_1}\ e^{-x_1 \log \varepsilon}\ Z. \qquad (107)$$

Pour $g(z) = 1/z$. On a $g_* x_0 = -x_0 + x_1$ et $g_* x_1 = x_1$. Le Théorème 2.6 donne

$$S_{1+\varepsilon \rightsquigarrow 1/t} = h_* S_{1-\varepsilon \rightsquigarrow t} = g_*\left(L(t)L^{-1}(1-\varepsilon)\right) = g_*\left(L(t)\ Z^{-1}\ e^{x_1 \log \varepsilon}\right). \qquad (108)$$

On obtient finalement, en passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$:

Proposition 2.7 ([34]) *Pour tout réel $t \in]0,1[$, on a :*

$$L(1/t) = L(-x_0 + x_1, x_1 | t)\ Z^{-1}(-x_0 + x_1, x_1)\ e^{i\pi x_1}\ Z. \qquad (109)$$

Exemple 2.7 ([34])

$$
\begin{aligned}
\log\left(\frac{1}{t}\right) &= -\log(t) \qquad (110) \\
\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{t}\right) &= (i\pi) + \mathrm{Li}_1(t) + \log(t) \qquad (111)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{t}\right) &= -\log(t)(i\pi) - \mathrm{Li}_2(t) + 2\zeta(2) - \frac{1}{2}\log(t)^2 && (112)\\
\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{2}\log(t)^2(i\pi) + \mathrm{Li}_3(t) - 2\log(t)\zeta(2) + \frac{1}{6}\log(t)^3 && (113)\\
\mathrm{Li}_{2,1}\left(\frac{1}{t}\right) &= -\frac{1}{2}\log(t)(i\pi)^2 + \left(-\mathrm{Li}_2(t) + \zeta(2) - \frac{1}{2}\log(t)^2\right)(i\pi)\\
&- \mathrm{Li}_{2,1}(t) + \mathrm{Li}_3(t) - \log(t)\mathrm{Li}_2(t) + \zeta(3) - \frac{1}{6}\log(t)^3 && (114)\\
\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{t}\right) &= -\frac{1}{6}\log(t)^3(i\pi) - \mathrm{Li}_4(t) + \frac{4}{5}\zeta(2)^2 + \log(t)^2\zeta(2)\\
&- \frac{1}{24}\log(t)^4 && (115)\\
\mathrm{Li}_{3,1}\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{4}\log(t)^2(i\pi)^2\\
&+ \left(\mathrm{Li}_3(t) - \zeta(3) - \log(t)\zeta(2) + \frac{1}{6}\log(t)^3\right)(i\pi)\\
&+ \mathrm{Li}_{3,1}(t) - 2\mathrm{Li}_4(t) + \log(t)\mathrm{Li}_3(t) - \log(t)\zeta(3)\\
&+ \frac{4}{5}\zeta(2)^2 + \frac{1}{24}\log(t)^4 && (116)\\
\mathrm{Li}_{2,1,1}\left(\frac{1}{t}\right) &= -\frac{1}{6}\log(t)(i\pi)^3 + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(t) + \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{4}\log(t)^2\right)(i\pi)^2\\
&+ \left(-\mathrm{Li}_{2,1}(t) + \mathrm{Li}_3(t) - \log(t)\mathrm{Li}_2(t) - \frac{1}{6}\log(t)^3\right)(i\pi)\\
&- \mathrm{Li}_{2,1,1}(t) + \mathrm{Li}_{3,1}(t) - \log(t)\mathrm{Li}_{2,1}(t) - \mathrm{Li}_4(t)\\
&+ \log(t)\mathrm{Li}_3(t) - \frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{Li}_2(t) + \frac{11}{10}\zeta(2)^2 - \frac{1}{24}\log(t)^4 && (117)
\end{aligned}$$

Les arguments des propositions 2.5, 2.6, 2.7, permettent donc d'établir le résultat :

Théorème 2.7 *Pour tout mot $w \in X^*$ et pour tout g élément du groupe birapport :*

$$\mathcal{G} = \left\{z, \frac{1}{z}, \frac{z-1}{z}, \frac{z}{z-1}, \frac{1}{1-z}, 1-z\right\},$$

le polylogarithme $\mathrm{Li}_w(g(z))$ est un polynôme en les polylogarithmes indicés par les mots de Lyndon et à coefficients dans :

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}[i\pi, &\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), \zeta(13), \ldots\\
&\zeta(6,2), \zeta(8,2), \zeta(10,2), \ldots\\
&\zeta(8,2,1), \zeta(9,3,1), \zeta(10,2,1), \ldots\\
&\zeta(8,2,1,1), \ldots].
\end{aligned}$$

Par conséquent, les équations fonctionnelles des polylogarithmes font intervenir les sommes d'Euler-Zagier et leur relations (voir Section 3).

3 Sommes d'Euler-Zagier

3.1 La fonction ζ et la fonction η

Les premiers calculs concernant la fonction ζ sont faits par Euler. Cette fonction est définie, pour $k \in \mathbb{N}$, par la série suivante :

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}. \tag{118}$$

Elle est convergente pour $k \geq 2$. Euler a établi que $\zeta(2p)$ est un multiple rationnel de π^{2p}. En particulier $\zeta(2) = \pi^2/6$. On connaît encore rien pour les $\zeta(2p+1)$. Euler a prouvé que $\zeta(2)$ est irrationnel. En 1978, en utilisant la formule de Hjortnaes [23] :

$$\zeta(3) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k} k^3}, \tag{119}$$

Apéry a prouvé que $\zeta(3)$ est irrationnel. On connaît encore rien sur la nature d'irrationnalité des $\zeta(2p+1), p \geq 2$. Certaines formules *expérimentales* analogues aux formules de Hjortnaes sont proposées par Borwein et Bradley pour $\zeta(4n+3)$ [8].

A la somme $\zeta(k)$, on associe traditionnellement la fonction

$$\eta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^k} \tag{120}$$

vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\eta(k) = (1 - 1/2^{k-1})\zeta(k). \tag{121}$$

Le lecteur peut vérifier aisément que les sommes ζ et η sont la valeur en 1 des polylogarithmes $\mathrm{Li}_{x_0^{k-1}x_1}$ et $\mathrm{Li}_{x_0^{k-1}x_2}$ qui sont l'évaluation des mots $x_0^{k-1}x_1$ et $x_0^{k-1}x_2$ respectivement :

$$\zeta(k) = \alpha_0^1(x_0^{k-1}x_1) \quad \text{et} \quad \eta(k) = \alpha_0^1(x_0^{k-1}x_2), \tag{122}$$

par rapport aux formes différentielles :

$$\omega_0 = \frac{dz}{z}, \quad \omega_1 = \frac{dz}{1-z} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{dz}{1+z}. \tag{123}$$

Il convient aussi de noter

$$\zeta(k) = \zeta(x_0^{k-1}x_1) \quad \text{et} \quad \eta(k) = \zeta(x_0^{k-1}x_2). \tag{124}$$

3.2 Sommes d'Euler et relations de Nielsen

Dans [43], Nielsen a voulu étudier la nature d'irrationnalité des $\zeta(2p+1)$ et établir des formules analogues aux $\zeta(2p)$ mais sans avoir pu y parvenir. Avec une analyse élémentaire mais profonde, il a étudié les produits croisés des $\zeta(n)$ et $\eta(p)$ [43]. Son étude a fait apparaître quatre autres types de sommes d'Euler avec et sans l'alternance de signe :

$$\begin{aligned} c_{n,p} &= \sum_{k\geq 2} \frac{H_{k-1}^{(p)}}{k^n}, &(125)\\ d_{n,p} &= \sum_{k\geq 2} \frac{\overline{H}_{k-1}^{(p)}}{k^n}, &(126)\\ \delta_{n,p} &= \sum_{k\geq 2} (-1)^k \frac{\overline{H}_{k-1}^{(p)}}{k^n}, &(127)\\ \gamma_{n,p} &= \sum_{k\geq 2} (-1)^k \frac{H_{k-1}^{(p)}}{k^n}, &(128)\end{aligned}$$

où les $\overline{H}_{k-1}^{(p)}$ et les $H_{k-1}^{(p)}$ sont les nombres harmoniques généralisés avec et sans l'alternance de signe. Euler a montré que pour $n+p\leq 13$ et $n+p$ impair, $c_{n,p}$ s'exprime en terme des $\zeta(n)$. Nielsen a noté $\zeta(n), \eta(n)$ par s_n, σ_n respectivement et il a démontré les relations suivantes entre les sommes d'Euler [43] :

$$\begin{aligned} s_n s_p &= s_{n+p} + c_{n,p} + c_{p,n}, \quad (\text{pour } n>1, p>1) &(129)\\ c_{n,p} &= (-1)^n \sum_{\nu=0}^{p-2} \binom{n+\nu-1}{n-1} c_{n+\nu,p-\nu} + \sum_{\nu=0}^{n-2} (-1)^\nu \binom{p+\nu-1}{p-1} s_{n-\nu} s_{p+\nu} \\ &\quad -(-1)^n \binom{p+n-2}{p-1} [s_{p+n} + c_{1,p+n-1}] \quad (\text{pour } n>0, p>1). &(130)\end{aligned}$$

La relation (129) s'appelle la *formule de réflexion* et permet de déduire :

$$2c_{n,n} = s_n^2 + s_{2n} \qquad (\text{pour } n>1). \tag{131}$$

La relation (130) s'appelle la *formule de réduction.* Elle est une conséquence de la *décomposition de Lagrange* et permet de déduire la relation suivante due à Euler :

$$s_{p+1} = \sum_{\nu=1}^{p-1} c_{\nu,p-\nu+1}, \qquad (\text{pour } p>1). \tag{132}$$

De (129) et de (132), on peut tirer aussi [4] :

$$c_{1,p} = \frac{p}{2} s_{p+1} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=2}^{p-1} s_\nu s_{p+1-\nu}, \qquad (\text{pour } p>2). \tag{133}$$

4. Signalons que l'indice supérieur de la somme à droite est $p-1$ au lieu de $p-2$ comme indiqué dans [43].

Nielsen a donné également les relations analogues entre les autres sommes d'Euler avec l'alternance de signe. En exploitant la relation (130), Borwein, Borwein et Girgensohn dérivent des formules pressenties par Nielsen, donnant $c_{n,p}$ lorsque $n+p$ est *impair* [5]. On ne connaît toujours pas d'expression explicite lorsque $n+p$ est *pair* sauf pour les cas où $n+p=4$ ou 6. Borwein, Borwein et Girgensohn ont montré également que dans le cas pair, ces sommes sont déterminées à l'exception de $(n+p-2)/6$ termes, qui sont considérées comme les *nouvelles constantes* dans [5].

Le lecteur peut vérifier aisément que les sommes $c_{n,p}, d_{n,p}, \delta_{n,p}$ et $\gamma_{n,p}$ sont la valeur en 1 des polylogarithmes $\mathrm{Li}_{x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}x_1}$, $\mathrm{Li}_{x_0^{n-1}x_2x_0^{p-1}x_1}$, $\mathrm{Li}_{x_0^{n-1}x_2x_0^{p-1}x_2}$ et $\mathrm{Li}_{x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}x_2}$, c'est-à-dire les évaluations suivantes, par rapport aux formes différentielles de (123) qu'il convient aussi de noter comme suit :

$$c_{n,p} = \alpha_0^1(x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}x_1) = \zeta(x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}x_1), \tag{134}$$

$$d_{n,p} = \alpha_0^1(x_0^{n-1}x_2x_0^{p-1}x_1) = \zeta(x_0^{n-1}x_2x_0^{p-1}x_1), \tag{135}$$

$$\delta_{n,p} = \alpha_0^1(x_0^{n-1}x_2x_0^{p-1}x_2) = \zeta(x_0^{n-1}x_2x_0^{p-1}x_2), \tag{136}$$

$$\gamma_{n,p} = \alpha_0^1(x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}x_2) = \zeta(x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}x_2). \tag{137}$$

3.3 Sommes d'Euler-Zagier

Récemment, plusieurs extensions de $\zeta(s)$ ont été introduites (les sommes d'Euler-Zagier ou encore les sommes harmoniques) via les polylogarithmes (voir Section 2) ont été introduites, prolongeant en particulier les travaux de Nielsen. Ces extensions proviennent de la théorie des nombres [51, 52, 53], de la théorie des nœuds [1, 13], de la mécanique quantique [16, 39, 22], de la physique des hautes énergies [11, 12], de l'analyse des structures de données hiérarchiques [18], de la théorie du contrôle [28, 29], ….

Définition 3.1 ([9, 21]) *Les* ζ multiples de bases $b_1,\ldots,b_k$ *et indexés par les multi-indices* $s_1,\ldots,s_k$ *sont définis comme suit*

$$\zeta\binom{s_1,\ldots,s_k}{b_1,\ldots,b_k} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n_1>\ldots>n_k>0} \frac{b_1^{-n_1}\ldots b_k^{-n_k}}{n_1^{s_1}\ldots n_k^{s_k}} & si \quad k\geq 1, \\ 1 & si \quad = 0. \end{cases} \tag{138}$$

k est la profondeur *et $s = s_1+\ldots+s_k$ est le* poids *de* $\binom{s_1,\ldots,s_k}{b_1,\ldots,b_k}$.

Pour $k=1$, si s est un entier positif et si $|b|\geq 1$, on obtient le polylogarithme classique en la variable b. Et le lecteur peut vérifier aisément qu'en introduisant les formes différentielles (les b_i ne sont nécessairement différents) :

$$\omega_0 = \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \omega_i = \frac{dz}{b_i - z}, \quad i = 1..k, \tag{139}$$

ces sommes sont les valeurs en 1 des polylogarithmes $\mathrm{Li}_{x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_k-1}x_k}$:

$$\zeta\binom{s_1,\ldots,s_k}{b_1,\ldots,b_k} = \mathrm{Li}_{x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_k-1}x_k}(1) = \alpha_0^1(x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_k-1}x_k). \tag{140}$$

Lorsque b_i est la $i^{ième}$ racine $k^{ième}$ de l'unité, alors les $\zeta\binom{s_1,\ldots,s_k}{b_1,\ldots,b_k}$ sont les fonctions ζ colorées dont les implantations en Maple sont effectuées par Bigotte [3]. Si chaque $b_j = 1$ nous retrouvons les sommes d'Euler-Zagier $\zeta(s_1,\ldots,s_k)$ de la définition 2.3.

Actuellement, de nombreux auteurs étudient le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les $\zeta(s)$ [19, 21, 35, 36, 51]. Cet espace vectoriel est inclus dans $\mathbb{R}$ et est fermé par produit. Nos travaux consistent alors à chercher les relations *algébriques* entre les $\zeta(w), w \in x_0X^*x_1$. Nous étudions l'algèbre de ces sommes via la combinatoire des mots. Le théorème de Radford [44] permet de décomposer tout mot w dans la base de Lyndon de l'algèbre mélange définie sur $\{x_0, x_1\}$, c'est-à-dire comme un polynôme (pour le produit commutatif "$\sqcup\!\sqcup$") en les mots de Lyndon. Une base de Gröbner de l'idéal des relations permet alors, par morphisme de l'algèbre de mélange, d'engendrer les relations entre les $\zeta(w)$.

On dispose de la conjecture suivante :

Conjecture 3.1 (Zagier, [51]) *Soit d_n la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les $\zeta(w)$ et $|w| = n$. Alors :*

$$d_1 = 0, \quad d_2 = d_3 = 1, \quad d_n = d_{n-2} + d_{n-3}, \qquad n \geq 4. \tag{141}$$

Ainsi, en nous basant sur la base de Gröbner en Axiom à l'ordre 10 [32], puis celle en Maple à l'ordre 12 [3] et celle en $C++$ [50] à l'ordre 13, on obtient un système de générateurs jusqu'à l'ordre 13, satisfaisant la conjecture de Zagier. Nous obtenons :

Théorème 3.1 ([32]) *Si la conjecture 3.1 est vraie alors la $\mathbb{Q}$-algèbre engendrée par les $\zeta(s)$ de poids $|s| \leq 13$ est libre et admet pour générateurs algébriquement indépendants les nombres suivants :*

$$\begin{aligned}
&\zeta(2), \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), \zeta(13),\\
&\zeta(6,2), \zeta(8,2), \zeta(10,2),\\
&\zeta(8,2,1), \zeta(9,3,1), \zeta(10,2,1),\\
&\zeta(8,2,1,1).
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc conjecturer :

Conjecture 3.2 ([32]) *La $\mathbb{Q}$-algèbre des $\zeta(s)$ est une algèbre de polynômes.*

3.4 Comment engendrer une base de Gröbner de l'idéal des relations entre les sommes d'Euler-Zagier?

1. Une première famille de relations s'obtient en spécialisant en $z = 1$, les relations algébriques entre les polylogarithmes (voir Section 2)

$$\mathrm{Li}_u(z)\,\mathrm{Li}_v(z) = \mathrm{Li}_{u \,\sqcup\!\sqcup\, v}(z),$$

ce qui s'écrit :

Fait 3.1

$$\forall u, v \in x_0X^*x_1, \quad \zeta(u \sqcup\!\sqcup v) = \zeta(u)\zeta(v). \tag{142}$$

Corollaire 3.1 *ζ est un morphisme de $x_0X^*x_1$ dans $\mathbb{C}$ pour le produit de mélange "$ш$".*

Exemple 3.1

$$\begin{aligned} x_0x_1 ш x_0x_1 &= 4x_0x_0x_1x_1 + 2x_0x_1x_0x_1 \\ \zeta(2)^2 &= 4\zeta(3,1) + 2\zeta(2,2) \end{aligned}$$

2. Une deuxième famille de relations s'obtient en spécialisant les relations de quasi-mélange entre fonctions quasi–symétriques [32]. En effet, nous introduisons l'alphabet infini $Y = \{y_i | i > 0\}$ dont chaque lettre y_i représente le mot $x_0^{i-1}x_1$ de l'alphabet $\{x_0, x_1\}$. Et pour chaque mot $x_0^{s_1-1}x_1 \cdots x_0^{s_k-1}x_1$ dans X^*, nous l'écrivons $y_{s_1} \cdots y_{s_k}$ dans Y^*. Le mot vide de Y^* est encore noté par 1. Nous notons aussi Y^* le monoïde engendré par Y. Et nous disposons alors un produit commutatif et associatif sur Y^*, le quasi-mélange, noté "$\star$" défini par :

Définition 3.2 ([20, 36])

$$u \star v = \begin{cases} v & si\ u = 1, \\ (u' \star v)y_i + (u \star v')y_j + (u' \star v')y_{i+j} & si\ u = u'y_i\ \ et\ v = v'y_j. \end{cases}$$

Fait 3.2 (Hoffman, [36])

$$\forall u, v \in x_0X^*x_1, \quad \zeta(u \star v) = \zeta(u)\zeta(v). \tag{143}$$

Corollaire 3.2 *ζ est un morphisme de Y^* dans $\mathbb{C}$ pour le produit "$\star$".*

Maintenant, à chaque mot $w = y_{s_1} \cdots y_{s_k}$ dans Y^*, nous associons de manière biunivoque le multi-indice $s = (s_1, \cdots, s_k)$. Ainsi :

Exemple 3.2

$$\begin{aligned} y_2 \star y_3y_1 &= y_2y_3y_1 + y_3y_2y_1 + y_1y_3y_2 + y_5y_1 + y_3y_3, \\ \zeta(y_2)\zeta(y_3y_1) &= \zeta(y_2y_3y_1) + \zeta(y_3y_2y_1) + \zeta(y_1y_3y_2)\zeta(y_5y_1) + \zeta(y_3y_3), \\ \zeta(2)\zeta(3,1) &= \zeta(2,3,1) + \zeta(3,2,1) + \zeta(1,3,2)\zeta(5,1) + \zeta(3,3) \end{aligned}$$

Ce produit provient de *la théorie des fonctions quasi-symétriques*. Il est, en fait, une généralisation de la formule de réflexion (c'est-à-dire la relation (129) de la Section 3.2). Rappelons aussi que la théorie des fonctions quasi-symétriques, introduite en 1984 par Gessel (voir [20]) pour résoudre des problèmes d'énumération de permutations. Il a été relié récemment à la théorie des groupe quantiques par Krob et Thibon (voir [37]).

3. Une troisième famille de relations s'obtient en considérant l'opérateur différentiel de D de Hoffman suivant :

$$\begin{array}{rlll} D: & \mathbb{Q}\langle X\rangle & \longmapsto & \mathbb{Q}\langle X\rangle, \\ & p & \longmapsto & x_1 \sqcup\!\sqcup p - x_1 \star p. \end{array}$$

C'est un opérateur différentiel pour le produit de Cauchy :

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}\langle X\rangle,\ D(pq) = (Dp)q + p(Dq) \tag{144}$$

vérifiant $D(x_0) = x_0x_1$ et $D(x_1) = -x_0x_1$. Les termes divergents $\zeta(x_1) = \sum_{n\geq 1} 1/n$ n'apparaissent pas dans $D(p)$.

Fait 3.3 (Hoffman, [36])

$$\forall p \in x_1\mathbb{Q}\langle X\rangle,\ D(p) \in \ker(\zeta). \tag{145}$$

Nielsen connaissait déjà ce théorème dans un cas particulier. On a, pour $p \geq 2$:

$$D(x_0^{p-1}x_1) = \sum_{i=1}^{p-1} x_0^i x_1 x_0^{p-1-i} x_1 - x_0^p x_1, \tag{146}$$

ce qui correspond à la formule d'Euler (132).

Avec ces deux produits et cet opérateur D de Hoffman, nous allons établir une base de Gröbner de l'idéal des relations entre les somme d'Euler-Zagier. D'après les faits 3.1, 3.2 et 3.3, nous pouvons également conjecturer :

Conjecture 3.3 *Soient $X = \{x_0, x_1\}$ et $\mathcal{H}_2 = \mathbb{Q} \oplus x_0\mathbb{Q}\langle X\rangle x_1$.*

L'application ζ réalise un morphisme de la $\mathbb{Q}$-algèbre de mélange $\mathcal{H}_2$ dans la $\mathbb{Q}$-algèbre des sommes d'Euler-Zagier, dont le noyau est engendré par les polynômes :

$$p = u \sqcup\!\sqcup v - u * v, \quad u, v \in x_0X^*x_1, \tag{147}$$

$$p = x_1 \sqcup\!\sqcup v - x_1 * v, \quad v \in x_0X^*x_1. \tag{148}$$

En fait, pour établir une base de Gröbner de l'idéal des relations entre les $\zeta(w)$, nous allons les restreindre aux $\zeta(w)$ indexés par les mots de Lyndon. Car, par exemple, pour $w \in x_0X^*x_1$, $|w| = 12$, il y a $2^{12-2} = 1024$ mots, et donc 1024 termes $\zeta(w)$ à calculer. Or, nous savons qu'il y a $\mu(12) = 335$ mots de Lyndon (d'après la formule de Witt). Par conséquent, il y a 335 polylogarithmes qui sont algébriquement indépendants (ils sont indexés par ces mots de Lyndon, voir Section 2). Il suffit alors chercher les relations entre les ζ indexés parmis les 335 mots de Lyndon (voir [32]) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall l_1, l_2 \in \mathcal{L}, |l_1| \geq 2, |l_2| \geq 2, & \zeta(l_1 \sqcup\!\sqcup l_2) - \zeta(l_1 \star l_2) = 0, \\ \forall l_1, \in \mathcal{L}, |l_1| \geq 2, & \zeta(l_1 \sqcup\!\sqcup x_1) - \zeta(l_1 \star x_1) = 0. \end{array} \right. \tag{149}$$

De manière équivalente, nous cherchons, dans l'algèbre de mélange $\mathrm{Sh}_{\mathbb{C}}\langle\langle X\rangle\rangle$, une base de Gröbner de l'idéal engendré par les relations :

$$\begin{cases} \forall l_1, l_2 \in \mathcal{L}, |l_1| \geq 2, |l_2| \geq 2, & l_1 \sqcup\!\sqcup\, l_2 - l_1 \star l_2 \in \ker\zeta, \\ \forall l_1, \in \mathcal{L}, |l_1| \geq 2, & l_1 \sqcup\!\sqcup\, x_1 - l_1 \star x_1 \in \ker\zeta. \end{cases} \tag{150}$$

La méthode consiste alors en une décomposition des polynômes

$$l_1 \sqcup\!\sqcup\, l_2 - l_1 \star l_2 \quad \text{et} \quad l_1 \sqcup\!\sqcup\, x_1 - l_1 \star x_1 \tag{151}$$

comme mélange des mots de Lyndon. On établit ainsi directement, grâce à l'utilisation de la base de Radford de $\mathrm{Sh}_{\mathbb{C}}\langle\langle X\rangle\rangle$ *polynomiales* (et non seulement linéaires) entre les $\zeta(l)$.

3.5 Applications de la base de Gröbner des relations entre sommes d'Euler-Zagier ?

Actuellement la tables des relations entre sommes d'Euler (avec et sans alternance de signe) est disponible à l'adresse suivante :

`http://www.lifl.fr/~bigotte`

Avec la construction d'une base de Gröbner (voir 3.4), nous avons traité les cas suivants :

- Nous avons la confirmation du nombre des termes irréductibles par poids et par longueur jusqu'à l'ordre 13 (voir Théorème 3.1), en réponse à une communication personnelle de Wojkowiak (Décembre 1997) :

  > *The conjecture 15.2 and the positive answer to question 15.3 from "Monodromy of iterated integrals and non-abelian unipotent periods" (Wojtkowiak,97) predict generators of the* **Q***-algebra of multiple* ζ*-numbers (*$(2i\pi)^2, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), \zeta(13), \zeta(3,5), \zeta(3,7)$*, one multiple* ζ *of length* ≥ 3 *and weight* 11*, two multiple* ζ *of length* ≥ 2 *and weight* 12*, two multiple* ζ *of length* ≥ 3 *and weight* 13*,* 3 *multiple* ζ *of length* ≥ 2 *and weight* 14 *– generators up to degree* 14*).*

  Nous pouvons également supposer que, jusqu'à l'ordre 14, nous aurions de nouveaux termes algébriquement indépendants :

  $$\zeta(12), \zeta(9,3,1,1), \zeta(10,2,1,1). \tag{152}$$

- Nous retrouvons les expressions qui ont été établies expérimentalement et attendaient une validation formelle. Par exemple (voir [7]) :

  $$\begin{aligned} \zeta(4,2,4,2) &= 72\zeta(5)\zeta(3)\zeta(2)^2 - \frac{93}{2}\zeta(10,2) + 36\zeta(2)\zeta(8,2) \\ &\quad -486\zeta(5)\zeta(7) - \frac{3742}{9}\zeta(3)\zeta(9) - \frac{3}{2}\zeta(3)^4 + 36\zeta(2)\zeta(5)^2 \end{aligned}$$

$$-\frac{6}{5}\zeta(2)^2\zeta(6,2)+16\zeta(8,2,1,1)+56\zeta(7)\zeta(2)\zeta(3)$$
$$+\frac{368}{35}\zeta(2)^3\zeta(3)^2+\frac{209369756}{7882875}\zeta(2)^6. \qquad (153)$$

– Hoffman a proposé deux bases pour l'espace vectoriel des $\zeta(s)$ et qu'il a vérifiées jusqu'à l'ordre 8 :

  1. la H-*base* contient tous les monômes $y_{i_1}\ldots y_{i_k}\in Y^*$ avec les indices $i_1,\ldots,i_k\in\{2,3\}$,
  2. la G-*base* contient tous les produits des monômes dans

$$\{y_2\}\cup\{\text{les mots de Lyndon } y_{i_1}\ldots y_{i_k}|i_1,\ldots,i_k\in\{3,5,\ldots\}\}.$$

  Nous avons vérifié la H-*base* de Hoffman jusqu'à l'ordre 12. Et nous mettons en défaut la G-*base* de Hoffman. Car aux poids 12, nous avons établi la relation suivante :

$$\zeta(9,3)=\frac{9}{14}\zeta(7,5)+\frac{388112}{1226225}\zeta(2)^6-6\zeta(5)\zeta(7). \qquad (154)$$

– . . ..

3.6 Autres cas

D'autres cas importants pour les $\zeta\binom{s_1,\ldots,s_k}{b_1,\ldots,b_k}$ (voir définition 3.1) que nous avons relevés sont :

– Si chaque $b_j=\pm1$ ces sommes sont les sommes d'Euler *avec l'alternance de signe*. Elles sont largement utilisées, en particulier, par les physiciens (en mécanique quantique, en physique des hautes énergies, ...). Lors du calcul des diagrammes de Feymann on cherche, par exemple, à évaluer les intégrales du type suivant avec alternance de signe

$$I_{m,n,l}(D)=\int_0^1\frac{\log^m(x)\log^n(1-x)\log^l(1+x)}{D(x)}dx, \qquad (155)$$

  où m,n et l sont des entiers non négatifs et $D(x)$ est une des fonctions $\{x,1-x,1+x\}$.

– Si chaque $b_j=2$, ces sommes représentent les valeurs spéciales des polylogarithmes en $z=1/2$. Ces valeurs sont également importantes, car elles permettent de représenter les nombres transcendants en base binaire. Par exemple (voir [40]) :

$$\frac{\pi^2}{36} = \mathrm{Li}_2(\frac{1}{2})-\mathrm{Li}_2(\frac{1}{4})-3\,\mathrm{Li}_2(\frac{1}{8})+\mathrm{Li}_2(\frac{1}{64}), \qquad (156)$$
$$\frac{\log^2(2)}{2} = 4\,\mathrm{Li}_2(\frac{1}{2})-12\,\mathrm{Li}_2(\frac{1}{4})-4\,\mathrm{Li}_2(\frac{1}{8})+2\,\mathrm{Li}_2(\frac{1}{64}). \qquad (157)$$

Pour d'autres valeurs de $\mathrm{Li}_w(1/2), w \in x_0X^*x_1$, on ne connaît pas encore de formule analogue. Par contre, nous disposons d'une formule liant les $\mathrm{Li}_w(1/2)$ avec les $\zeta(w)$ [34] :

$$Z = L(1/2)\tau[L(1/2)], \tag{158}$$

où τ est l'antimorphisme de monoïdes de X^* dans X^* (que nous étendons sur $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$) qui consiste à prendre le miroir de chaque mot de X^* puis à échanger les deux lettres x_0 et x_1. Par conséquent, on peut exprimer les $\zeta(w)$ en fonctions des $\mathrm{Li}_u(1/2)$.

Références

[1] V.I. Arnold.– *The Vassiliev theory of discriminants and knots*, First European Congress of Mathmatics, volume 1, pages 3–29. Birkhauser, 1994.

[2] J. Berstel & C. Reutenauer.– *Rational series and their languages*, Springer-Verlag, 1988.

[3] M. Bigotte.– thèse Lille 1, en cours.

[4] D.H. Bailey, J.M. Borwein & R. Girgensohn.– *Experimental evaluation of Euler Sums.* Experimental Mathematics, 3, $N°1$, pp. 17-30, 1994.

[5] D. Borwein, J.M. Borwein & R. Girgensohn.– *Explicit evaluation of Euler sums.* Proc. Edin. Math. Soc., 38 (1995), pp. 277-294.

[6] J.M. Borwein & R. Girgensohn.– *Evaluation of Triple Euler sums.* Electronic J. Combinatorics, (1996).

[7] J.M. Borwein, D.M. Bradley & D.J. Broadhurst.– *Evaluation of k-fold Euler/Zagier sums : a compendium of results for arbitrary k.* Electronic J. Combinatorics, (1997).

[8] J.M. Borwein & D.M. Bradley.– *Searching Symbolically for Apéry-like Formulae for Values of the Riemann Zeta Function*, SIGSAM Bulletin of Symbolic and Algebraic Manipulation, Association of Computing Machinery, Vol. 30, No. 2, Issue 116, June 1996, pp. 2-7.

[9] J.M. Borwein, D.M. Bradley,D.J. Broadhurst & P. Lisonek.– *Special Values of Multiple Polylogarithms*, to appear in Transactions of the American Mathematical Society.

[10] N. Bourbaki.– *Groupes et Algèbre de Lie*, chapitre 2, Hermann ,1972.

[11] D.J. Broadhurst & D. Kreimer.– *Knots and Numbers in phi^4 Theory to 7 Loops and beyond.* IJMP C6, 519 (1995).

[12] D.J. Broadhurst & D. Kreimer.– *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops.* à paraître.

[13] P. Cartier.– *Construction combinatoire des invariants de Vassiliev–Kontsevich des noeuds*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.316, série I, pp. 1205–1210, 1993.

[14] K.T. Chen.– *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc., vol 83, 1977, pp. 831-879.

[15] K.T. Chen, R.H. Fox & R.C. Lyndon.– *Free differential calculus, IV. The quotient groups of the lower central series*, Ann. Math., vol 68, 1958, pp. 81-95.

[16] V. Drinfel'd.– *On quasitriangular quasi–hopf algebra and a group closely connected with gal($\bar{q}/q$).* Leningrad Math. J. 2, 4 (1991), 829–860.

[17] M. Fliess.– *Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives*, Bull. Soc. Math. France, N°109, 1981, pp. 3-40.

[18] Ph. Flajolet, G. Labelle, L. Laforest & B. Salvy.– *Hypergeometrics and the cost structure of quadtrees*, Ramdom Structures and Algorithms, 7:117–143, 1995.

[19] Ph. Flajolet & B. Salvy.– *Euler sums and contour integral representations*, Experimental Macthemaics, 1998.

[20] I. Gessel.– *Multipartite P-partitions and inner product of skew Schur functions*, Combinatorics and algebra, C. Greene, éd., Contemporary Mathematics **34**, 1984, p. 289–301.

[21] A.B. Goncharov.– *Multiple polylogarithms at the roots of unity and motivic Lie algebra*, preprint, 1997.

[22] J. Gonzalez-Lorca.– *Série de Drinfel'd, monodromie et algèbres de Hecke*, thèse, Ecole Normale Supérieure, Paris, 1998.

[23] M.M. Hjortnaes.– *Overforing av rekken* $\sum_1^\infty(1/k^3)$ *till and bestemt integral*, Proc. 12th Cong. Scand. Maths, (Lund 1953), (Lund 1954).

[24] Hoang Ngoc Minh.– *Evaluation Transform*, Theoret. Computer. Sciences, 79, 1991, pp. 163-177.

[25] Hoang Ngoc Minh & G. Jacob.– *Evaluation transform and its implementation in MACSYMA*, in "New Trends in Systems Theory", Birkhaüser, Boston, 1991.

[26] Hoang Ngoc Minh, G. Jacob & N. Oussous.– *Input/Output Behaviour of Nonlinear Control Systems : Rational Approximations, Nilpotent structural Approximations*, in *Analysis of controlled Dynamical Systems*, Progress in Systems and Control Theory, Birkhäuser, 1991, pp. 253-262.

[27] Hoang Ngoc Minh.– *Summations of Polylogarithms via Evaluation Transform*, in Mathematics and Computers in Simulations, 42, 4-6, 1996, pp. 707-728.

[28] Hoang Ngoc Minh.– *Chained System Steering With Singular Inputs, Bilinear System Steering With Singular Inputs*, New Computer Technologies in Control Systems, Pereslavl-Zalessky, Russie, Juillet 1994.

[29] Hoang Ngoc Minh.– *Bilinear System Steering With Singular Inputs*, New Computer Technologies in Control Systems, Pereslavl-Zalessky, Russie, Août 1995.

[30] Hoang Ngoc Minh.– *Fonction de Dirichlet d'ordre n et de paramètre t*, Discrete Math., 180, 1998, pp. 221-241.

[31] Hoang Ngoc Minh & G. Jacob.– *Symbolic Integration of meromorphic differantial equation via Dirichlet functions*, à pararître dans Discrete Math., 1999.

[32] Hoang Ngoc Minh & M. Petitot.– *Lyndon words, polylogarithmic functions and the Riemann ζ function*, à pararître dans Discrete Math., 2000.

[33] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot & J. Van der Hoeven.– *Polylogarithms and Shuffle Algebra*, FPSAC'98, Toronto, Canada, Juin 1998.

[34] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot & J. Van der Hoeven.– *L'algèbre des polylogarithms par les séries génératrices*, FPSAC'99, Barcelon, Espagne, Juillet 1999.

[35] M. Hoffman.– *Multiple harmonic series*, Pacific Journal of Mathematics, 152(2):275– 290, 1995.

[36] M. Hoffman.– *The algebra of multiple harmonic series*, Journal of Algebra, August 1997.

[37] D. Krob & J-Y. Thibon.– *Noncommutative symmetric functions IV: Quantum linear groups and Hecke algebras at q=0*, J. Alg. Comb., **6**, (4), 1997, p. 339–376.

[38] M. Lothaire.– *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, 1983.

[39] T.Q.T. Lê & J. Murakami.– *Kontsevich's integral for Kauffman polynomial*, Nagoya Math., pp 39-65, 1996.

[40] L. Lewin.– *Polylogarithms and associated functions*, North Holland, New York and Oxford, 1981.

[41] L. Lewin.– *Structural properties of polylogarithms*, Mathematical survey and monographs, Amer. Math. Soc., vol 37, 1992.

[42] N. Nielsen.– *Recherches sur des généralisations d'une fonction de Legendre et d'Abel*, Annali di Matematica, 9:219–235, 1904.

[43] N. Nielsen.– *Recherches sur le carré de la dérivée logarithmique de la fonction gamma et sur quelques fonctions analogues*, Annali di Matematica, 9:190–210, 1904.

[44] D.E. Radford.– *A natural ring basis for the shuffle algebra and an application to group schemes*, Journal of Algebra, 58:432–454, 1979.

[45] R. Ree.– *Lie elements and an algebra associated with shuffles*, Ann. of Math, 68 (1958), 210–220.

[46] C. Reutenauer.– *Free Lie Algebras*, London Mathematical Society Mathematical Society Monographs, New Series-7, Oxford Science Publications, 1993.

[47] M.P. Schützenberger.– *Sur une propriété combinatoire des algèbres de Lie libres pouvant être utilisée dans un problème de mathématiques appliquées*, Séminaire d'algèbre et de théorie des nombres [P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, C. Pisot], 1958-59.

[48] M.P. Schützenberger.– *On a factorization of free monoids* In Proc. Amer. Math. Soc., vol 16, pp. 21-24, 1965.

[49] G. Viennot.– *Algèbres de Lie libres et monoïdes libres*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 691, 1978.

[50] El Wardi.– mémoire DEA, Lille 1, Juillet 1999.

[51] D. Zagier.– *Values of zeta functions and their applications*, in "First European Congress of Mathematics", volume 2, pp. 179–512. Birkhäuser, 1994.

[52] D. Zagier.– *Polylogarithms, Dedekind zeta functions, and the algebraic K-theory of fields*, in *Arithmetic, Algebraic Geometry*, (G. van der Geer, F. Oort, J. Stennbrink eds.), Birkhäuser, 1991, pp. 391-430.

[53] D. Zagier.– *Special Values and Functional Equations of Polylogarithms*, in [41].

[54] Z. Wojtkowiak.– *A note on functional equations of the P-adic polylogarithms*, Bull. Soc. Math. France, N°119, 1991, pp. 343-370.

[55] Z. Wojtkowiak.– *The basic structure of polylogarithmic functional equations*, in [41].

[56] Z. Wojtkowiak.– *Non abelian unipotent periods. Monodromy of iterated integrals*, London Math. Soc. Lecture Notes serie, Vol.243, pp 219-289, 1997.