S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 110–119 (2009) УДК 512.54, 519.17
MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА, В КОТОРОМ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН ЯВЛЯЮТСЯ ТОЧЕЧНЫМИ ГРАФАМИ ЧАСТИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ $pG_2(4,9)$

Н. В. ЧУКСИНА

Abstract. Let Γ be a strongly regular graph with parameters (210,95,40,45). In this work it is obtained possible orders and subgraphs of fixed points automorphisms of Γ in the case, when $[a]$ is a point graph of partial geometry $pG_2(4,9)$ for every vertex a of Γ.

Keywords: strongly regular graph, automorphism, neighborhood of vertices.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Пусть F — семейство графов. Граф Γ называется локально F-графом, если $[a] \in F$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в

Chuksina, N.V., Automorphisms of strongly regular graph, in which neighborhoods of vertices are pseudogeometric graphs for $pG_2(4,9)$.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00009) и РФФИ-БРФФИ (грант 08-01-90006).

Поступила 10 апреля 2009 г., опубликована 15 мая 2009 г.

$[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-подграфом.

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф, с долями порядков $m_1,\dots,m_n$. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Если $m \geq 2$, то граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой. Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a,b\},\{c,d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$m \times n$-решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1,y_1), (x_2,y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин, а через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Частичной геометрией с параметрами (α,s,t) называется система инцидентности, состоящая из точек и прямых, в которой каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (две прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L. *Точечным графом* частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на одной прямой. Через $pG_\alpha(s,t)$ обозначим класс точечных графов частичных геометрий с параметрами (α,s,t). Легко понять, что точечный граф частичной геометрии с параметрами (α,s,t) сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Любой сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых α,s,t называется *псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s,t)$*.

В [1] доказано, что связный вполне регулярный граф, окрестности вершин которого являются псевдогеометрическими графами для $pG_2(4,t)$ либо является графом Тэйлора, либо сильно регулярен с параметрами $(210,95,40,45)$. В [2] найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (210,95,40,45) и определены подграфы их неподвижных точек. В данной работе эти результаты уточняются в случае, когда окрестности вершин являются точечными графами частичной геометрии $pG_2(4,9)$. Для автоморфизма g через $\alpha_i(g)$ обозначим число пар вершин (u,u^g) таких, что $d(u,u^g)=i$.

Теорема 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами с параметрами $(210,95,40,45)$, у которого окрестности вершин являются точечными графами частичной геометрии $pG_2(4,9)$, g — элемент простого порядка p из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,19\}$ и верно одно из утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, и либо $p=2$, $\alpha_1(g)=210$, либо p равно 3 или 5 и 15 делит $\alpha_1(g)$, либо $p=7$ и $\alpha_1(g) \in \{0,105,210\}$;*

(2) *Ω является n-кликой и либо $p=19$, $n=1$ и $\alpha_1(g)=95$, либо $p=3$, $n=3$ или $n=6$, и $\alpha_1(g)$ делится на 15;*

(3) *Ω является m-кокликой, $p=5$, $m \in \{5,10\}$ и $\alpha_1(g)-5m$ делится на 15;*

(4) *Ω является объединением l ($l \geq 2$) изолированных клик порядков $n_1,\dots,n_l$, $p=3$, $n_i \in \{3,6\}$, $|\Omega| \leq 30$, если Ω содержит 6-клику, и $|\Omega| \leq 24$, если Ω не содержит 6-клик;*

(5) *Ω содержит 2-лапу, и либо*

(*i*) *$p=5$, Ω является 5-кокликовым расширением n-угольника, $n \in \{4,\dots,8\}$ или объединением двух изолированных $K_{10,10}$-подграфов, либо* *(ii) $p = 2$, Ω — половинный граф 6-куба или граф без треугольников, причем в последнем случае либо Ω — регулярный граф степени 17 на 54 вершинах, либо $6 \leq |\Omega| \leq 50$.*

Пусть до конца работы Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(210, 95, 40, 45)$, у которого окрестности вершин являются точечными графами частичной геометрии $pG_2(4, 9)$, в частности, сильно регулярны с параметрами (95,40,12,20), g — элемент простого порядка p из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что порядок максимальной клики L в Γ не больше 6, причем в случае $|L| = 6$ точно 180 вершин из $\Gamma - L$ смежны с 3 вершинами из L и точно 24 вершины из $\Gamma - L$ смежны с 0 вершин из L. Если χ_1 — характер, полученный при проектировании на подпространство размерности 133, то по лемме 1.3 из [2] имеем $\chi_1(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/15 - 7$. Через X_i обозначим множество вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω и положим $x_i = |X_i|$.

Лемма 2. *Если Ω — пустой граф, то выполняется одно из утверждений:*
(1) $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 210$*;*
(2) p *равно* 3 *или* 5 *и* 15 *делит* $\alpha_1(g)$*;*
(3) $p = 7$*,* $\alpha_1(g) \in \{0, 105, 210\}$ *и* Γ *не имеет* 7*-кликовых* $\langle g \rangle$*-орбит.*

Доказательство. Так как $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Пусть $p = 2$. Тогда g действует на графе $[u] \cap [u^g]$ для любой вершины $u \in \Gamma$. Если вершины u, u^g не смежны, то g фиксирует вершину графа $[u] \cap [u^g]$, противоречие. Поэтому $\alpha_1(g) = 210$.

Пусть $p = 3$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что 15 делит $\alpha_1(g)$.

Пусть $p = 5$. Снова 15 делит $\alpha_1(g)$.

Пусть $p = 7$. Тогда 7 делит $\alpha_1(g)$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что 105 делит $\alpha_1(g)$. Поэтому $\alpha_1(g) \in \{0, 105, 210\}$ и Γ не имеет 7-кликовых $\langle g \rangle$-орбит. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если Ω является n-кликой, то выполняется одно из утверждений:*
(1) $p = 19$*,* $n = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 95$*;*
(2) $p = 3$*, и либо* $n = 3$*,* $x_0 = 33, x_1 = x_2 = 81, x_3 = 12$ *и* $\alpha_1(g) \in \{0, 15, 30, 45\}$*, либо* $n = 6$*,* $x_0 = 24, x_3 = 180$ *и* $\alpha_1(g)$ *делится на* 15.

Доказательство. Пусть Ω является n-кликой, $a \in \Omega$ и $\Omega_0 = \Omega(a)$. Через X'_i обозначим множество вершин из $[a] - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω_0 и положим $x'_i = |X'_i|$.

По лемме 2.2 из [2] выполняется одно из следующих утверждений:
(1) $p = 19$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 95$;
(2) $p = 2$ и $n \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$, причем в случае $n = 2$ имеем $\alpha_1(g) = 100$;
(3) $p = 3$, $n \in \{3, 6, 9\}$, $\alpha_1(g) \leq x_0 + x_3 + x_6 + x_9$ и $\alpha_1(g)$ делится на 15.

Пусть $p = 2$. Тогда подграф Ω_0 является $(n-1)$-кликой, противоречие с леммой 2.2 из [3].

Пусть $p = 3$. Если $n = 3$, $\Omega = \{a, b, c\}$, то $[a]$ содержит 2-клику из Ω и по лемме 2.2 из [3] имеем $x'_0 = 27, x'_1 = 54, x'_2 = 12$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 15, 30, 45\}$. Значит, $|[a] \cap [b] \cap [c]| = x_3 = 12$, поэтому $x_1 = x_2 = 81$ и $x_0 = 33$. Далее, любая 3-кликовая $\langle g \rangle$-орбита попадает в $X_0 \cup X_3$.

Пусть $n = 6$, $a \in \Omega$. По лемме 2.2 из [3] подграф $[a]$ содержит 5-клику из Ω и 90 вершин из $\Gamma - \Omega$, каждая из которых смежна ровно с двумя вершинами из $\Omega - \{a\}$. Поэтому $x_3 = 180$ и $x_0 = 24$.

Лемма 4. *Пусть Ω является m-кокликой. Тогда $p = 5$ и $m \in \{5, 10\}$.*

Доказательство. Пусть Ω является m-кокликой ($m \geq 2$) и $a \in \Omega$. По теореме из [3] подграф $[a]$ содержит 5-кликовую $\langle g \rangle$-орбиту L. Положим $K = \{a\} \cup L$. Тогда $X_0(K)$ — регулярный граф степени 5 на 24 вершинах, содержащий $\Omega - \{a\}$. Если $|\Omega| \geq 15$, то число ребер между $\Omega - \{a\}$ и $X_0(K) - \Omega$ не меньше $14 \cdot 5$ и некоторая вершина из $X_0(K) - \Omega$ смежна по крайней мере с 7 вершинами из $\Omega - \{a\}$, противоречие. Значит, $|\Omega| \leq 10$.

Лемма 5. *Пусть Ω является объединением m ($m \geq 2$) изолированных клик порядков $n_1, ..., n_m$ и $n_1 \geq 2$. Тогда $p = 3$, $n_i \in \{3, 6\}$, $|\Omega| \leq 30$, если Ω содержит 6-клику, и $|\Omega| \leq 24$, если Ω не содержит 6-клик.*

Доказательство. Если a, c — несмежные вершины из Ω, то g действует на $[a] \cap [c]$, поэтому p делит 45.

Пусть $n_1 \geq 2$ и a, b — смежные вершины из n_1-клики, лежащей в Ω. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^\perp$ и на $[a] \cap [b] - \Omega$, то p делит 54 и $40 - (n_1 - 2)$, поэтому $p = 3$ и n_1 делится на 3. Таким образом, $n_i = 1$ или n_i делится на 3 и число максимальных 1-вершинных клик в Ω кратно 3.

Если вершина c изолирована в Ω, $d \in \Omega - \{c\}$, то g действует полурегулярно на $[c] - d^\perp$ и p делит 50, противоречие.

Пусть $n_1 = 3s$. Тогда $[a]$ содержит $(3s-1)$-клику из Ω, причем по лемме 2.2 из [3] имеем $s = 1$ или $s = 2$.

Допустим, что Ω содержит 6-клику K. Тогда $X_0(K)$ — регулярный граф степени 5 на 24 вершинах, содержащий $\Omega - K$, поэтому $|\Omega| \leq 30$, причем в случае $|\Omega| = 30$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с 15 вершинами из Ω, поэтому $\alpha_1(g) = 0$.

Если же Ω является объединением изолированных 3-клик, то ввиду леммы 1.1 из [2] имеем $|\Omega| \leq 832/31$, поэтому $|\Omega| \leq 24$. Лемма доказана.

До конца работы будем предполагать, что Ω содержит такие две несмежные вершины a, c, что $[a] \cap [c]$ пересекает Ω. По теореме из [2] имеем $p \leq 13$. Пусть $u \in \Gamma - \Omega$. В [2] доказано свойство

($*$) $|\Omega| \leq 100$, если вершины u, u^g смежны, и $|\Omega| \leq 108$, если вершины u, u^g не смежны.

Лемма 6. *Выполняется неравенство $p < 7$.*

Доказательство. Пусть $p \geq 7$ и a, b смежные вершины из Ω. Тогда $[a]$—сильно регулярный граф с параметрами $(95, 40, 12, 20)$ и по леммам 2.6 и 2.7 из [3] подграф $[a]$ не имеет автоморфизмов порядков 13,11,7. Значит, $[a]$ содержится в Ω и из связности графа вытекает, что граф Γ целиком состоит из неподвижных точек, противоречие.

Лемма 7. *Если $p = 5$, и Ω содержит 2-лапу, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *Ω — граф без треугольников, степень каждой вершины в Ω равна $0, 10$ или 15 и $20 \leq |\Omega| \leq 105$;*

(2) *если $a \in \Omega$, то $[a]$ не содержит кликовых $\langle g \rangle$-орбит длины 5;*

(3) *в Ω нет изолированных вершин;*

(4) *если $u \in \Gamma - \Omega$ и орбита $u^{\langle g \rangle}$ является пятиугольником, то u смежна не более чем с 20 вершинами из Ω, если же $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой, то u*

смежна не более чем с 30 *вершинами из* Ω, *и в случае* $|[u] \cap \Omega| = 30$ *имеем* $|\Omega| = 30$.

Доказательство. Пусть $p = 5$ и Ω содержит 2-лапу. Ввиду свойства $(*)$ имеем $|\Gamma - \Omega| = 5t$, $21 \leq t \leq 41$, в частности, $5 \leq |\Omega| \leq 105$. Далее, любое ребро графа Ω лежит в $5i$ треугольниках из Ω $(0 \leq i \leq 8)$, а для двух несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ содержит $5j$ вершин $(0 \leq j \leq 9)$. Заметим, что вершина из Ω смежна с $5s$ вершинами из $\Gamma - \Omega$ (соответственно с $95 - 5s$ вершинами из Ω).

Допустим, что $[a] \subset \Omega$. Тогда $|\Omega| \in \{100, 105\}$. Для вершины b из $\Omega - a^{\perp}$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ содержит 45 вершин. С другой стороны $[b]$ содержит не менее 45 вершин из $\Gamma - \Omega$ и вершина b неподвижна под действием автоморфизма порядка 5. По лемме 2.6 из [3] подграф $\Omega \cap [b]$ является кокликой, противоречие с тем, что размер коклики в $[b]$ не больше 19. Значит, $[a]$ содержит вершины вне Ω. Таким образом, $[a]$—сильно регулярный граф с автоморфизмом порядка 5, и по леммам 2.1 и 2.3 из [3] подграф $\Omega(a)$ либо пуст, либо является m-кокликой, $m \in \{10, 15\}$. Значит, степень любой вершины в Ω равна 0, 10 или 15 и Ω не содержит треугольников. Так как Ω содержит ребро, то $|\Omega| \geq 20$ и $21 \leq t \leq 38$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $a \in \Omega$, и $[a]$ содержит 5-клику $u^{\langle g \rangle}$. Тогда $L = \{a\} \cup u^{\langle g \rangle}$ является 6-кликой и $\Gamma - L$ содержит 180 вершин, смежных с 3 вершинами из L и 24-вершинный подграф Y, вершины которого не смежны с вершинами из L. Ясно, что $\Omega \subseteq Y$, и Y — регулярный подграф степени 5. Противоречие с тем, что тогда Ω является кокликой. Утверждение (2) доказано.

Пусть вершина a изолирована в Ω. По теореме из [3] подграф Ω имеет кликовую $\langle g \rangle$-орбиту, противоречие с утверждением (2). Утверждение (3) доказано.

Пусть $u \in \Gamma - \Omega$. Если орбита $u^{\langle g \rangle}$ является пятиугольником, то u, u^{g^i}, u^{g^j} является геодезическим 2-путем для подходящих i, j, и степень u^{g^i} в графе $[u] \cap [u^{g^j}]$ равна 20, поэтому u смежна не более чем с 20 вершинами из Ω.

Пусть $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой, $U \subset u^{\langle g \rangle}$, $|U| = 3$ и U попадает в окрестности точно β вершин. Тогда Γ содержит $3(45-\beta)$ вершин, смежных с парами вершин из U, $3(5+\beta)$ вершин, смежных точно с одной вершиной из U, и $57-\beta$ вершин, несмежных с вершинами из U. Положим $u^{\langle g \rangle} - U = \{u^{g^i}, u^{g^j}\}$. Если $[u]$ содержит не менее 30 вершин из Ω, то $[u^{g^i}]$ содержит не более 45 вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных с вершинами из U, и не менее 20 вершин, несмежных с вершинами из U. Отсюда $[u^{g^i}] \cap [u^{g^j}]$ содержит 30 вершин из Ω, и 15 вершин, несмежных с вершинами из U. Поэтому $|\Omega| = 30$.

Лемма 8. *Если* $p = 5$, *и* Ω *содержит 2-лапу, то* Ω *является* 5*-кокликовым расширением* n*-угольника,* $n \in \{4, ..., 8\}$ *или объединением двух изолированных* $K_{10,10}$*-подграфов.*

Доказательство. Пусть $p = 5$ и Ω содержит 2-лапу. Покажем, что Ω не содержит вершин степени 15. Пусть $a \in \Omega$, $\Sigma = [a]$ и $|\Sigma \cap \Omega| = 15$. По теореме из [3] Σ содержит 5-коклику $u^{\langle g \rangle}$. Если U является 3-кокликой из $u^{\langle g \rangle}$, то $(X_3(U) \cup X_0(U)) \cap \Sigma$ содержит 2 вершины u^{g^i}, u^{g^j} и 15 вершин из Ω. Поэтому $X_3(U) \cap \Sigma = X_3(u^{\langle g \rangle}) \cap \Sigma$, и $[u^{g^i}] \cap [u^{g^j}]$ не пересекает $(X_1(U) \cup X_2(U)) \cap \Sigma$. Противоречие с тем, что $|\Sigma(u^{g^i}) \cap [u^{g^j}]| \leq 15$.

Значит, Ω — регулярный граф степени 10. Ввиду леммы 1.1 из [2] имеем $15 \le \Omega \le 40$, причем в случае $|\Omega| = 40$, каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с 20 вершинами из Ω и $\alpha_1(g) \ne 0$.

Пусть $a \in \Omega$, M_i — множество вершин из $\Omega(a)$, имеющих степень $5i$ в графе Ω, $m_i = |M_i|$, N_j — множество вершин из $\Omega - a^\perp$, смежных точно с $5j$ вершинами из $\Omega(a)$, $n_j = |N_j|$.

Если $|\Omega| = 20$, то $\Omega = K_{10,10}$, в частности, Ω является 5-кокликовым расширением четырехугольника.

Пусть $|\Omega| = 25$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 185$ и $\alpha_1(g)$ сравнимо с 5 по модулю 15. Далее, $m_2 = 10$, $n_0 + n_1 + n_2 = 14$, $n_1 + 2n_2 = 18$ и $n_0 \le 5$. Любая вершина из N_2 смежна со всеми вершинами из $\Omega(a)$ и не смежна ни с одной вершиной из $\Omega - a^\perp$, $n_2 \ge 4$, поэтому $5 \le n_0 + n_1 \le 10$. Если N_0 содержит неизолированную вершину c, то $\Omega(c) \subset N_0 \cup N_1$ и степень этой вершины в Ω меньше 10, противоречие. Значит, N_0 содержит только изолированные в Ω вершины, поэтому $n_0 = 0, n_2 = 4$ и $n_1 = 10$. Далее, N_1 является полным двудольным графом $K_{5,5}$, причем каждая из долей смежна с 5 вершинами из $\Omega(a)$. В этом случае Ω является 5-кокликовым расширением пятиугольника.

Пусть $|\Omega| = 30$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 180$ и $\alpha_1(g)$ делится на 15. Так как Ω — регулярный граф степени 10, то $n_0 + n_1 + n_2 = 19$, $n_1 + 2n_2 = 18$ и $n_0 = n_2 + 1$. Далее, окрестность в Ω вершины из N_0 содержится в $N_0 \cup N_1$, поэтому $n_0 + n_1 \ge 11$ и $n_1 \ge 2$. Если N_1 содержит ребро $\{b, b'\}$, то $\Omega(a)$ содержит по 5 вершин из $[b], [b']$ и N_1 содержит $K_{5,5}$-подграф. Если $n_1 = 10$, то $n_0 = 5, n_2 = 4$ и окрестность в Ω вершины из N_0 содержит ребро из N_1. Если $n_1 > 10$, то окрестность в Ω некоторой вершины из N_1 содержит 5 вершин из N_0, поэтому $n_0 \ge 5, n_2 \ge 4$, противоречие. Значит, N_1 — коклика. Теперь число ребер между N_0 и N_1 равно $5(18 - 2n_2)$ и заключено между $5(n_2 + 1)$ и $10(n_2 + 1)$, поэтому $n_2 \in \{4, 5\}$. Если $n_2 = 4$, то $n_1 = 10, n_0 = 5$ и Ω — кокликовое расширение шестиугольника. Если $n_2 = 5$, то $n_1 = 8, n_0 = 6$ и $\Omega(a) \cup N_1$ — объединение двух изолированных $K_{4,5}$-подграфов. Поэтому вершины из N_1 смежны с одной и той же пятеркой вершин из N_0. Противоречие с тем, что Ω не содержит изолированных вершин.

Пусть $|\Omega| = 35$. Тогда $n_0 + n_1 + n_2 = 24$, $n_1 + 2n_2 = 18$ и $n_0 = n_2 + 6$. Далее, окрестность в Ω вершины из N_0 содержится в $N_0 \cup N_1$. В случае $n_2 \ge 5$ для любых двух вершин $c_1, c_2 \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(c_1) \cap [c_2]$ содержит a, n_2 вершин из N_2 и $9 - n_2$ вершин из N_1, в частности, $\Omega(c_1) = \Omega(c_2)$. Противоречие с тем, что Ω содержит $K_{10,10}$-подграф и связную компоненту, содержащую не более 15 вершин. Если $n_2 = 4$, то $n_0 = n_1 = 10$, и Ω — кокликовое расширение семиугольника.

Пусть $n_2 \le 3$. Если N_1 содержит ребро, то N_1 содержит $K_{5,5}$-подграф Δ, доли которого смежны с непересекающимися пятерками вершин из $\Omega(a)$. В этом случае $N_1 - \Delta$ является кокликой, вершины которой смежны с 5 вершинами из N_0. Противоречие с тем, что для вершин $b \in N_1 - \Delta$, $c \in \Omega(a) \cap [b]$, $e \in N_0 \cap [b]$ получим $|\Omega(c) \cap [e]| \le 4 - n_2$.

Значит, N_1 — коклика. Теперь число ребер между N_0 и N_1 равно $5(18 - 2n_2)$ и заключено между $5(n_2 + 6)$ и $10(n_2 + 6)$, поэтому $n_2 \in \{2, 3, 4\}$. Пусть x пар вершин из $\Omega(a)$ имеют $4 - n_2$ соседей в N_1. Тогда $(4 - n_2)x + (45 - x)(9 - n_2) = 10n_1$. Пусть γ — максимальное число вершин $c_1, ..., c_\gamma$ в $\Omega(a)$, имеющих одинаковые окрестности в Ω.

Если $n_2 = 3$, то $n_1 = 12, x = 30$, поэтому $\gamma \geq 3$. Но в случае $\gamma = 3$ число ребер между $N_1 \cap [c_1]$ и $\Omega(a) - \{c_1, ..., c_3\}$ равно 7 и равно $6 \cdot 2$, противоречие. Значит, $\gamma = 4$ и в $\Omega(a) - \{c_1, ..., c_4\}$ имеется 9 пар вершин, имеющих одинаковые окрестности в Ω. Поэтому в $\Omega(a) - \{c_1, ..., c_4\}$ найдется четверка вершин $d_1, ..., d_4$, имеющих одинаковые окрестности в Ω. Противоречие с тем, что число пар вершин в $\Omega(a)$, имеющих одинаковые окрестности в Ω, не больше 13.

Если $n_2 = 2$, то $n_1 = 14, x = 35$, поэтому $\gamma \geq 2$. Но в случае $\gamma = 2$ число ребер между $N_1 \cap [c_1]$ и $\Omega(a) - \{c_1, ..., c_3\}$ равно 16 и равно $7 \cdot 3$, противоречие. Значит, $\gamma = 3$ и в $\Omega(a) - \{c_1, ..., c_3\}$ имеется 7 пар вершин, имеющих одинаковые окрестности в Ω. Поэтому в $\Omega(a) - \{c_1, ..., c_3\}$ найдется тройка вершин $d_1, ..., d_3$, имеющих одинаковые окрестности в Ω. Заметим, что $[c_1] \cap N_1$ не пересекает $[d_1]$. Противоречие с тем, что вершина из $\Omega(a) - \{c_1, ..., c_3, d_1, ..., d_3\}$ смежна с 4 вершинами из N_1.

Пусть $|\Omega| = 40$. Тогда $n_0 + n_1 + n_2 = 29$, $n_1 + 2n_2 = 18$ и $n_0 = n_2 + 11$. Далее, окрестность в Ω вершины из N_0 содержится в $N_0 \cup N_1$. В случае $n_2 \geq 5$ для любых двух вершин $c_1, c_2 \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(c_1) \cap [c_2]$ содержит a, n_2 вершин из N_2 и $9 - n_2$ вершин из N_1, в частности, $\Omega(c_1) = \Omega(c_2)$. Поэтому Ω является объединением двух изолированных $K_{10,10}$-подграфов.

Если $n_2 = 4$, то $n_0 = 15, n_1 = 10$, N_1 разбивается двумя пятерками вершин, смежных с непересекающимися пятерками вершин из $\Omega(a)$ и либо с непересекающимися пятерками вершин из N_0, либо с общей пятеркой вершин из N_0. Но в последнем случае Ω имеет связную компоненту, содержащую не более 10 вершин, противоречие. В первом случае Ω — кокликовое расширение восьмиугольника.

Пусть $n_2 \leq 3$. Если N_1 содержит ребро, то противоречие получим как и в случае $|\Omega| = 35$. Значит, N_1 — коклика. Теперь число ребер между N_0 и N_1 равно $5(18 - 2n_2)$. Пусть x пар вершин из $\Omega(a)$ имеют $4 - n_2$ соседей в N_1. Тогда $(4-n_2)x+(45-x)(9-n_2) = 10n_1$. Пусть γ — максимальное число вершин $c_1, ..., c_\gamma$ в $\Omega(a)$, имеющих одинаковые окрестности в Ω.

Как и в случае $|\Omega| = 35$ доказывается, что равенства $n_2 = 2$ и $n_2 = 3$ невозможны.

Если $n_2 = 1$, то $n_1 = 16, n_0 = 12, x = 40$, поэтому $\gamma = 2$ и $\Omega(a)$ разбивается пятью парами вершин, имеющих одинаковые окрестности в Ω. Противоречие с тем, что вершина из N_1 смежна с четным числом вершин из $\Omega(a)$.

Значит, $n_2 = 0$, $n_1 = 18, n_0 = 11, x = 45$, поэтому $(\Omega(a), N_1)$ является $2-(10,5,4)$-схемой. Для вершин $b \in N_1$, $c \in \Omega(a) \cap [b]$, $e \in N_0 \cap [b]$ получим $|\Omega(c) \cap [e]| = 5$, в частности, $[c] \cap N_1 \subset [e]$. Пусть $c' \in \Omega(a) - \{c\}$. Тогда $[c] \cap [c']$ содержит 4 вершины из N_1 и $[c'] \cap N_1 \subset [e]$. Противоречие с тем, что тогда степень вершины e в графе Ω не меньше 18.

Лемма 9. *Если $p < 5$, и Ω содержит 2-лапу, то $p = 2$ и Ω — половинный граф 6-куба или граф без треугольников.*

Доказательство. Пусть $p < 5$ и Ω содержит 2-лапу с центром a. Если $\Omega(a)$ не содержит 2-лап, то по теореме из [3] либо

а) Ω является n-кликой, $p = 3$, либо

б) Ω является m-кокликой, $p = 2$, m нечетно и $m \leq 17$.

Если же $\Omega(a)$ содержит 2-лапу, то по лемме 3.1 из [3] имеем $p = 2$, $\alpha_1(g) > 0$ и выполняется одно из утверждений:

(1) $\Omega(a)$ — точечный граф частичной геометрии $pG_2(4,1)$ и каждая вершина из $[a]-\Omega$ смежна точно с 6 вершинами из $\Omega(a)$;

(2) $\Omega(a)$ — объединение изолированного октаэдра Σ и коклики , $|C| \in \{1,3,5\}$.

Итак, в случае $p=3$ подграф Ω является объединением изолированных клик, противоречие. Значит, $p=2$.

Если $\Omega(a)$ — точечный граф частичной геометрии $pG_2(4,1)$, то по связности графа Ω окрестность любой вершины из Ω — точечный граф частичной геометрии $pG_2(4,1)$ (т.е. треугольный граф $T(6)$). По замечанию после леммы 4.3.10 из [4] граф Ω является половинным 6-кубом. В этом случае выполняется утверждение (1).

Допустим, что Ω содержит 4-клику, но не содержит 5-клик. Тогда $\Omega(y)$ — объединение изолированного октаэдра Σ_y и коклики C_y, $|C_y| \in \{1,3,5\}$ для любой вершины y, лежащей в треугольнике из Ω. Любая грань октаэдра дополняется в $[y]$ до 5-клики ребром $\{u,u^g\}$ и $C_y \subset [u]\cap[u^g]$.

Пусть Ω_0 состоит из вершин, лежащих в треугольниках из Ω, и две вершины из Ω_0 смежны, если они лежат в треугольнике из Ω. Тогда связная компонента Δ графа Ω_0 изоморфна $K_{4\times 2}$. Пусть $\Delta=\{a,c,d,e,a',c',d',e'\}$, где x' — антипод вершины x в графе Δ. Тогда $[a]\cap[a']$ содержит октаэдр из Δ и нечетное число вершин из $\Omega-\Delta$.

Положим $Y_i = X_i(\Delta)\cap\Omega$. Тогда вершина f из Y_2 имеет нечетное число соседей с любой вершиной из $\Delta-[f]$, поэтому f смежна с нечетным числом вершин из Y_2 и с четным числом вершин из Y_1. Вершина p из $Y_1\cap[a]$ имеет нечетное число соседей в $Y_1\cap[a']$. Далее, p смежна с четным числом вершин из $[x]-\Delta$ для любого $x\in\Delta-\{a,a'\}$, поэтому p смежна с нечетным числом вершин из Y_2 и с нечетным числом вершин из Y_1.

Допустим, что каждая прямая из $[a]\cap c^{\perp}$ пересекает $\{d,d',e,e'\}$ не более чем по одной точке. Тогда число g-инвариантных прямых из $[a]\cap c^{\perp}$ нечетно, противоречие. Поэтому можно считать, что прямая L из $[a]\cap c^{\perp}$ содержит c,d,e и ребро $\{u,u^g\}$. Заметим, что каждая 6-клика из $u^{\perp}\cap(u^g)^{\perp}$, отличная от $L\cup\{a\}$, пересекает Ω не более чем по одной точке (иначе пересечение этой клики с ее образом под действием g содержит не менее 4 точек). Поэтому проходящая через a прямая M из $[u^g]\cap u^{\perp}$ переходит в прямую M^g из $[u]\cap(u^g)^{\perp}$, в частности, степень a в графе $[u]\cap\Omega$ равна 4 или 6. Если степень a в графе $[u]\cap\Omega$ равна 6, то степень x в графе $[u]\cap\Omega$ равна 4 для любой вершины $x\in\{c,d,e\}$. Положим $[x]\cap[x']-\Delta=\{f_x\}$. Тогда подграф $\{f,f_c,f_d,f_e\}$ является 4-кликой ($[f_c]\cap\Omega(d)$ содержит c,c' и вершину f_d). Противоречие с тем, что вершина a' смежна с единственной вершиной 6-клики $\{u,u^g,f,f_c,f_d,f_e\}$.

Лемма 10. *Если $p=2$, Ω содержит 2-лапу, но не содержит треугольников, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *если вершина a из Ω смежна с вершиной u из $\Gamma-\Omega$, то $|[u]\cap\Omega|\le 10$ и $|[u]\cap\Omega(a)|\le 6$ в случае, когда вершины u,u^g смежны; $|[u]\cap\Omega|\le 27$ и $|[u]\cap\Omega(a)|\le 10$ в случае, когда вершины u, u^g не смежны;*

(2) $|\Omega|\le 54-17\alpha_1(g)/105$ *и если $\Omega(a)$ не содержит вершин u, смежных с u^g, то $|\Omega(a)|\in\{5,11,17\}$;*

(3) *либо Ω — регулярный граф степени 17 на 54 вершинах, либо $6\le|\Omega|\le 50$.*

Доказательство. Пусть Ω содержит 2-лапу, но не содержит треугольников.

Допустим, что вершина a из Ω смежна с вершиной u из $\Gamma-\Omega$. Если вершины u, u^g смежны, то каждая прямая из $[u]\cap u^\perp$ пересекает Ω не более чем по одной точке, иначе две 6-клики из Γ пересекаются по 4 точкам. Поэтому $|[u]\cap\Omega|\le 10$ и $|[u]\cap\Omega(a)|\le 6$.

Пусть вершина u, u^g не смежны. Тогда каждая прямая из $[a]\cap u^\perp$ пересекает Ω не более чем по одной точке, поэтому $|[u]\cap\Omega(a)|\le 10$ и $[a]-\Omega$ содержит не менее 10 вершин из $[u]\cap[u^g]$. В случае $|[u]\cap\Omega|\ge 31$ число ребер между $[u]\cap[u^g]-\Omega$ и $[u]\cap\Omega$ не меньше $31\cdot 10$, но не больше $14\cdot 20$, противоречие.

Допустим, что $|[u]\cap\Omega|=29$. Пусть $w\in[u]\cap[u^g]-\Omega$, $Z_i=X_i(\{u,u^g,w,w^g\})$ и $z_i=|Z_i|$.

Если вершина w из $[u]\cap[u^g]-\Omega$ смежна с 20 вершинами из $[u]\cap\Omega$, то $z_0=20, z_1=40, z_2=126, z_3=0, z_4=20$. Пусть $a\in\Omega\cap[u]\cap[w]$, $Z_i'=Z_i\cap[a]$. Тогда $z_2'=4(12-z_4')+2(18-z_4')=84-6z_4'$, $z_1'=4(93-z_4'-(18-z_4')-2(12-z_4'))=205+8z_4'$, $z_0'=210-z_4'-(205+8z_4')-(84-6z_4')=89-3z_4'$, противоречие с тем, что $z_4'\ge 23$. Пусть β вершин из $[u]\cap[u^g]-\Omega$ смежны с 19 вершинами из $[u]\cap\Omega$. Тогда число ребер между $[u]\cap[u^g]-\Omega$ и $[u]\cap\Omega$ не меньше $29\cdot 10$, но не больше $19\beta+18(16-\beta)$, поэтому $\beta\ge 2$.

Если вершина w из $[u]\cap[u^g]-\Omega$ смежна точно с 19 вершинами из $[u]\cap\Omega$, то получим $z_0=15, z_1=52, z_2=120, z_3=4, z_4=19$. Пусть $a\in\Omega\cap[u]\cap[w]$, $Z_i'=Z_i\cap[a]$. Если $z_3'=0$, то как и выше $z_2'=84-6z_4'$, $z_1'=205+8z_4'$, $z_0'=89-3z_4'$, противоречие с тем, что $z_4'\ge 24$. Если $z_3'=4$, то $z_2'=4(10-z_4')+2(16-z_4')=72-6z_4'$, $z_1'=4(90-z_4'-(16-z_4')-2(10-z_4'))=216+8z_4'$, противоречие. В случаях $0<z_3'<4$ получается аналогичное противоречие. Утверждение (1) доказано.

Теперь число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ не меньше $78|\Omega|$, но не больше $10\alpha_1(g)+27(210-|\Omega|-\alpha_1(g))$, поэтому $105|\Omega|\le 210\cdot 27-17\alpha_1(g)$ и $|\Omega|\le 54-17\alpha_1(g)/105$. Если граф $\Omega(a)$ не содержит вершин u, смежных с u^g, то ввиду теоремы из [3] имеем $|\Omega(a)|\in\{5,11,17\}$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $|\Omega|=54$. Тогда $\alpha_1(g)=0$, Ω — регулярный граф степени 17, каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с 27 вершинами из Ω и выполняется утверждение (3).

Допустим, что $|\Omega|=52$. Тогда $\alpha_1(g)+10$ делится на 30, поэтому $\alpha_1(g)\ge 20$ и по утверждению (2) $|\Omega|\le 54-340/105$, противоречие. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Список литературы

[1] Махнев А.А., *О графах, окрестности вершин которых сильно регулярны с $k=2\mu$*, Матем. сборник, **191**:7 (2000), 89–104.

[2] Махнев А.А., *Чуксина Н.В. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (210,95,40,45)*, VII Международная школа конференция по теории групп 2008, Информ. материалы, Изд-во ЮУрГУ, 78–79.

[3] Махнев А.А., Чуксина Н.В., *Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (95,40,12,20)*, Труды 40-й Всеросс. молод. конф. Изд-во ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2009, 46–47.

[4] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. , *Distance-regular graphs*, Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.

Наталия Владимировна Чуксина
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Ковалевской 16,
620219, Екатеринбург, Россия
E-mail address: natalia$_1$@e1.ru