Correspondances entre les différents types de bijections entre le groupe symétrique et les chemins de Motzkin valués

par

Arthur RANDRIANARIVONY[1]

Résumé. – Le but de cette note est de trouver les liens entre les différents types de bijections entre le groupe symétrique et les chemins de Motzkin valués.

1. – Introduction.

Depuis quelques années, les devéloppements en fractions continues des fonctions génératrices font l'objet d'un regain d'attention par certains combinatoristes. La théorie combinatoire des fractions continues de Flajolet [3] et l'existence des bijections entre les chemins de Motzkin valués et le groupe symétrique ([1], [4], [5], [6]) permettent de devélopper la fonction génératrice de certains polynômes générateurs du groupe symétrique en fraction continue de type Jacobi ou de type Stieltjes.
En 1979, Françon et Viennot [5] ont construit une bijection entre le groupe symétrique et un ensemble de chemins de Motzkin valués appélés *histoires de Laguerre*. Dix ans plus tard, Foata et Zeilberger [4] ont construit eux-aussi une autre bijection entre ces deux ensembles. Récemment, Clarke, Steingrímsson et Zeng [2] ont trouvé une correspondance entre ces deux bijections, dont nous rappelons la construction dans le paragraphe suivant.
Dans cette note, nous essayons de trouver les liens entre les autres bijections.
Rappelons qu'un chemin de Motzkin de longueur n est un mot de l'alphabet

$$\{—, \text{---}, \nearrow, \searrow\}$$

tel que si l'on note

$$h_i(c) = \#\{j \le i/\ c_j = \nearrow\} - \#\{j \le i/\ c_j = \searrow\},$$

alors $h_i(c) \ge 0$ pour tout i et $h_n(c) = 0$ (avec la convention $h_0(c) = 0$).
$h_{i-1}(c)$ est appelé *niveau* du i-ème pas c_i du chemin.
Le chemin $c = \nearrow\nearrow\searrow\nearrow\nearrow — — \searrow \text{---} \searrow$ peut être représenté par la figure 1.
Si un chemin de Motzkin ne possède pas de pas horizontal, on dit que c'est un chemin de Dyck.

[1]Département de Mathématiques, Université Louis-Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

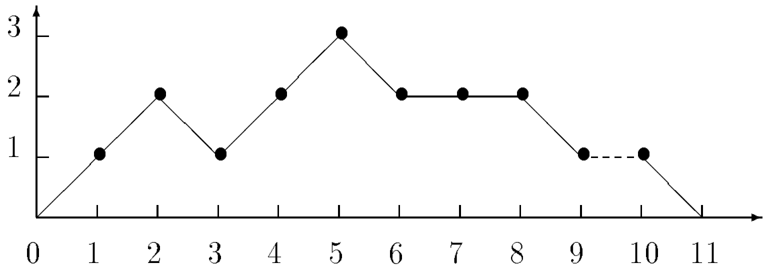


fig. 1

Un chemin de Motzkin valué de longueur n est un couple (c, p) où $c = c_1c_2\cdots c_n$ est un chemin de Motzkin de longueur n et $p = p_1p_2\cdots p_n$ une suite d'entiers ≥ 0.
Si p vérifie la condition
$0 \leq p_i \leq h_{i-1}(c)$ si $c_i =$ ╱ ou —, et $0 \leq p_i \leq h_{i-1}(c) - 1$ si $c_i =$ ╲ ou ---,
on dit que (c, p) est une *histoire de Laguerre.*

Si c est un chemin de Dyck et $p_i = 0$ pour $c_i =$ ╱, et, $0 \leq p_i \leq \left\lceil \dfrac{h_{i-1}(c)}{2} \right\rceil - 1$ pour $c_i =$ ╲ où $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier $\geq x$,
on dit que (c, p) est une *histoire de Laguerre subdivisée.*

Un chemin de Motzkin bivalué de longueur n est un couple (c, ξ) où $c = c_1c_2\cdots c_n$ est un chemin de Motzkin de longueur n et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ une suite de couples d'entiers ≥ 0 telle que, si $\xi_i = (\xi_i^-, \xi_i^+)$ $(1 \leq i \leq n)$, alors
$\xi_i^- = \xi_i^+ = 0$ si $c_i =$ ╱;
$0 \leq \xi_i^- \leq h_{i-1}(c) - 1$, $0 \leq \xi_i^+ \leq h_{i-1}(c) - 1$ si $c_i =$ ╲;
$0 \leq \xi_i^- \leq h_{i-1}(c) - 1$, $\xi_i^+ = 0$ si $c_i =$ ---;
$\xi_i^- = 0$, $0 \leq \xi_i^+ \leq h_{i-1}(c)$ si $c_i =$ —.

On note respectivement $HL(n)$, $HLS(2n)$ et $CB(n)$ l'ensemble des histoires de Laguerre de longueur n, des histoires de Laguerre subdivisées de longueur $2n$ et l'ensemble des chemins de Motzkin bivalués de longueur n.

2. – Correspondance entre la bijection de Françon - Viennot et la bijection de Foata-Zeilberger.

Étant donnée une permutation σ de $[n]$, on dit que $\sigma(i)$ $(1 \leq i \leq n)$ est:
– un pic de σ si $\sigma(i-1) < \sigma(i) > \sigma(i+1)$;
– un creux de σ si $\sigma(i-1) > \sigma(i) < \sigma(i+1)$;
– une double montée de σ si $\sigma(i-1) < \sigma(i) < \sigma(i+1)$;
– une double descente de σ si $\sigma(i-1) > \sigma(i) > \sigma(i+1)$;
avec la convention $\sigma(0) = \sigma(n+1) = 0$.

Si $\sigma^{-1}(i) < i > \sigma(i)$ (resp. $\sigma^{-1}(i) > i < \sigma(i)$, $\sigma^{-1}(i) < i < \sigma(i)$, $\sigma^{-1}(i) \geq i \geq \sigma(i)$), on dit que i est un pic (resp. un creux, une double montée, une double descente) de cycle de σ.

Théorème 1 [Françon-Viennot [5]]. – Il existe une bijection $\Psi_{FV} : S_{n+1} \longrightarrow \Gamma_n$, $\sigma \mapsto \Psi_{FV}(\sigma) = (c,p)$ telle que, pour $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{array}{l} i \text{ est un pic de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i = \searrow; \\ i \text{ est un creux de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i = \nearrow; \\ i \text{ est une double montée de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i = \text{—}; \\ i \text{ est une double descente de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i = \text{---}. \end{array} \tag{1}$$

où Γ_n désigne l'ensemble des chemins de Motzkin valués (c,p) de longueur n vérifiant $0 \leq p_i \leq h_{i-1}(c)$ pour tout i.

Construction. Soient $\sigma \in S_{n+1}$ et $i \in [n]$. On décompose σ en une suite de mots $m_0 M_0 \cdots m_k M_k m_{k+1}$, appelée i-décomposition de σ, telle que $M_0, \ldots, M_k$ soient des sous-mots non vides de σ ne contenant que des lettres $\geq i$, et $m_0, \ldots, m_{k+1}$ des sous-mots non vides, sauf éventuellement m_0 et m_{k+1}, et ne contenant que des lettres $< i$. De la relation (1), on a:

$$h_{i-1}(c) = \sum_{j=0}^{k+1} (\text{nb de creux dans } m_j - \text{ nb de pics dans } m_j).$$

Or,

$$\text{nb de creux dans } m_0 \text{ (resp. } m_{k+1}) = \text{nb de pics dans } m_0 \text{ (resp. } m_{k+1})$$

et,

$$\text{nb de creux dans } m_j = 1 + \text{nb de pics dans } m_j \quad (1 \leq j \leq k).$$

Par conséquent, $h_{i-1}(c) = k$ et on pose $p_i = l$ si $i \in M_l$. On a bien $0 \leq p_i \leq h_{i-1}(c)$.

Si $\sigma(n+1) = n+1$, la i-décomposition de σ est $m_0 M_0 \cdots m_k M_k$. Dans ce cas, si i est un pic ou une double descente de σ, nécessairement $i \notin M_k$. Ce qui implique que $k \neq 0$. Par conséquent, si $c_i = \setminus$ ou ---, $0 \leq p_i \leq h_{i-1}(c) - 1$.

Comme toute permutation σ de $[n+1]$ telle que $\sigma(n+1) = n+1$ peut être identifiée à une permutation de $[n]$, alors on a le théorème suivant équivalent au précédent.

Théorème 2 [Françon-Viennot]. – Il existe une bijection $\Psi'_{FV} : S_n \longrightarrow HL(n)$, $\sigma \mapsto (c,p)$ telle que, pour $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{array}{l} i \text{ est un pic de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i = \searrow; \\ i \text{ est un creux de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i = \nearrow; \\ i \text{ est une double montée de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i = \text{—}; \\ i \text{ est une double descente de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i = \text{---}. \end{array} \tag{2}$$

avec la convention $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(n+1) = n+1$.

Remarque. Si $B_0 B_1 \cdots B_r$ est la décomposition de σ en une suite de blocs telle que B_j soit un sous-mot décroissant et maximal de σ pour tout j (voir [2]), et

$m_0M_0\cdots m_kM_k$ la i-décomposition de σ, on note B_{i_j} le bloc contenant la dernière lettre de M_j $(1\leq j\leq k-1)$. Soit M_l le sous-mot contenant i.
Si $M_l\neq i$, B_{i_0}, B_{i_1},. . ., $B_{i_{k-1}}$ sont les seuls blocs qui embrassent i, c'est-à-dire les blocs B_j tels que $O(B_j)<i<F(B_j)$ où $O(B_j)$ et $F(B_j)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande lettre de B_j respectivement appelées ouvrant et fermant de B_j.
Si $M_l=i$, il y a exactement $k-1$ blocs qui embrassent i.
On en déduit que

$$h_{i-1}(c)=\begin{cases}\#\{\text{blocs de } \sigma \text{ qui embrassent } i\} & \text{si } i \text{ n'est pas un pic;}\\ \#\{\text{blocs de } \sigma \text{ qui embrassent } i\}+1 & \text{si } i \text{ est un pic.}\end{cases}$$

et p_i est égal au nombre de blocs embrassant i et situés à gauche du bloc qui le contient.

Exemple 1. Soit $\sigma=8\ 2\ 3\ 1\ 10\ 9\ 4\ 6\ 7\ 5$. Sa décomposition en blocs de descentes est $8\ 2\ -3\ 1\ -10\ 9\ 4\ -6\ -7\ 5$. Si $(c,p)=\Psi'_{FV}(\sigma)$, le chemin c est représenté par la figure 2 et $p=0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 0\ 0\ 0$.

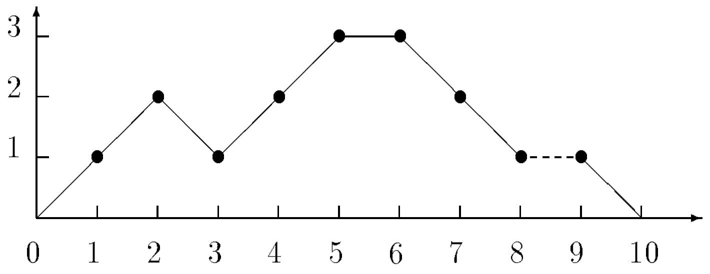


fig. 2

Théorème 3 [Foata-Zeilberger [4]]. – Il existe une bijection Ψ_{FZ} :
$S_n\longrightarrow HL(n)$, $\sigma\mapsto(c,p)$ telle que, pour $1\leq i\leq n$,

$$\begin{array}{l} i \text{ est un pic de cycle de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i=\searrow;\\ i \text{ est un creux de cycle de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i=\nearrow;\\ i \text{ est une double montée de cycle de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i=\text{---};\\ i \text{ est une double descente de cycle de } \sigma \text{ si et seulement si } c_i=\text{—}.\end{array}\tag{3}$$

Soient $\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots,\sigma(i_k)$ (resp. $\sigma(j_1),\sigma(j_2),\ldots,\sigma(j_{n-k})$) les excédances (resp. les non-excédances) de σ, c'est-à-dire $\sigma(i_l)>i_l$ (resp. $\sigma(j_l)\leq j_l$) pour tout l. On note:

$$\sigma_{exc}=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_k)\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_{nex}=\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-k}\\ \sigma(j_1) & \sigma(j_2) & \cdots & \sigma(j_{n-k})\end{pmatrix}$$

Par construction,
$p_{\sigma(i_1)}p_{\sigma(i_2)}\cdots p_{\sigma(i_k)}$ est la table d'inversion à gauche de σ_{exc};

$p_{\sigma(j_1)}p_{\sigma(j_2)}\cdots p_{\sigma(j_{n-k})}$ est la table d'inversion à droite de σ_{nex}.
Par suite, on obtient:

$$p_i = \begin{cases} \#\{j < \sigma^{-1}(i);\ \sigma(j) > i\} & \text{si } \sigma^{-1}(i) < i; \\ \#\{j > \sigma^{-1}(i);\ \sigma(j) < i\} & \text{si } \sigma^{-1}(i) \geq i. \end{cases} \tag{4}$$

D'autre part, on a:

$$h_{i-1}(c) = \#\{j < i;\ \sigma(j) \geq i\} = \#\{j < i;\ \sigma^{-1}(j) \geq i\} \tag{5}$$

En effet, la relation (3) entraîne que

$$\begin{aligned} h_i(c) &= \#\{j \leq i;\ j < \sigma^{-1}(j);\ j < \sigma(j)\} - \#\{j \leq i;\ j > \sigma^{-1}(j);\ j > \sigma(j)\} \\ &= \#\{j \leq i;\ j < \sigma(j)\} - \#\{j \leq i;\ j \geq \sigma^{-1}(j);\ j < \sigma(j)\} \\ &\qquad - \#\{j \leq i;\ j > \sigma^{-1}(j);\ j > \sigma(j)\} \\ &= \#\{j \leq i;\ j < \sigma(j)\} - \#\{j \leq i;\ j > \sigma^{-1}(j)\} \end{aligned}$$

Or,
$\#\{j \leq i;\ j < \sigma(j)\} = \#\{j \leq i;\ \sigma(j) > i\} + \#\{j \leq i;\ j < \sigma(j) \leq i\}$
et, $\#\{j \leq i;\ j < \sigma(j) \leq i\} = \#\{j \leq i;\ j > \sigma^{-1}(j)\}$.

Exemple 2. Soient $\sigma = 8\ 3\ 1\ 9\ 7\ 5\ 6\ 4\ 10\ 2$ et $(c, p) = \psi_{FZ}(\sigma)$. La décomposition en cycles de σ est $(1\ 8\ 4\ 9\ 10\ 2\ 3)(5\ 7\ 6)$. Donc c est déterminé par la figure 2.
D'autre part, on a:

$$\sigma_{exc} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 9 & 7 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_{nex} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Par suite $p = 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 0\ 0\ 0$.

Récemment, Clarke, Steingrímsson et Zeng [2] ont prouvé le théorème suivant.

Théorème 4. – Il existe une bijection Φ de S_n sur S_n telle que $\Psi'_{FV} = \Psi_{FZ} \circ \Phi$.

Construction de Φ. Soit $\pi \in S_n$, $\pi = B_0 B_1 \cdots B_r$ sa décomposition en blocs de descentes. Pour tout $i \in [n]$, on note e_i le nombre de blocs embrassant i et situés à sa gauche. On pose d'autre part
$F = \{i \in [n];\ i \text{ est un creux ou une double descente de } \pi\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$;
$F' = \{i \in [n];\ i \text{ est un pic ou une double descente de } \pi\}$;
$G = \{i \in [n];\ i \text{ est un pic ou une double montée de } \pi\} = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\}$;
$G' = \{i \in [n];\ i \text{ est un creux ou une double montée de } \pi\}$.

On définit $\Phi(\pi) = \sigma$ de la façon suivante:
(i) $\sigma(F) = F'$ tel que $e_{\sigma(i_1)} e_{\sigma(i_2)} \cdots e_{\sigma(i_k)}$ soit la table d'inversion à gauche de $\sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_k)$;

(ii) $\sigma(G) = G'$ tel que $e_{\sigma(j_1)}e_{\sigma(j_2)}\cdots e_{\sigma(j_{n-k})}$ soit la table d'inversion à droite de $\sigma(j_1)\sigma(j_2)\cdots\sigma(j_{n-k})$.

Exemple 3. Soit $\pi = 8\ 2\ 3\ 1\ 10\ 9\ 4\ 6\ 7\ 5$. Sa décomposition en blocs de descentes est $8\ 2\ -3\ 1\ -10\ 9\ 4\ -6\ -7\ 5$. On a $e = e_1e_2\cdots e_{10} = 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 0\ 0\ 0$.
D'autre part,
$F = \{1,2,4,5,9\}$, $F' = \{3,7,8,9,10\}$, $G = \{3,6,7,8,10\}$ et $G' = \{1,2,4,5,6\}$.
On a donc

$$\sigma_{exc} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 9 & 7 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_{nex} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\Phi(\pi) = \sigma = 8\ 3\ 1\ 9\ 7\ 5\ 6\ 4\ 10\ 2$.
D'après les exemples 1 et 2, on a bien $\Psi'_{FV}(\pi) = \Psi_{FZ}(\sigma)$

3. – Correspondance entre la bijection de Foata-Zeilberger et la bijection de Biane.

Dans son article [1], Biane a démontré le théorème suivant.

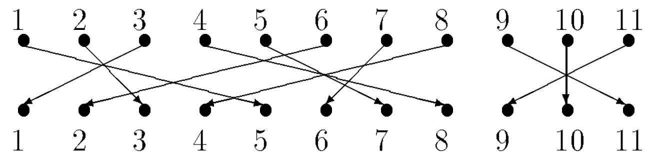
Théorème 5. – Il existe une bijection Ψ_B de S_n sur $CB(n)$ telle que, si $\Psi_B(\sigma) = (c,\xi)$, alors, pour $1 \le i \le n$,

i est un pic de cycle de σ si et seulement si $c_i = \diagdown$;
i est un creux de cycle de σ si et seulement si $c_i = \diagup$;
i est une double montée de cycle de σ si et seulement si $c_i =$ - - -; (6)
i est une double descente de cycle de σ si et seulement si $c_i =$ —.

Par construction de Ψ_B, on a:

$$\begin{aligned} \xi_i^- &= \begin{cases} = 0 & \text{si } \sigma^{-1}(i) \ge i; \\ \#\{j < \sigma^{-1}(i);\ \sigma(j) > i\} & \text{si } \sigma^{-1}(i) < i; \end{cases} \\ \xi_i^+ &= \begin{cases} = 0 & \text{si } \sigma(i) > i; \\ \#\{j < \sigma(i);\ \sigma^{-1}(j) > i\} & \text{si } \sigma(i) \le i. \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Exemple 4. Soit $\sigma = 5\ 3\ 1\ 8\ 7\ 2\ 6\ 4\ 11\ 10\ 9$. Elle est représentée par le diagramme suivant:



Si $(c,\xi) = \psi_B(\sigma)$, alors le chemin c est représenté par la figure 3 et
$\xi = (0,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,0)(0,0)(1,1)(0,0)(0,0)(0,1)(0,0)$

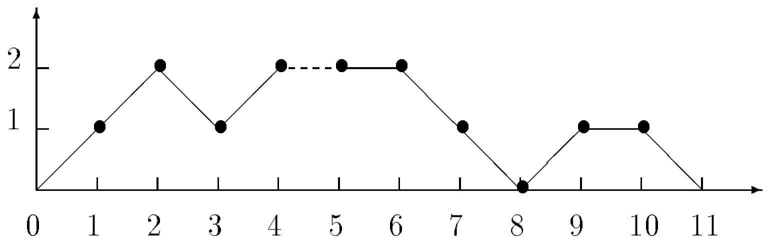


fig. 3

Théorème 6. – Il existe une bijection θ de $CB(n)$ sur $HL(n)$ telle que $\Psi_{FZ} = \theta \circ \Psi_B$.

Démonstration. Soient $\sigma \in S_n$ et $(c, \xi) = \Psi_B(\sigma)$. Notons
$A = \{j;\ c_j = \diagup \text{ ou } —\} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ et $B = \{j;\ c_j = \diagdown \text{ ou } —\} = \{j_1, \ldots, j_k\}$.
On a nécessairement $i_1 = 1, j_k = n$ et $i_l \leq j_l$ pour tout l.
Remarquons d'autre part que, pour $1 \leq l \leq k$,
$\xi^+_{j_l} \leq h_{i-1}(c) - 1 \leq k - (l-1) - 1 = k - l$ si $c_{j_l} = \diagdown$;
$\xi^+_{j_l} \leq h_{i-1}(c) \leq (k-1) - (l-1) = k - l$ si $c_{j_l} = —$.
Soit donc α la bijection de A sur B telle que $\xi^+_{\alpha(i_1)}\xi^+_{\alpha(i_2)} \cdots \xi^+_{\alpha(i_k)}$ soit la table d'inversion à gauche de $\alpha(i_1)\alpha(i_2)\cdots\alpha(i_k)$. Soit $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ la suite définie par:

$$p_i = \xi^-_i \text{ si } c_i = \diagdown \text{ ou } \text{- - -} \text{ et } p_i = \xi^+_{\alpha(i)} \text{ si } c_i = \diagup \text{ ou } —. \tag{8}$$

Montrons que $\theta : (c, \xi) \mapsto (c, p)$ applique bijectivement $CB(n)$ sur $HL(n)$ et que $(c, p) = \Psi_{FZ}(\sigma)$. Pour cela, montrons que $\alpha(i) \geq i$ pour tout $i \in A$.
Par construction, $\alpha^{-1}(j_1)$ est le m_1-ème élément de A où $m_1 = \xi^+_{j_1} + 1$: $\alpha^{-1}(j_1) = i_{m_1}$.
Si $c_{j_1} = \diagdown$,
$m_1 \leq h_{j_1-1} = \#\{j < j_1;\ c_j = \diagup\} - \#\{j < j_1;\ c_j = \diagdown\} = \#\{j < j_1;\ c_j = \diagup\}$.
On a dans ce cas $i_1 < j_1, i_2 < j_1, \ldots, i_{m_1} < j_1$.
Si $c_{j_1} = —$, $j_1 \in A$ et $m_1 - 1 \leq h_{j_1-1} = \#\{j < j_1;\ c_j = \diagup\}$.
Par conséquent, $i_1 < j_1, i_2 < j_1, \ldots, i_{m_1-1} < j_1$ et par suite $i_{m_1} \leq j_1$.
Dans les deux cas, on a toujours $\alpha^{-1}(j_1) \leq j_1$.
Soit maintenant α_1 la restriction de α à $A_1 = A \backslash \{i_{m_1}\}$. $\xi^+_{\alpha(i_1)} \cdots \xi^+_{\alpha(i_{m_1-1})}\xi^+_{\alpha(i_{m_1+1})} \cdots \xi^+_{\alpha(i_k)}$ étant la table d'inversion à gauche de $\alpha_1(i_1)\alpha_1(i_{m_1-1})\alpha_1(i_{m_1+1})\cdots\alpha_1(i_k)$, on peut appliquer le résultat précédent à α_1: $i_{m_2} = \alpha_1^{-1}(j_2) \leq j_2$, c'est-à-dire $\alpha^{-1}(j_2) \leq j_2$.
Par itération, on obtient $\alpha^{-1}(j_l) \leq j_l$ pour tout l.
Ainsi, pour tout $i \in [n]$,

$$\begin{aligned} h_{i-1}(c) &= \#\{j < i;\ j \in A\} - \#\{j < i;\ j \in B\} \\ &= \#\{j < i;\ j \in A\} - \#\{j < i;\ j \in A,\ \alpha(j) < i\} \\ &= \#\{j < i;\ j \in A,\ \alpha(j) \geq i\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Il en résulte que,
si $c_i = \diagdown$ ou - - -, $p_i = \xi^-_i \leq h_{i-1}(c) - 1$;
si $c_i = \diagup$ ou —, $p_i = \xi^+_{\alpha(i)} = \#\{k < i;\ \alpha(k) > \alpha(i)\} \leq \#\{k < i;\ \alpha(k) > i\} \leq h_{i-1}(c)$.

Ce qui prouve que $(c,p) \in HL(n)$. Par ailleurs, puisque α est bijective, θ est clairement bijective.
Enfin, les relations (3) et (6) entraînent que les chemins de Motzkin associés à σ respectivement par Ψ_B et Ψ_{FZ} sont identiques. De plus, on déduit des relations (5) et (9) que α est la restriction de σ^{-1} à A. Compte tenu des relations (4), (7) et (8), on a enfin $\Psi_{FZ}(\sigma) = (c,p)$.

Exemple 5. Prenons le chemin bivalué (c,ξ) défini dans l'exemple 4. Si $(c,p) = \theta(c,\xi)$, on a:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 8 & 7 & 11 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p = 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0$$

Or, si $\sigma = \psi_{FZ}^{-1}(c,p)$, on a

$$\sigma_{exc} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 7 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_{nex} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 8 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

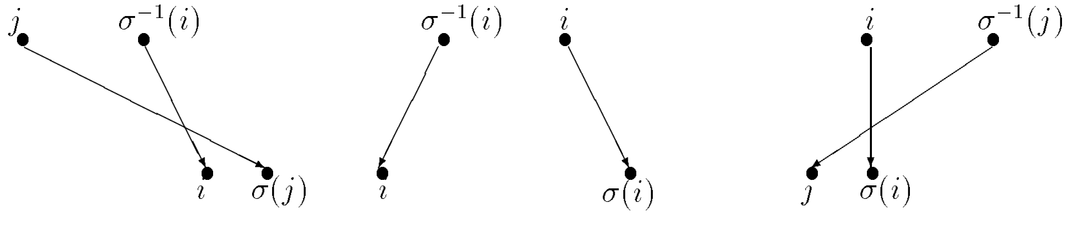
Donc $\sigma = 5\ 3\ 1\ 8\ 7\ 2\ 6\ 4\ 11\ 10\ 9$.
D'après l'exemple 4, on a alors $\Psi_{FZ}(\sigma) = \theta \circ \Psi_B(\sigma)$.

4. – Correspondance entre la bijection de Biane et la bijection de Médicis-Viennot.

de Médicis et Viennot [6] ont construit en trois étapes une bijection entre le groupe symétrique et les histoires de Laguerre subdivisées, qui peut être traduite par le théorème suivant.
Théorème 7. – L'application $\Psi_{MV} : \sigma \mapsto (\gamma, p)$ définie par

$$\begin{array}{ll} (i) & \begin{cases} \gamma_{2i-1} & = \searrow \ \text{ si et seulement si } \sigma^{-1}(i) < i; \\ \gamma_{2i} & = \searrow \ \text{ si et seulement si } \sigma(i) \le i; \end{cases} \\ (ii) & \begin{cases} p_i & = 0 & si\ \gamma_i = \nearrow; \\ p_{2i-1} & = \#\{j < \sigma^{-1}(i);\ \sigma(j) > i\} & si\ \gamma_{2i-1} = \searrow; \\ p_{2i} & = \#\{j < \sigma(i);\ \sigma^{-1}(j) > i\} & si\ \gamma_{2i} = \searrow. \end{cases} \end{array} \tag{10}$$

est une bijection de S_n sur $HLS(2n)$.



(a) (b) (c) (d)

$(a) : \gamma_{2i-1} = \diagdown,\ p_{2i-1} = \#\{j < \sigma^{-1}(i); \sigma(j) > i\}$
$(b) : \gamma_{2i-1} = \diagup,\ p_{2i-1} = 0$
$(c) : \gamma_{2i} = \diagup,\ p_{2i} = 0$
$(d) : \gamma_{2i} = \diagdown,\ p_{2i} = \#\{j < \sigma(i);\ \sigma^{-1}(j) > i\}$

Soit $\sigma \in S_n$, $(\gamma, p) = \Psi_{MV}(\sigma)$. On a:

$$\begin{aligned} h_{2i}(\gamma) = &\ \#\{j \leq 2i;\ \gamma_j = \diagup\} - \#\{j \leq 2i;\ \gamma_j = \diagdown\} \\ = &\ \#\{j \leq i;\ \sigma(j) > j\} + \#\{j \leq i;\ \sigma^{-1}(j) \geq j\} \\ &-\#\{j \leq i;\ \sigma(j) \leq j\} - \#\{j \leq i;\ \sigma^{-1}(j) < j\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \#\{j \leq i;\ \sigma(j) > j\} &= \#\{j \leq i;\ \sigma(j) > i\} + \#\{j \leq i;\ j < \sigma(j) \leq i\} \\ &= \#\{j \leq i;\ \sigma(j) > i\} + \#\{k \leq i;\ \sigma^{-1}(k) < k\} \\ \text{et } \#\{j \leq i;\ \sigma^{-1}(j) \geq j\} &= \#\{j \leq i;\ \sigma^{-1}(j) > i\} + \#\{j \leq i;\ j \leq \sigma^{-1}(j) \leq i\} \\ &= \#\{j \leq i;\ \sigma^{-1}(j) > i\} + \#\{k \leq i;\ \sigma(k) \leq k\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} h_{2i}(\gamma) &= \#\{j \leq i;\ \sigma(j) > i\} + \#\{j \leq i;\ \sigma^{-1}(j) > i\} \\ &= \#\{j \leq i;\ \sigma(j) > i\} + i - \#\{j \leq i;\ \sigma^{-1}(j) \leq i\} \\ &= \#\{j \leq i;\ \sigma(j) > i\} + i - \#\{k \leq i;\ \sigma(k) \leq i\}. \end{aligned}$$

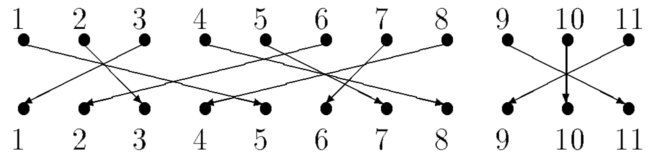
D'où

$$h_{2i}(\gamma) = 2\#\{j \leq i;\ \sigma(j) > i\} = 2\#\{j \leq i;\ \sigma^{-1}(j) > i\}.$$

On démontre de même que

$$h_{2i-1}(\gamma) = 2\#\{j < i;\ \sigma(j) > i\} + 1 = 2\#\{j \leq i;\ \sigma^{-1}(j) \geq i\} - 1.$$

Exemple 6. Soit $\sigma = 5\ 3\ 1\ 8\ 7\ 2\ 6\ 4\ 11\ 10\ 9$, $(\gamma, p) = \psi_{MV}(\sigma)$.
σ est représentée par le diagramme suivant:



Alors γ est représenté par la figure 4 suivante et
$p = 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0$.

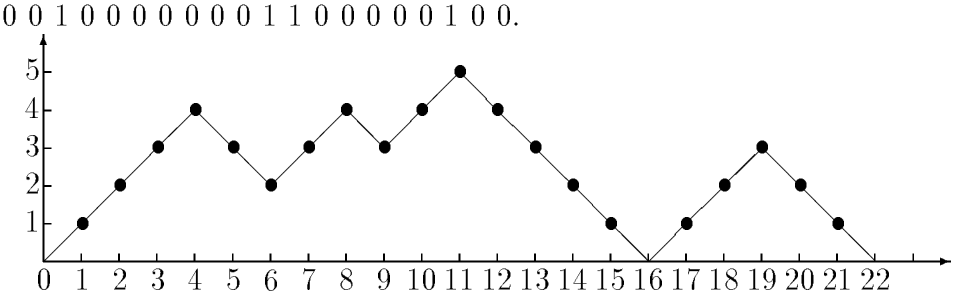


fig. 4

Théorème 8. – Il existe une bijection φ de $CB(n)$ sur $HLS(2n)$ telle que $\Psi_{MV} = \varphi \circ \Psi_B$.

Démonstration. Soient $\sigma \in S_n$, $(c, \xi) = \Psi_B(\sigma)$ et $(\gamma, p) = \Psi_{MV}(\sigma)$. Les relations (6) et (10)(i) montrent que γ est le décontracté de c, c'est-à-dire γ et c vérifient la relation suivante:

$$\begin{cases} \gamma_{2i-1} = \diagup,\ \gamma_{2i} = \diagup & \Longleftrightarrow \quad c_i = \diagup \\ \gamma_{2i-1} = \diagdown,\ \gamma_{2i} = \diagdown & \Longleftrightarrow \quad c_i = \diagdown \\ \gamma_{2i-1} = \diagup,\ \gamma_{2i} = \diagdown & \Longleftrightarrow \quad c_i = \text{—} \\ \gamma_{2i-1} = \diagdown,\ \gamma_{2i} = \diagup & \Longleftrightarrow \quad c_i = \text{- - -} \end{cases} \tag{11}$$

Les relations (7) et (10)(ii) impliquent, d'autre part, que $p = p_1 p_2 \cdots p_{2n}$ et $\xi = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n$ sont liés par la relation:

$$\text{Pour tout } i \in [n], p_{2i-1} = \xi_i^- \text{et } p_{2i} = \xi_i^+. \tag{12}$$

Considérons alors l'application $\varphi : (c, \xi) \mapsto (\gamma, p)$, où $(c, \xi) \in CB_n$ et (γ, p) le chemin marqué défini par les relations (11) et (12).
On a:

$$h_{2j}(\gamma) = h_{2j-2}(\gamma) + 2\chi(c_j = \diagup) - 2\chi(c_j = \diagdown) \text{ pour tout } j \in [n].$$

Ce qui entraîne que

$$h_{2i}(\gamma) = 2h_i(c) \text{ pour tout } i \in [n].$$

Soit donc $k \in [2n]$.
a) k *impair* : $k = 2i - 1$
– si $\gamma_k = \diagup$, $c_i = \diagup$ ou — et par suite $\xi_i^- = 0$. Donc $p_k = 0$.
– si $\gamma_k = \diagdown$, $c_i = \diagdown$ ou - - - et par suite $0 \le \xi_i^- \le h_{i-1}(c) - 1$. Donc $0 \le p_k \le \dfrac{h_{k-1}}{2}(\gamma) - 1$.

b) k *pair* : $k = 2i$
– si $\gamma_k = \diagup$, $c_i = \diagup$ ou - - - et par suite $\xi_i^+ = 0$. Donc $p_k = 0$.
– si $\gamma_k = \diagdown$, $c_i = \diagdown$ ou — :
Si $c_i = \diagdown$, $\gamma_{2i-1} = \diagdown$, et $0 \le \xi_i^+ \le h_{i-1}(c) - 1 = \dfrac{h_{2i-2}(\gamma)}{2} - 1 = \dfrac{h_{2i-1}(\gamma) + 1}{2} - 1$.
Par suite, $0 \le p_k \le \dfrac{h_{k-1}(\gamma) + 1}{2} - 1$.
Si $c_i = \text{—}$, $\gamma_{2i-1} = \diagup$, et $0 \le \xi_i^+ \le h_{i-1}(c) = \dfrac{h_{2i-2}(\gamma)}{2} = \dfrac{h_{2i-1}(\gamma) - 1}{2}$.
Par suite, $0 \le p_k \le \dfrac{h_{k-1}(\gamma) - 1}{2} = \dfrac{h_{k-1}(\gamma) + 1}{2} - 1$.

On en déduit que φ est bien une application de CB_n vers $HLS(2n)$.
D'autre part, d'après ce qui précède, on a les équivalences:

$$0 \leq p_{2i-1} \leq \frac{h_{2i-2}}{2} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq \xi_i^- \leq h_{i-1} - 1;$$

$$0 \leq p_{2i} \leq \frac{h_{2i-1}+1}{2} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq \xi_i^+ \leq h_{i-1} - 1 \text{ et } c_i = \searrow; \\ \text{ou} \\ 0 \leq \xi_i^+ \leq h_{i-1} \text{ et } c_i = \longrightarrow. \end{cases}$$

Ce qui montre que φ est bijective et $\Psi_{MV} = \varphi \circ \Psi_B$.

Exemple 7. Soit $\sigma = 5\ 3\ 1\ 8\ 7\ 2\ 6\ 4\ 11\ 10\ 9$. Le chemin de Motzkin bivalué (c, ξ) associé par ψ_B est défini dans l'exemple 5. Soit $(\gamma, p) = \varphi(c, \xi)$. Alors γ est représenté par la figure 4 et $p = 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0$.
Les exemples 5 et 6 montrent que $\Psi_{MV}(\sigma) = \varphi \circ \Psi_B(\sigma)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIANE (P.). — *Permutations suivant le type d'excédance et le nombre d'inversions, et interprétation combinatoire d'une fraction continue de Heine*, Europ. J. Combinatorics, **14** (1993), 277 – 284.

[2] CLARKE (R.J.), STEINGRÍMSSON (E.) et ZENG (J.). — *New Euler-Mahonian statistics on permutations*, Preprint 1996.

[3] FLAJOLET (P.). — *Combinatorial aspects of continued fractions*, Disc. Math., **32** (1980), 125 – 161.

[4] FOATA (D.) et ZEILBERGER (D.). — *Denert's Permutation Statistic is indeed Euler-Mahonian*, Studies in Appl. Math., **83** (1990), 31 – 59.

[5] FRANÇON (J.) et VIENNOT (X.G.). — *Permutations selon les pics, creux, doubles montées, doubles descentes, nombres d'Euler, nombres de genocchi*, Disc. Math., **28** (1979), 21 – 35.

[6] de MÉDICIS (A.) et VIENNOT (X.G.). — *Moments des q−polynômes de Laguerre et la bijection de Foata-Zeilberger*, Adv. Applied Math., **15** (1994), 262 – 304.