Potentiel Yin sur le groupe symétrique

Alain Lascoux

J'aurais tant aimé pouvoir cosigner cet article avec M.P. Schützenberger. Il n'est plus parmi nous, mais a pu voir toutefois la première version de ce texte qui rapporte le travail accompli dans sa dernière semaine.

Les canons mathématiques imposent un style impersonnel que je transgresserai aujourd'hui, car la construction que je vais exposer fut la dernière joie mathématique de M.P. Schützenberger, joie qu'il tint à faire partager à sa fille en lui montrant un permutoèdre coloré qui apportait la solution au problème posé.

Les constructions que je vais exposer sont représentatives d'une démarche *combinatoriste* que M.P. Schützenberger a tant, et si bien, illustrée. Nous avions rencontré il y a quelques années un certain problème, mais ce dernier imposait la résolution de systèmes d'équations linéaires dont le nombre croît trop vite avec l'ordre du groupe symétrique pour que la simple expérimentation puisse nous fournir la réponse que le raisonnement mathématique se doit par la suite de conforter, si ce n'est prouver, pour être enregistrée dans les annales mathématiques.

Or cette réponse devient évidente si l'on abandonne les équations linéaires pour les crayons de couleur; en l'occurence il en fallut onze (la moitié en employant les pointillés, mais c'est malheureusement encore trop pour TEX).

De quoi s'agit-il ? Le groupe symétrique, figuré comme un *permutoèdre*, se décompose en hexagones et losanges. Les travaux de Yang & Baxter imposent de pondérer chaque arête du permutoèdre par un paramètre, de sorte que chaque hexagone soit du type :

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & & \\ & v\ \nearrow & & \nwarrow\ u & \\ & \bullet & & \bullet & \\ u+v & \uparrow & & \uparrow & u+v \\ & \bullet & & \bullet & \\ & u\ \nwarrow & & \nearrow\ v & \\ & & \bullet & & \end{array}$$

et chaque losange du type :

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & & \\ v & \nearrow & & \nwarrow & u \\ \bullet & & & & \bullet \\ u & \nwarrow & & \nearrow & v \\ & & \bullet & & \end{array}$$

On s'aperçoit vite que le choix des paramètres pour les arêtes issues de l'origine du permutoèdre détermine le poids de toutes les autres arêtes, de sorte que pour le groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$, on a seulement $n-1$ paramètres correspondant aux transpositions simples $(i,i+1)$, i variant de 1 à $n-1$.

Or il est équivalent de pondérer les arêtes, ou de prendre la somme, pour une permutation μ donnée, des poids des arêtes sur un chemin menant de l'origine à μ, car les conditions de Yang-Baxter font que cette somme est indépendante du chemin choisi. On peut donc l'appeler un *potentiel de Yang-Baxter*.

En normalisant le potentiel de l'origine à 0, on a donc pour le groupe symétrique $\mathfrak{S}(3)$:

$$\begin{array}{ccc} & 2u+2v & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ 2u+v & & u+2v \\ \uparrow & & \uparrow \\ u & & v \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & 0 & \end{array}$$

Mais les conditions de Yang-Baxter sont surabondantes pour l'existence d'un potentiel, c'est-à-dire d'une fonction sur les sommets du permutoèdre, les différences de potentiels étant le poids des arêtes. Pour $\mathfrak{S}(3)$, cette existence n'impose qu'une équation, alors que l'on a 6 arêtes. Relâchons donc les contraintes et prenons comme conditions (marquant à gauche les poids, à droite les potentiels) :

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & & \\ a & \nearrow & & \nwarrow & d \\ \bullet & & & & \bullet \\ c+d & \uparrow & & \uparrow & a+b \\ \bullet & & & & \bullet \\ b & \nwarrow & & \nearrow & c \\ & & \bullet & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & a+b+c+d & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ b+c+d & & a+b+c \\ \uparrow & & \uparrow \\ b & & c \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & 0 & \end{array}$$

et en gardant les mêmes conditions pour les losanges :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \bullet & & \\
 & v \nearrow & & \nwarrow u & \\
\bullet & & & & \bullet \\
 & u \nwarrow & & \nearrow v & \\
 & & \bullet & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & u+v & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
u & & & & v \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Ces conditions entrainent l'existence d'un potentiel que nous appellerons *potentiel Yin*, représésenté sur la partie droite des figures.

Tout permutation au sommet d'au moins un hexagone ou un losange a son potentiel déterminé par celui des autres permutations

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & P_{12}+P_{21}-P_1-P_2+P_0 & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
P_{12} & & & & P_{21} \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
P_1 & & & & P_2 \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & P_0 & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & P_1+P_2-P_0 & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
P_1 & & & & P_2 \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & P_0 & &
\end{array}
$$

Un potentiel Yin sur le permutoèdre est donc déterminé par le potentiel des permutations qui ne sont au sommet d'aucun hexagone, ni aucun losange, c'est-à-dire des permutations (en tant que permutation de $1,\ldots,n$) qui n'ont qu'une *descente*:

$$\mu = \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k \ > \mu_{k+1} < \mu_{k+2} < \cdots < \mu_n \ .$$

Les permutations de ce type sont dites *grassmanniennes*, et leur ensemble est noté $\mathcal{G}r$. L'indice k tel que $\mu_k > \mu_{k+1}$ est dit *position* de la descente en k et l'ensemble des permutations grassmanniennes ayant une descente en k est noté $\mathcal{G}r_k$.

Dans ce qui suit, nous montrons que les potentiels Yin des permutations grassmanniennes sont linéairement indépendants.

Par exemple, pour $\mathfrak{S}(3)$, il y a 4 permutations grassmanniennes et la figure ci-dessus donne le potentiel du sommet supérieur en fonction des autres.

Pour $\mathfrak{S}(4)$, il y a 11 permutations grassmanniennes, qui sont placées dans un cartouche, figure 2. Voici les potentiels des autres permutations (x_0 est le potentiel de 1234) :

$1243 : x_1$, $1324 : x_2$, $2134 : x_3$
$1423 : x_4$, $1342 : x_5$, $3124 : x_6$, $2143 : x_1 + x_3 - x_0$, $2314 : x_7$
$4123 : x_8$, $1432 : x_5 + x_4 - x_2 - x_1 + x_0$, $3142 : x_5 + x_6 - x_2$, $2413 : x_9$
$2341 : x_{10}$, $3214 : x_7 + x_6 - x_3 - x_2 + x_0$
$4132 : x_5 - x_2 - x_1 + x_0 + x_8$, $3412 : x_{11}$, $4213 : x_9 + x_8 - x_3 + x_0 - x_4$
$2431 : x_{10} + x_9 - x_7 - x_1 + x_0$, $3241 : x_{10} + x_6 - x_3 - x_2 + x_0$
$4312 : x_{11} + x_2 + x_8 - x_6 - x_4$
$4231 : x_{10} + x_9 - x_7 - x_1 + 2x_0 + x_8 - x_3 - x_4$
$3421 : x_{10} + x_2 + x_{11} - x_7 - x_5$
$4321 : x_{10} + 2x_2 + x_{11} - x_7 - x_5 + x_8 - x_4 - x_6$.

Permutations grassmanniennnes

En résumé et pour être plus précis : un *potentiel Yin* est une application P du groupe symétrique dans un groupe commutatif, qui vérifie les conditions suivantes, pour chaque permutation μ et toute paire de transpositions simples σ,τ telles que $\ell(\mu\sigma) > \ell(\mu)$, $\ell(\mu\tau) > \ell(\mu)$:

$$P(\mu\sigma\tau\sigma) - P(\mu\sigma\tau) - P(\mu\tau\sigma) + P(\mu\sigma) + P(\mu\tau) - P(\mu) = 0$$

si σ,τ ne commutent pas, et dans le cas contraire :

$$P(\mu\sigma\tau) - P(\mu\sigma) - P(\mu\tau) + P(\mu) = 0 .$$

Dans la représentation graphique donnée au paragraphe précédent, nous avions figuré sur les arêtes les différences de potentiel.

Nous avons besoin d'un ordre sur le groupe symétrique qui est dû à Ehresmann (et usuellement appelé *ordre de Bruhat*). En fait, nous n'avons besoin que de la comparaison d'une permutation grassamnnienne g et d'une permutation générale μ, qui est donnée par la règle explicite suivante :
soit k la descente de g, et $\nu_1, \ldots, \nu_k$ la suite obtenue par réordonnement croissant de $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Alors

$$g \leq \mu \Leftrightarrow \ \{g_1 \leq \nu_1, \ldots, g_k \leq \nu_k\} .$$

A toute permutation μ, associons l'ensemble des permutations grassmanniennes plus petites qu'elles pour l'ordre d'Ehresmann et considérons le potentiel P à valeurs dans le module de base les $g \in \mathcal{G}r$:

$$\mu \in \mathfrak{S}(n) \Rightarrow \ P(\mu) := \sum_{g \leq \mu} g \ \in \oplus_{g \in Gr} \mathbb{Z} g .$$

Theorème. — *Le potentiel* $P(\mu) = \sum_{g \le \mu} g$ *vérifie les conditions de Yin.*

Preuve. — Le potentiel se décompose en la somme directe des potentiels P_g, $g \in \mathcal{G}r$, définis par :

$$P_g(\mu) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{selon que } g \le \mu \text{ ou non .}$$

Il nous faut donc montrer que chaque potentiel P_g vérifie les conditions de Yin.

Soit donc une permutation μ au sommet d'un hexagone ou d'un losange et g une grassmannienne fixe de descente k. Tenant compte de la transitivité de l'ordre d'Ehresmann, les seules configurations qui ne respectent pas les conditions Yin sont :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \\ & 0 & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 0 & \end{array}.$$

Or, dans un hexagone ou un losange, la moitié des arêtes, ou toutes les arêtes, sont différentes de σ_k, et donc les potentiels aux extrémités des dites arêtes sont égaux, ce qui n'est pas le cas des configurations ci-dessus □

Le potentiel P permet de caractériser l'ordre d'Ehresmann-Bruhat :

$$\mu \le \zeta \;\Leftrightarrow\; P(\mu) \le P(\zeta)$$

(l'inégalité voulant dire que $P(\zeta) - P(\mu)$ est à coefficients ≥ 0).

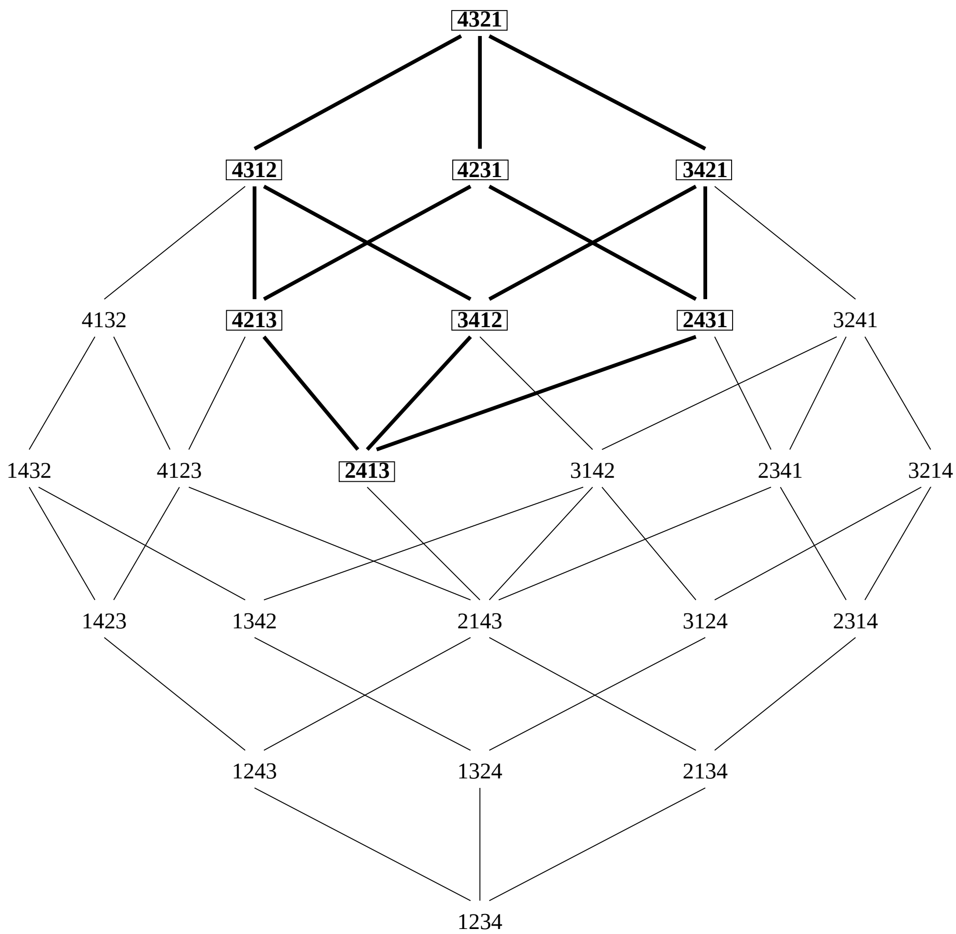
En fait, la restriction du potentiel aux permutations *bigrassmanniennes* (i.e. $g \in \mathcal{G}r$ et $g^{-1} \in \mathcal{G}r$) est le "plus petit" potentiel codant l'ordre d' Ehresmann-Bruhat (cf [LS7]). Le groupe symétrique se plonge dans un treillis dit treillis enveloppant, qui est distributif et a pour générateurs les permutations bigrassmanniennes. Ce treillis est donc pavé par des losanges et le potentiel $\mu \to Q(\mu) := \sum_{g \in \mathcal{G}r, g^{-1} \in \mathcal{G}r, g \le \mu} g$ induit un potentiel Yin sur le treillis enveloppant du groupe symétrique.

L'ordre d'Ehresmann-Bruhat sur les groupes de Coxeter finis plus généraux est décrit par Geck et Kim [G-K].

Le fait que chaque potentiel P_g vérifie les conditions de Yin peut être illustré comme suit : soit $g \in \mathcal{G}r_k$ et $[g \le\,]$ l'intervalle des permutations $\mu : \mu \ge g$. Alors le complémentaire de $[g \le\,]$ dans $\mathfrak{S}(n)$ est un intervalle. Pour toute $\mu \in \mathfrak{S}(n)$, et toute transposition simple σ telles que $\mu \in [g \le\,]$ et $\mu\sigma \notin [g \le\,]$, on a de plus que $\mu\sigma < \mu$ et que σ est la transposition $(k,k+1)$.

Incidemment, le complémentaire de $[g \leq\ ]$ est un intervalle *biprincipal* (i.e. ayant un seul élément supérieur) ssi g est bigrassmannienne (cf. [LS7]).

Il y a une seule grassmannienne qui ne soit pas bigrassmannienne pour $\mathfrak{S}(4)$, à savoir $g = 2413$. La figure 1 montre la décomposition du groupe symétrique en deux intervalles ($P_g(\mu) = 0$ et $P_g(\mu) = 1$) qu'elle induit, l'intervalle $[2413 \leq\ ]$ étant représenté en gras :



Enfin le nombre des grassmanniennes de $\mathfrak{S}(n)$ est $2^{n-1} - n + 1$; c'est donc la dimension du module des potentiels de Yin sur le permutoèdre :

n	$=$	3	4	5	6	7	8
		4	11	26	57	120	247

Tableaux de Young

J'ai déjà mentionné l'expérimentation comme activité combinatoire. Où donc observer un potentiel de Yin ? Une réponse est apportée par le fameux *jeu de taquin*, dû à M.P. Schützenberger [MPS1], [MPS2].

Plus précisément, on n'a besoin que du taquin sur les tableaux à deux lignes, le déplacement des pièces étant contraint par le respect des conditions de croissance (stricte dans les colonnes, large dans les lignes) :

$$\begin{array}{|c|c|cc}\hline 2 & 6 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \hline 1 & 2 & \multicolumn{1}{|c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{7} \\ \hline \end{array} \quad \overset{\sigma}{\longleftrightarrow} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 6 & 7 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{} & 1 & 4 \\ \cline{3-4} \end{array}$$

Plus généralement, un *tableau* (cf. [Kn]) est un remplissage d'un intervalle fini principal du plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par des entiers de sorte que chaque colonne (lue de bas en haut) soit strictement croissante, et chaque *ligne* (lue de gauche à droite) soit croissante au sens large.

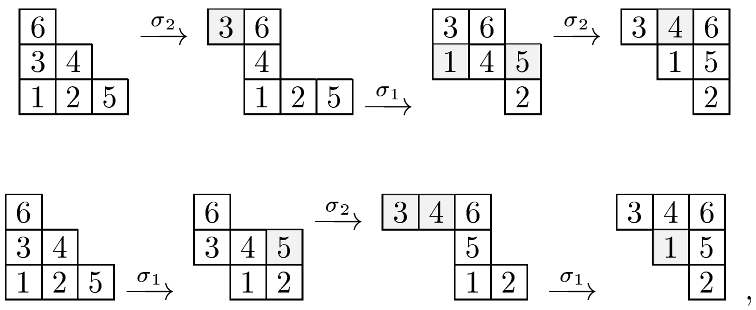
Le jeu de taquin sur les paires de lignes consécutives induit une action du groupe symétrique qui est duale de l'action sur les valeurs des pièces définie en [LS1].

A dire vrai, une grande partie de mes travaux avec M.P. Schützenberger consiste à appréhender les propriétés du groupe symétrique à travers des représentations planaires où les tableaux de Young tiennent une place de choix. Les textes [LS3] et [LS4] utilisent l'action du groupe symétrique sur les colonnes des tableaux de Young pour associer à chaque tableau une permutation et décrire ainsi la postulation-des-fibrés-inversibles-au-dessus-des-sous-variétés-de-drapeaux, [LS1] veut expliquer en quoi les fonctions de Schur non commutatives sont symétriques (les modernes parleraient de *graphes cristallins des groupes de type* A_n).

Revenons à la permutation des lignes d'un tableau. Appelons *mots francs* les différents n-uples de lignes que l'on obtient à partir d'un tableau à n lignes en itérant la transposition de deux lignes consécutives. Plus précisément, notons σ_k la transposition de la k-ième et $k+1$-ième lignes (lignes éventuellement vides si k est trop grand).

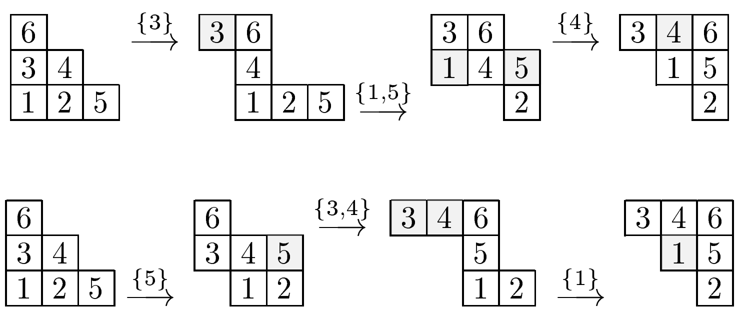
De la construction donnée en [LS1] résulte que le groupe engendré par les σ_k, $k = 1, \ldots, n-1$, agissant sur les tableaux à n lignes, est isomorphe au groupe symétrique : les σ_k vérifient les *relations de tresse*.

En d'autres termes, puisque les actions sur des paires de lignes disjointes n'interfèrent pas, l'assertion se réduit essentiellement à montrer que pour tout tableau à trois lignes, les deux opérations $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ et $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$ produisent le même objet :



les objets intermédiaires étant des mots francs à trois lignes correspondant aux 4 permutations de $\mathfrak{S}(3)$ autres que 123 et 321 (le terme *franc* a été choisi par M.P. Schützenberger, sans référence à Clovis).

On note que dans le passage d'un tableau à deux lignes au contretableau, certaines lettres montent d'un étage et les autres restent au même niveau. On peut donc décider d'enregistrer les lettres qui montent, ce que nous avons fait pour le tableau déjà choisi :



Comme les lettres peuvent monter à plusieurs reprises, on ne peut garder la notation ensembliste pour désigner les déplacements cumulés.

Pour éviter toute ambiguité, on prendra comme lettres $x_1,x_2,\ldots$ au lieu de $1,2\ldots$ et l'on définira le potentiel d'un mot franc t comme la somme :

$$P(t) := \sum_x h(x)\, x \ ,$$

où x parcourt le mot franc et où $h(x)$ est la hauteur de la lettre (comptée à partir du bas). Par exemple :

$$P\left(\begin{array}{cccc} \boxed{3} & \boxed{6} & & \\ & \boxed{4} & & \\ & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{5} \end{array}\right) = 1(x_1+x_2+x_5) + 2(x_4) + 3(x_3+x_6)$$

Theorème. — *La fonction potentiel sur les mots francs vérifie les conditions de Yin.*

Preuve. — On est réduit à examiner les hexagones correspondant à un tableau à trois lignes. Pour l'exemple précédent (l'hexagone est horizontal, et l'origine, de gauche) :

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[r, "x_1+x_5"] & {} \arrow[dr, "x_4"] & \\
{} \arrow[ur, "x_3"] \arrow[dr, "x_5"'] & & & {} \\
 & {} \arrow[r, "x_3+x_4"'] & {} \arrow[ur, "x_1"'] &
\end{tikzcd}$$

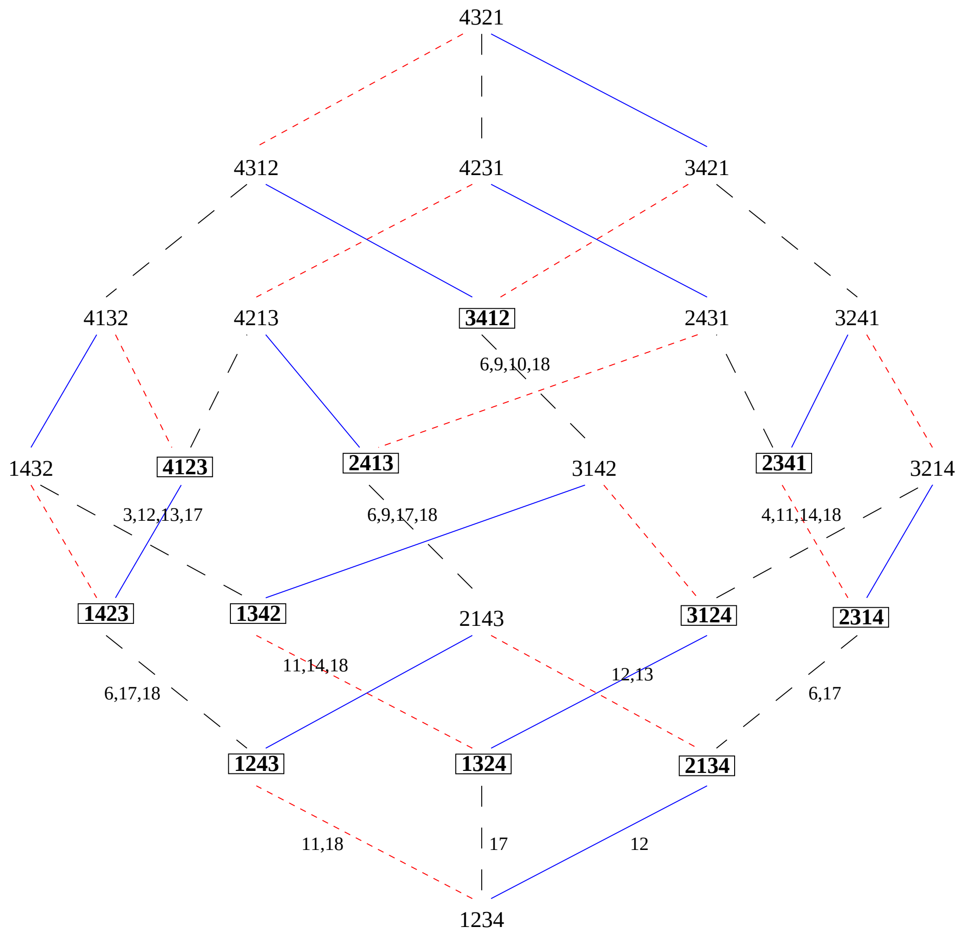
Mais il est facile de voir que les lettres qui se déplacent à la première et 3ème étape, et pas à la 2ème dans le chemin supérieur, doivent se déplacer à la 2ème étape du chemin en bas, puisque les deux chemins mènent au même objet à droite. Il n'y a pas plus de difficulté à reconstituer l'histoire des lettres qui se déplacent deux fois, et ainsi épuiser tous les scénarios possibles □

Un potentiel Yin étant déterminés par le potentiel des grassmanniennes, les potentiels des mots francs obtenus à partir d'un tableau sont donc déterminés par l'incrément de potentiel entre chaque permutation grassmannienne et son prédecesseur (pour l'hexagone précédent, ce sont les flèches inclinées). On peut noter que pour des mots sans répétition de lettres, il est équivalent de se donner un mot franc t ou son potentiel $P(t)$, les lettres sur la k-ième ligne étant celles affectées du coefficient k ddans $P(t)$.

Les 23 mots francs obtenus à partir du tableau :

8	16	19				
3	12	13	15			
2	6	9	10	17		
1	4	5	7	11	14	18

sont donc déterminés par les différences de potentiel marquées par la figure 2, où les permutations grassmanniennes figurent dans un cartouche :



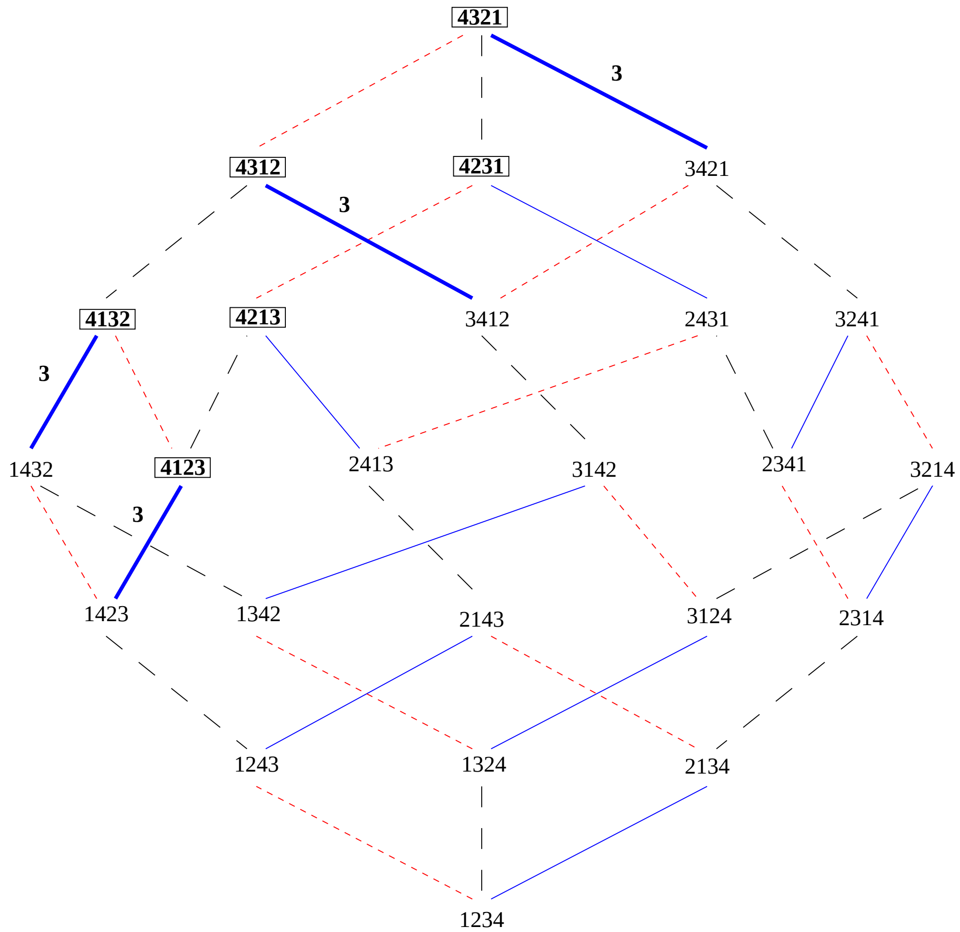
Par exemple, le potentiel de la permutation 3214, qu'on obtient en complétant l'hexagone en bas à droite, est $x_6 + x_{12} + x_{13} + x_{17}$, et l'identité :

$$P(3241) - P(3214) = P(2341) - P(2314)$$

donne finalement :

$$P(3241) = x_4 + x_6 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{17} + x_{18} \ .$$

La compatibilité des potentiels Yin avec l'ordre d'Ehresmann-Bruhat peut se décrire ainsi : étant donné un tableau, prenons un sous-ensemble arbitraire $\mathcal{E}$ des lettres qui composent le tableau. Alors l'ensemble des mots francs obtenus par jeu de taquin sur les paires de lignes du tableau, en n'autorisant que les transpositions qui ne déplacent pas verticalement les lettres de $\mathcal{E}$, est un intervalle pour l'ordre d'Ehresmann-Bruhat. Par exemple, si l'on n'autorise pas le déplacement de x_3, la figure précédente se décompose en les deux intervalles [1234 , 3421] et [4123 , 4321] :



On touche là à une propriété qui nous avait servi, à la suite de la note [LS2], à donner une version non commutative des polynômes de Schubert. L'ensemble d'interdiction est cette fois-ci l'ensemble des lettres de la première colonne du tableau.

J'ai exposé une partie de cette construction à la "Rota Festchrift" de Strasbourg. Nous ne l'avions point publiée, car nous n'avions pas d'explication naturelle de l'apparition d'intervalles pour l'ordre d'Ehresmann (ce qui me semble maintenant corrigé par les potentiels Yin). Nous avons préféré donner d'autres versions dans [LS3], [LS5] et [LS6], en particulier en utilisant les différences divisées isobares, ou en utilisant le jeu de taquin sur des colonnes consécutives (il faut alors garder en mémoire le nombre de fois où les lettres restent à gauche, au lieu d'enregistrer leur hauteur).

Références

[**Eh**] C. Ehresmann, Sur la topologie de certains espaces homogènes, Annals of Maths (2) **35** (1934) 396-443.

[**G-K**] M. Geck & S.Kim, Bi-Grasmannians and the Bruhat-Chevalley order of finite Coxeter groups, *prépublication*, (1996).

[**Kn**] D.E. Knuth, the Art of computer programming, Vol **3**, Addison-Wesley (1973).

[**LS1**] Le monoïde plaxique, *in Non Commutative Structures, Napoli 1978*, Quaderni della Ricerca, Roma (1981).

[**LS2**] Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux, *Comptes Rendus* **295** (1982) 629.

[**LS3**] Keys and Standard Bases, *in* "Invariant Theory and Tableaux", IMA vol. in Maths and Appl. **19** , Springer (1990) 125-144.

[**LS4**] Arêtes et Tableaux, 20^{eme} Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Alghero (sept.1988) 109-120.

[**LS5**] Fonctorialité des polynômes de Schubert, *Contempory Maths* **88** (1989) 585-598 .

[**LS6**] Tableaux and non commutative Schubert Polynomials, Funk.Anal **23** (1989) 63-64.

[**LS7**] *Treillis et bases des groupes de Coxeter*, Electronic Journal of Combinatorics **3**, (1996).

[**MPS1**] Sur une construction de Gilbert de B.Robinson, in *Séminaire Dubreuil, 25ème année: 1971/72*, Paris (1973).

[**MPS2**] La correspondance de Robinson, in *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, L.N. in Maths **579**, Springer (1977) 59-113.