ARÊTES ET TABLEAUX

PAR

ALAIN LASCOUX[1] ET MARCEL-PAUL SCHÜTZENBERGER[2]

Que sont les tableaux :

* des *idempotents* dans l'algèbre du groupe symétrique, à la suite de Young ? [Young]

* des *bases* dans la représentation irréductible, dite semi-normale de Young, et la représentation orthogonale, toujours de Young, du groupe symétrique [Rutherford] ?

* des *polynômes* (produits de Vandermonde $\prod(x_i - x_j)$), bases des modules de Specht [Specht], [Garnir] ?

* plus généralement, des *mineurs* d'une matrice quelconque (au lieu de la matrice de Vandermonde des puissances d'un ensemble de variables) ? Dans ce cas, on préfère les *paires de tableaux* [Turnbull], [Rota].

* des *invariants* susceptibles de *redressement (straightening)*, ou bien encore des éléments de *l'algèbre lettre/place (letter/place algebra)* [Doubilet-Rota-Stein] ?

* géométriquement, des *coordonnées de Plücker* pour la Grassmannienne ou la variété de drapeaux [Hodge et Pedoe] ?

* des *bases-de-sections-de-fibrés-inversibles-au-dessus-des-sous-variétés-de-Schubert-de-la-variété-de-drapeaux* (i.e. des *postulations*) [Hodge], [Lakshmibai-Musili-Seshadri] ?

* des *composantes irréductibles* de la variété des drapeaux fixés par un unipotent [Steinberg] [Spaltenstein] ?

* des *coefficients de décomposition* de représentations du groupe linéaire [Littlewood-Richardson] ?

* des *monômes* dans le développement d'une fonction de Schur [Littlewood] ?

* des *poids* dans la formule des caractères de [Demazure] ?

* des chemins de *branchement* des représentations des groupes symétriques [Young] ou linéaires/unitaires [Gelfand-Cetlin] ? Dans ce dernier cas, ils se

---

Respectivement supportés par :

[1]le C.N.R.S., le Programme de Recherches (coordonnées) en Informatique, le Programme d'échanges européen PROCOPE;

[2]lui-même.

transforment en pyramides pointant vers le bas et portent le nom de *Gelfand-Cetlin Patterns.*

* des *partitions planes* [MacMahon] [Gordon] [Hillman-Grassl] ?

* des objets décrivant les *sous-suites monotones* d'une suite d'entiers [Schensted], [Greene] ?

* des *chaînes* dans le treillis des partitions [Kreweras] ?

* des ensembles de *chemins non coupants dans* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ [Gessel-Viennot] ?

* des *mots* [Barthes] donnant naissance au monoïde plaxique [Lascoux et Schützenberger] ?

* des *cellules gauches* [Kazhdan-Lusztig] ?

* des *décompositions réduites* des éléments du groupe symétrique : monoïde nilplaxique [Lascoux et Schützenberger], balanced tableaux [Edelman et Greene] ? ? ?

Ne serait ce donc que par le nombre de leurs avatars (et encore avons nous totalement ignoré les travaux de l'ecole californienne de combinatoire), les tableaux mériteraient une place exceptionelle dans la mythologie mathématique.

Nous inspirant d'Ehresmann qui avait défini à l'aide de tableaux l'ordre que l'on appelle soit *fort* (*strong*), soit *de Bruhat* (*Bruhat's*) sur le groupe symétrique, nous entendons mettre en avant une autre de leurs vertus, celle de fournir une *structure d'ordre Eulérienne* sur les permutations.

Tout d'abord, les tableaux sont des produits de *colonnes* :

Soit $\mathbb{A} = \{a_1 < a_2 < \cdots\}$ un alphabet, $\mathbb{Z}\langle\mathbb{A}\rangle$ son *algèbre libre*. Un mot $v = x_1 \ldots x_r$ est une *colonnes de degré* r $(= |v|)$ ssi $x_1 > \cdots > x_r$, $x_i \in \mathbb{A}$. On munit l'ensemble des colonnes de l'ordre $\gg$: une colonne $v = x_1 \ldots x_r$ *domine* une autre $w = y_1 \ldots y_p$ $(v \gg w)$ ssi il existe une *fonction* surjective croissante de l'ensemble des lettres de v dans celui de w, c'est-à-dire s'il existe un sous-mot v' de v et une *bijection* croissante des lettres de v' sur celle de w. En d'autres termes,

$$|v| \geq |w|, \quad \text{i.e. } r \geq p \tag{1}$$

$$x_r \leq y_p,\ x_{r-1} \leq y_{p-1},\ \ldots \tag{2}$$

Un produit $t = v_1 v_2 \ldots$ de colonnes est un *tableau* ssi $v_1 \gg v_2 \gg v_3 \gg \cdots$, c'est-à-dire ssi c'est une chaîne de colonnes. On appelle *forme* d'un tableau la suite I des degrés des colonnes de t : $I = (I_1, I_2, \ldots) = (|v_1|, |v_2|, |v_3|, \ldots)$; c'est donc une *partition*, i.e. $I_1 \geq I_2 \geq I_3 \geq \cdots$.

Par exemple, le mot 521 43 3 6 (que nous avons décomposé en ses colonnes) est un tableau de forme $3, 2, 1, 1$; on peut le représenter planairement par l'objet $\begin{matrix} 5 & & & \\ 2 & 4 & & \\ 1 & 3 & 3 & 6 \end{matrix}$. En d'autres termes, un mot est un tableau si et seulement si il provient de la *lecture idoine* (par colonnes) d'un tableau de Young. D'autres lectures sont possibles, par exemple la lecture par lignes ; on peut aussi prendre le tableau formé des complémentaires (dans l'alphabet) de chacune de ses colonnes ou pousser, jeu de taquin aidant, un tableau dans le cadran nord-est d'un rectangle le contenant : dans ce dernier cas, on obtient un *contre-tableau*, que l'on pourrait définir plus simplement comme une chaîne de colonnes pour l'ordre $\ll$: $v \ll w$ ssi il existe une injection croissante de l'ensemble des lettres de v dans celui de w.

En fait, une partie des propriétés des tableaux provient de ces différentes involutions, ainsi que de leurs combinaisons avec d'autres moins immédiates, chacune pouvant jouer un rôle spécifique important dans un des différents avatars énumérés ci-dessus.

Une *clef* est un tableau tel que pour chaque entier k, la colonne w_{k+1} est un sous-mot de w_k. Les clefs jouent un rôle particulier en théorie p–groupes Abéliens et des polynômes de Hall-Littlewood : ce sont les tableaux de *charge* nulle (cf. [Macdonald, III.6]). Enfin, un mot (en particulier, un tableau) est *standard* si c'est une permutation de $1, 2, \ldots, r$.

Une application remarquable envoyant bijectivement les mots sur les paires de tableaux de même forme a été découverte par Schensted. Elle semble être restée presqu'ignorée jusqu'à ce qu'un article de Knuth ne lui confère le statut qu'elle mérite. Nous préférons mettre l'accent sur la structure de monoïde sous-jacente à la contruction de Schensted.

On munit l'algèbre libre d'une congruence $\equiv$ (dite *plaxique*), engendrée par les relations élementaires suivantes, relations isolées par Knuth et qui sont la formulation algèbrique de la construction de Schensted :

$$\left.\begin{array}{lll} a_k a_i a_j \equiv a_i a_k a_j & \text{et} & a_j a_i a_k \equiv a_j a_k a_i \\ a_j a_i a_j \equiv a_j a_j a_i & \text{et} & a_j a_i a_i \equiv a_i a_j a_i \end{array}\right\} \quad i < j < k \ . \tag{3}$$

Deux mots sont congrus ssi ils donnent par l'algorithme de Schensted le même tableau ; le deuxiéme tableau (dit *tableau d'insertion* ; c'est le Q–symbole de Schensted) associé à un mot $v = x_1 x_2 \ldots$ est celui qui décrit la suite des formes des tableaux congrus aux facteurs gauches successifs de v, i.e. aux mots x_1, x_1x_2, $x_1x_2x_3$, $\ldots$

On parcourt la classe de congruence d'un mot v en faisant varier le tableau d'insertion $QQ(v)$: l'application $v \to Q(v)$ est une bijection de la classe de v sur l'ensemble des tableaux standards de même forme que le tableau congru à v. Ainsi donc, toute condition déterminant le tableau d'insertion fournit par là même un mot unique dans sa classe. Nous n'aurons besoin ici que du cas particulier suivant :

Lemme 4. *Soit t un tableau de forme $I = (I_1, I_2, \ldots, I_r)$; alors pour toute permutation $J = (J_1, \ldots, J_r)$ de I, il existe dans la classe de congruence de t un et un seul mot $v = v_1 \ldots v_r$, produit de colonnes de degrés respectifs $J_1, \ldots, J_r$. Si H est une autre permutation de J et $w = w_1 \ldots w_r$ let mot associé, alors $H_r \geq J_r$ implique que v_r est un sous-mot de w_r.*

Exemple 5. Le tableau $t = 531\ 62\ 4$ a trois colonnes de longueurs différentes, et donc il y a 6 permutations de sa forme auxquelles correspondent les mots (lire verticalement !) :

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}5\\1\end{array} \cdot \begin{array}{cc}6&\\3&\\2&4\end{array} \arrow[rr, dash] & & \begin{array}{cc}5&\\1&3\end{array} \cdot \begin{array}{c}6\\4\\2\end{array} \arrow[dr, dash] & \\
\begin{array}{ccc}5&&\\3&6&\\1&2&4\end{array} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & & & \begin{array}{ccc}1&5&6\\&3&4\\&&2\end{array} \\
 & \begin{array}{cc}5&\\3&\\1&2\end{array} \cdot \begin{array}{c}6\\4\end{array} \arrow[rr, dash] & & 1 \cdot \begin{array}{cc}5&\\3&6\\2&4\end{array} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

et donc la clef gauche $\begin{array}{ccc}5&&\\3&5&\\1&1&1\end{array}$ et la clef droite $\begin{array}{ccc}6&&\\4&6&\\2&4&4\end{array}$.

En particulier, lorsque t est une clef, ses colonnes commutent deux à deux (dans le monoide plaxique) et réciproquement, cette propriété de commutation caractérise les clefs. Pour un tableau général, avec les notations du lemme 4, on dit que v_1 (resp. v_r) est le *facteur gauche* (resp. *droit*) du couple (J, t). Pour chaque part I_k de I, on a donc obtenu, *par la gauche*, une colonne et une seule de degré I_k. D'aprés le lemme 4, ces colonnes sont des sous-mots les unes des autres. En d'autres termes, le produit des facteurs gauches de degré respectifs $I_1, I_2, \ldots$ est une clef dite *clef gauche* de t et notée $\mathbf{K}_-(t)$. On définit similairement la *clef droite* $\mathbf{K}_+(t)$ de t.

Par exemple, le tableau 541 62 75 6 7 est congru aux mots

$$51\ 642\ 75\ 6\ 7, \quad 1\ 542\ 65\ 76\ 7, \quad 1\ 542\ 65\ 7\ 76, \quad 51\ 64\ 5\ 7\ 762,$$

ce que l'on peut écrire planairement si l'on préfère :

$$\begin{array}{ccccc}5&&&&\\4&6&7&&\\1&2&5&6&7\end{array} \equiv \begin{array}{c}5\\1\end{array} \cdot \begin{array}{cccc}6&&&\\4&7&&\\2&5&6&7\end{array} \equiv 1 \cdot \begin{array}{cccc}5&&&\\4&6&7&\\2&5&6&7\end{array} \equiv 1 \cdot \begin{array}{ccc}5&&\\4&6&\\2&5&7\end{array} \cdot \begin{array}{c}7\\6\end{array} \equiv \begin{array}{cccc}5&6&&\\1&4&5&7\end{array} \cdot \begin{array}{c}7\\6\\2\end{array}.$$

Avec les facteurs gauches que l'on répète le nombre de fois qu'il faut pour remplir le diagramme 3 2 2 1 1, on obtient la clef gauche $\begin{array}{ccccc}5&&&&\\4&5&5&&\\1&1&1&1&1\end{array}$, tandis que la clef droite est égale quant à elle à $\begin{array}{ccccc}7&&&&\\6&7&7&&\\2&6&6&7&7\end{array}$.

Les clef d'un tableau jouent un rôle décisif en maint probléme. Ainsi, la *base standard* de Lakshmibai-Musili-Seshadri, pour un poids I et une varieté de

Schubert $\mathcal{S}_\mu$, est l'ensemble des tableaux de forme I, de clef droite $\mathbf{K}(\mu, I)$, cf. [L&S2]. En outre, pour ce qui est de la structure multiplicative de ces bases, le produit de deux tableaux t, t' de forme I, est congru à un tableau de forme $I \cup I$ (i.e. à la partition $I_1 I_1 I_2 I_2 I_3 I_3 \ldots$) ssi $\mathbf{K}_+(t) \le \mathbf{K}_-(t')$ [L&S2]. Par ailleurs, les clefs donnent la décomposition d'un polynôme de Schubert X_μ en fonction des caractéres de Demazure et des décompositions réduites de la permutation μ, *cf.* [L&S1].

Venons en au groupe symétrique : à toute permutation μ de $\mathfrak{S}(n)$ et toute partition I, on associe une clef, notée $\mathbf{K}(\mu, I)$, en prenant la suite des facteurs gauches (réordonnés) de longueurs respectives $I_1, I_2, \ldots$ Ainsi, le couple $\mu = 582491736$, $I = 7, 5, 4, 2$ donne la clef 9875421 98542 8542 85.

L'ordre lettre-à-lettre sur les mots (i.e. $x_1 x_2 \ldots \le y_1 y_2 \ldots$ ssi $x_1 \le y_1$, $x_2 \le y_2, \ldots$) induit un ordre sur les clefs de même forme. D'aprés Ehresmann, une permutation μ de $\mathfrak{S}(n)$ est inférieure à une autre ζ ssi la clef $\mathbf{K}(\mu, n \ldots 21)$ est inférieure à $\mathbf{K}(\zeta, n \ldots 21)$.

Le groupe symétrique est ainsi muni d'une structure d'ordre gradué (*rank poset*), le grade étant le *nombre d'inversions* (il est dit aussi, plus majoritairement et maladroitement, *longueur* d'une permutation μ, alors que c'est la longueur d'un mot réduit (en les transpositions simples) égal à la permutation). A titre transitoire, nous adopterons le mot *hauteur* et noterons $|\mu|$.

L'ordre d'Ehresmann a de multiples propriétés, en particulier des propriétés de *dualité* qui sont dites d'*Eulérianité* (*Eulerian poset*).

L'exemple classique d'une telle structure est celui de l'ensemble des faces d'un polytope convexe (cf. [Grünbaum] et surtout [Macdonald] pour les résultats fondamentaux concernant les polynômes associés).

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre munie d'un automorphisme involutif σ. Un élément $\mathbb{E}$ de $\mathcal{A}$ est Eulérien ssi il est inversible et $\mathbb{E}^{-1} = \mathbb{E}^\sigma$. Donc si $\mathbb{F}$ est un autre élément Eulérien, il en est encore de même de $\mathbb{EFE}$ puisque $(\mathbb{EFE})^{-1} = \mathbb{E}^{-1}\mathbb{F}^{-1}\mathbb{E}^{-1} = (\mathbb{EFE})^\sigma$, bien que $\mathbb{EF}$ ne soit Eulérien que si $\mathbb{F}$ commute avec $\mathbb{E}$.

Dans le cas particulier d'une algèbre graduée $\mathcal{A} = \bigoplus_{i \ge 0} \mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}_{i+j}$, soit σ l'automorphisme envoyant $\sum \mathbb{E}_i$ (avec $\mathbb{E}_i \in \mathcal{A}_i$) sur $\sum (-1)^i \mathbb{E}_i$. Soit de façon encore plus particulière $\mathbb{E} = \sum \mathbb{E}_k$ la matrice d'incidence d'une relation d'ordre graduée, où E_k, $k \ge 0$, est la sous-matrice représentant les arêtes de longueur k. La condition d'Eulérianité se réduit aux conditions

$$(6) \qquad \text{pour tout entier } k \text{ pair}, \quad \mathbb{E}_k \mathbb{E}_0 - \mathbb{E}_{k-1}\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_{k-2}\mathbb{E}_2 - \cdots = 0 \ ,$$

Elle équivaut en ce cas à l'hypothèse que la fonction de Möbius de la relation d'ordre ne prend que les valeurs ± 1 suivant la parité de la hauteur, ou encore que chaque intervalle (non réduit à un élèment) contient autant d'éléments en hauteur paire qu'en hauteur impaire (cf. les exercices de Stanley [S2]). C'est le cas de l'ordre d'Ehresmann sur le groupe symétrique, ainsi que l'a montré Verma [V] :

Lemme 7. *La relation d'ordre d'Ehresmann sur le groupe symétrique est Eulérienne.*

Nous présentons une autre structure Eulérienne sur $\mathfrak{S}(n)$, étendant la structure d'Ehresmann, en interprétant les tableaux de forme une partition fixe I comme des arêtes :

Définition 8. Le I-tableautoëdre (I-tableautoedron) est le graphe ordonné dont les sommets sont les permutations de $\mathfrak{S}(n)$ et les arêtes, les tableaux sur l'alphabet $\{1, \ldots, n\}$ de forme I : un tableau t est une arête entre ν et μ ssi la clef gauche de t est $\mathbf{K}(\nu, I)$ et sa clef droite est $\mathbf{K}(\mu, I)$.

Soit Γ la matrice (graduée) des arêtes du I-tableautoëdre, $\mathbb{E}$ la matrice de l'ordre d'Ehresmann. On notera que $\mathbb{E}$ ne fait intervenir que des tableaux bien particuliers, les clefs, alors que Γ met en jeu tous les tableaux d'une forme donnée, les clefs étant alors des boucles. Comme il ne peut y avoir d'arêtes entre ν et μ que si $\nu \leq \mu$ pour l'ordre d'Ehresmann, la nullité $\mathbb{E}_{\nu\mu} = 0$ implique $\Gamma_{\nu\mu} = 0$. Par réference à la géométrie, disons que I est *très ample* si tous les entiers $1, 2, \ldots, n-1$ sont des parts de I (il est équivalent d'imposer que la partition conjuguée de $I, J = J_1 \ldots J_n$, a toutes ses parts différentes ; en particulier, la part 0 ne peut figurer qu'une fois au plus dans J).

Proposition 9. *La matrice* Γ *des arêtes d'un I-tableautoëdre, I partition très ample, est Eulérienne.*

Preuve. Appelons *chaîne* toute suite des tableaux $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_r$ telle que $\mathbf{K}_+(t_1) \leq \mathbf{K}_-(t_2); \mathbf{K}_+(t_2) \leq \mathbf{K}_-(t_3), \ldots$ et identifions la au mot $t_1 t_2 t_3 \cdots t_r$ dans l'algèbre libre.

Soit, pour toute permutation $\mu, F_{\mu I}(z)$ la fonction génératrice des chaînes inférieures à μ, i.e. la fonction $\sum z^r \; t_1 \cdots t_r$, somme sur toutes les chaînes telles que $\mathbf{K}_+(t_r) \leq \mathbf{K}(\mu, I)$. Dans le cas spécial de la partition $\mathrm{E} = n \ldots 2\ 1$, on montre algèbriquement dans [L-S] que l'image commutative (i.e. dans $\mathbb{Z}[\mathbb{A}, z]$) de $F_{\mu \mathrm{E}}(z)$ est invariante par l'involution $\mathbb{A} \to \mathbb{A}^{-1} = \{1/a_1, 1/a_2, \ldots\}$ & $z \to 1/z$. Identifiant les termes correspondants dans F et son image, on obtient les relations

$$(10) \quad \forall \nu, \mu \; : \; \nu < \mu, \quad \sum (-1)^r t_1 \cdots t_{r+1} \; / \; \mathbf{K}_1 \cdots \mathbf{K}_r$$
$$= \sum \mathbf{K}(\nu, \mathrm{E}) \; \mathbf{K}(\mu, \mathrm{E}) \; / \; t \quad \text{ dans } \mathbb{Z}[\mathbb{A}],$$

la première somme étant sur toutes les chaînes du E-tableautoëdre joignant ν à μ, en notant $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_+(t_1) = \mathbf{K}_-(t_2); \ldots ; \mathbf{K}_r = \mathbf{K}_+(t_r) = \mathbf{K}_-(t_{r+1})$; la deuxiéme somme étant sur les arêtes de ν à μ, i.e. sur les t tels que $\mathbf{K}(\nu, \mathrm{E}) = \mathbf{K}_-(t)$ et $\mathbf{K}_+(t) = \mathbf{K}(\mu, \mathrm{E})$.

En fait, la propriété que $\mathbb{E}$ soit Eulérienne entraine l'élimination des chaînes telles qu'un des t_1 soit une clef. La somme (10) se restreint donc aux chaînes sans boucles, i.e. telles que $\mathbf{K}(\nu, E) = \mathbf{K}_{-}(t_1) < \mathbf{K}_{+}(t_1) = \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{-}(t_2) < \mathbf{K}_{+}(t_2)$ $\ldots$ $\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_{-}(t_{r+1}) < \mathbf{K}_{+}(t_{r+1}) = \mathbf{K}(\mu, E)$.

Utilisant les relations (10) pour les sous-chaînes ayant au moins deux maillons, on transforme (10) en les relations

$$(11) \qquad \forall \nu, \mu \ : \ \nu < \mu, \quad \sum (-1)^h t_1/t_2 = 0 \quad \text{dans} \ \ \mathbb{Z}[\mathbb{A}],$$

somme sur toutes les paires de tableaux : $\mathbf{K}_{-}(t_1) = \mathbf{K}(\nu, \mathrm{E})$; $\mathbf{K}_{+}(t_1) = \mathbf{K}_{-}(t_2)$; $\mathbf{K}_{+}(t_2) = \mathbf{K}(\mu, \mathrm{E})$, h étant la hauteur de la permutation de clef $\mathbf{K}_{+}(t_1)$.

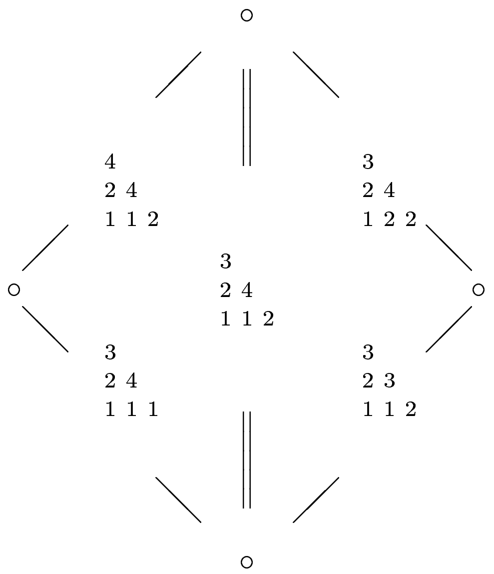
Il convient de noter que la relation (11) est plus symétrique que (10) : ses termes extrémes sont en effet $(-1)^{|\nu|}\mathbf{K}(\nu, \mathrm{E}) \sum 1/t$ et $(-1)^{|\mu|} \sum t/\mathbf{K}(\mu, \mathrm{E})$, somme sur toutes les arêtes t de ν à μ.

La spécialisation $\mathbb{A} \to \{1, \ldots, 1\}$ de la relation (11) donne très exactement l'*entrée* d'indice ν, μ de la matrice $\Gamma_h - \Gamma_{h-1}\Gamma_1 + \Gamma_{h-2}\Gamma_2 - \cdots$ et donc la matrice Γ est Eulérienne, dans le cas de la partition $\mathrm{E} = n \ldots 21$.

On passe du cas de E à celui d'une partition très ample générale à l'aide de techniques sans mystères et sans relations avec l'Eulérianité, que l'on ne trouvera pas ici. $\square$

Exemple 12. L'intervalle $[\nu = 1324, \mu = 2413]$ comprend quatre éléments dont

les clefs sont $\begin{array}{ccc} & \begin{array}{lll} 4 & & \\ 2 & 4 & \\ 1 & 2 & 2 \end{array} & \\ \begin{array}{lll} 4 & & \\ 2 & 4 & \\ 1 & 1 & 1 \end{array} & & \begin{array}{lll} 3 & & \\ 2 & 3 & \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \\ & \begin{array}{lll} 3 & & \\ 2 & 3 & \\ 1 & 1 & 1 \end{array} & \end{array}$ et les arêtes autres que les boucles,



La relation (11) est dans ce cas, en écrivant n pour a_n :

$$323111/324112 - 324111/424112 - 323112/324122 + 324112/424122 = 0.$$

La nullité de la somme (11) cache, ainsi qu'il est fréquent en théorie des tableaux, une propriété plus forte d'annulation (suite exacte d'annulation) : tout terme $(-1)^h t_1/t_2$ s'élimine avec un terme $(-1)^{h+1} t_1'/t_2'$ ou bien un terme $(-1)^{h-1} t_1'/t_2'$.

Les fonctions intéressantes en géométrie sont les quatre séries formelles $\sum z^r (\mathbb{E}\Gamma)^r \mathbb{E} = \bar{\mathcal{H}}_{\leq\leq}$; $\sum z^r (\Gamma\mathbb{E})^r \Gamma = \bar{\mathcal{H}}_{==}$; $\sum z^r (\Gamma\mathbb{E})^r = \bar{\mathcal{H}}_{=\leq}$ et $\sum z^r (\mathbb{E}\Gamma)^r = \bar{\mathcal{H}}_{\leq=}$.

L'entrée $\bar{\mathcal{H}}_{**}(\nu,\mu)$ de chacune de ces matrices est la spécialisation en $\mathbb{A} \to \{1,\ldots,1\}$ de la fonction génératrice $\mathcal{H}_{**}(\nu,\mu)$ des chaînes $t_1 \cdots t_r$ telles que

$$\mathbf{K}_+(t_1) \leq \mathbf{K}_-(t_2);\ \mathbf{K}_+(t_2) \leq \mathbf{K}_-(t_3);\ \ldots;\ \mathbf{K}_+(t_{r-1}) \leq \mathbf{K}_-(t_r)$$

vérifiant de plus les conditions aux bords respectives suivantes

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{K}(\nu,I) \leq \mathbf{K}_-(t_1) & \&\ \ \mathbf{K}_+(t_r) \leq \mathbf{K}(\mu,I) & \text{pour } \mathcal{H}_{\leq\leq}(\nu,\mu),\\
\mathbf{K}(\nu,I) = \mathbf{K}_-(t_1) & \&\ \ \mathbf{K}_+(t_r) = \mathbf{K}(\mu,I) & \text{pour } \mathcal{H}_{==}(\nu,\mu),\\
\mathbf{K}(\nu,I) = \mathbf{K}_-(t_1) & \&\ \ \mathbf{K}_+(t_r) \leq \mathbf{K}(\mu,I) & \text{pour } \mathcal{H}_{=\leq}(\nu,\mu),\\
\mathbf{K}(\nu,I) \leq \mathbf{K}_-(t_1) & \&\ \ \mathbf{K}_+(t_r) = \mathbf{K}(\mu,I) & \text{pour } \mathcal{H}_{\leq=}(\nu,\mu).
\end{array}$$

On sait que, $\mathbb{E}$ et Γ étant Eulériennes, chacune des séries $(\sum z^r \mathbb{E}^r)_{\nu\mu}$ et $(\sum z^r \Gamma^r)_{\nu\mu}$ est invariante (au signe près) par l'échange $r \to -r$.

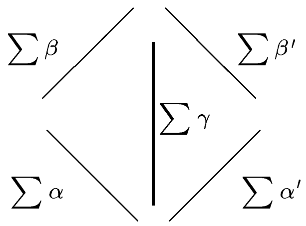
La spécialisation en $\mathbb{A} \to \{1,\ldots,1\}$ de chacune des fonctions $\mathcal{H}_{**}(\nu,\mu)$ est une fraction rationnelle

$$\mathcal{P}_{**}(\nu,\mu;z)/(1-z)^{|\mu|-|\nu|}.$$

La possibilité de composer les structures Eulériennes, ainsi qu'on l'a mentionné ci-dessus, permet d'obtenir les réciprocités suivantes que l'on appelerait Formules de Réciprocité si l'on ne reculait, aprés d'autres auteurs, devant l'abus monstrueux de ce terme (cf. [S1]).

Lemme 13. *$\mathcal{P}_{\leq\leq}(\nu,\mu;z)$ est réciproque de $\mathcal{P}_{==}(\nu,\mu;z)$, i.e est égal á $z^*\mathcal{P}_{==}(\nu,\mu;1/z)$. De même, $\mathcal{P}_{=\leq}(\nu,\mu;z)$ est réciproque de $\mathcal{P}_{\leq=}(\nu\mu;z)$.*

Traitons, par exemple, de manière détaillée le cas de hauteur 2 ($|\mu|-|\nu| = 2$), avec les arêtes :



et l'ordre sur les clefs

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{K}' \arrow[dr] & \\
\mathbf{k} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{k}' \\
 & \mathbf{K} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Les fonctions en cause sont, au facteur $1/(1-z\mathbf{K})(1-z\mathbf{K}')$ près, en décomposant les chaînes en familles suivant les tableaux non clefs qu'elles comportent :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\leq\leq} &= \tfrac{1-z^2\mathbf{k}\mathbf{k}'}{(1-z\mathbf{k})(1-z\mathbf{k}')} + z\sum\gamma + \tfrac{z\sum\alpha+z\sum\beta+z^2\sum\alpha\beta}{1-z\mathbf{k}} \\
&\qquad + \frac{z\sum\alpha' + z\sum\beta' + z^2\sum\alpha'\beta'}{1-z\mathbf{k}'}, \\
\mathcal{H}_{==} &= z^2\mathbf{K}\mathbf{K}'\tfrac{1-z^2\mathbf{k}\mathbf{k}'}{(1-z\mathbf{k})(1-z\mathbf{k}')} + z\sum\gamma + z^2\tfrac{\sum\alpha\mathbf{K}+\mathbf{K}\sum\beta+\sum\alpha\beta}{1-z\mathbf{k}} \\
&\qquad + z^2\frac{\sum\alpha'\mathbf{K} + \mathbf{K}\sum\beta' + \sum\alpha'\beta'}{1-z\mathbf{k}'}, \\
\mathcal{H}_{=\leq} &= z\mathbf{K}\tfrac{1-z^2\mathbf{k}\mathbf{k}'}{(1-z\mathbf{k})(1-z\mathbf{k}')} + z\sum\gamma + \tfrac{z\sum\alpha+z^2\mathbf{K}\sum\beta+z^2\sum\alpha\beta}{1-z\mathbf{k}} \\
&\qquad + \frac{z\sum\alpha' + z^2\mathbf{K}\sum\beta' + z^2\sum\alpha'\beta'}{1-z\mathbf{k}'}, \\
\mathcal{H}_{\leq=} &= z\mathbf{K}'\tfrac{1-z^2\mathbf{k}\mathbf{k}'}{(1-z\mathbf{k})(1-z\mathbf{k}')} + z\sum\gamma + \tfrac{z^2\sum\alpha\mathbf{K}'+z\sum\beta+z^2\sum\alpha\beta}{1-z\mathbf{k}} \\
&\qquad + \frac{z^2\sum\alpha'\mathbf{K}' + z\sum\beta' + z^2\sum\alpha'\beta'}{1-z\mathbf{k}'}.
\end{aligned}$$

On a donc les expressions suivantes des polynômes $\mathcal{P}_{**}$, en notant $|\alpha|$ le cardinal de l'ensemble des arêtes α,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\leq\leq} &= 1 + z + (z-z^2)|\gamma| + z(|\alpha| + |\beta| + |\alpha'| + |\beta'|) + z^2(|\alpha\beta| + |\alpha'\beta'|), \\
\mathcal{P}_{==} &= z^2 + z^3 + (z-z^2)|\gamma| + z^2(|\alpha| + |\beta| + |\alpha'| + |\beta'| + |\alpha\beta| + |\alpha'\beta'|), \\
\mathcal{P}_{=\leq} &= z + z^2 + (z-z^2)|\gamma| + z(|\alpha| + |\alpha'|) + z^2(|\beta| + |\beta'| + |\alpha\beta| + |\alpha'\beta'|), \\
\mathcal{P}_{\leq=} &= z + z^2 + (z-z^2)|\gamma| + z(|\beta| + |\beta'|) + z^2(|\alpha| + |\alpha'| + |\alpha\beta| + |\alpha'\beta'|).
\end{aligned}$$

Sur ces expressions explicites, on voit sans conteste que les propriétés de réciprocité annoncées résultent de la spécialisation $\mathbb{A} \to \{1, \ldots, 1\}$ de la relation (11), i.e. de la relation d'Eulérianité

$$|\gamma| - |\alpha||\beta| - |\alpha'||\beta'| + |\gamma| = 0.$$

References

[G] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, Interscience Pub., 1967.

[L&S1] A. Lascoux & M. P. Schützenberger, *Noncommutative Schubert polynomials* (en Russie) (version précédente : *Caractéres libres)*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **23** (1989), 63–64, traduction anglaise: Funct. Anal. Appl. **23** (1989), 223–225.

[L&S2] A. Lascoux & M. P. Schützenberger, *Keys and Standard Bases*, Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988), IMA Vol. Math. Appl., 19, Springer, New York-Berlin, 1990, pp. 125–144.

[L-S] A. Lascoux, *Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux*, The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progr. Math., 88, Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 1–34.

[M1] I. G. Macdonald, *The volume of a lattice polyhedron*, Proc. Camb. Phil. Soc. **59** (1963), 719-726.

[M1] I. G. Macdonald, *Polynomials associated with finite cell-complexes*, J. Lond. Math. Soc. (2) **4** (1971), 181-192.

[S1] R. Stanley, *Combinatorial Reciprocity Theorems*, Adv. in Math. **14** (1974), 194-253.

[S2] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Wadsworth, Pacific Grove, California, 1986.

[V] D.-N. Verma, *Möbius inversion for the Bruhat ordering on a Weyl group*, Ann. Scient. E.N.S. **4** (1971), 393-398.

L.I.T.P., Université Paris 7, 2 Place Jussieu, 75251 PARIS Ced 05