S©MR ISSN

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. A.11–A.17 (2009) УДК 517, 515.16
MSC 58-02

ОТЗЫВ ОППОНЕНТА О ДИССЕРТАЦИИ И.А. ШВЕДОВА “ПРОБЛЕМЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ”

Н.Н. ТАРХАНОВ

Уважаемые господа!

Диссертация И. А. Шведова посвящена очень деликатному анализу на римановых многообразиях с особенностями, который является частью анализа на стратифицированных многообразиях.

Теория гомологий была основана Риманом, Бетти и, наконец, Пуанкаре в конце 19-го столетия. В то время алгебраическая топология (называемая “analysis situs”), по словам Лефшеца, “находилась в стадии своего становления”.

В 1956 году Том доказал, что множества особенностей определенных гладких отображений общего положения $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ являются “комплексами многообразий” в смысле Уитни (1946). Термин “стратификация” был окончательно закреплен в 1969 году Томом.

В 1973 году Хиронака доказал, что субаналитические множества могут быть стратифицированы по Уитни. Согласно Горески (1978), стратифицированные по Уитни множества, в свою очередь, триангулируемы. Парусинский (1994) показал, что каждое субаналитическое множество на самом деле обладает липшицевой стратификацией.

В 1988 году Горески и Макферсон разработали гомологии пересечения для псевдомногообразий. Они получили для групп гомологий пересечения теорему

Tarkhanov, N.N., A referee report on the Dr.Sc. dissertation “Problems of calculus of differential forms on Riemannian manifolds” by I.A. Shvedov.

Поступила 31 марта 2009 г., опубликована 6 мая 2009 г.

Защита диссертации И.А. Шведова, представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 (математический анализ) состоялась 5 декабря 2008 г.

двойственности Пуанкаре, которая, вообще говоря, неверна для сингулярных гомологий стратифицированных пространств.

Изучение геометрии и анализа на стратифицированных пространствах началось в шестидесятых. В 1967 году Кондратьев опубликовал свою ставшую уже классической статью об эллиптических граничных задачах в областях $\mathbf{R}^n$ с коническими точками на границе. Хотя много работы, касающейся конкретных задач, было уже сделано другими авторами, он первым исследовал этот вопрос систематично.

Работа Кондратьева положила начало многочисленным статьям о граничных задачах для эллиптических уравнений в областях с различными особенностями на границе. Мазья и Пламеневский (1977) подвели итог изучению такого рода задач, доказав свойство фредгольмовости для эллиптических граничных задач в областях с гладкими ребрами на границе, которые пересекаются под ненулевым углом. Однако эффективная характеризация свойства фредгольмовости в случае особенностей более высоких размерностей отсутствует до сих пор.

В 1970 году Зингер представил всестороннюю программу, направленную на распространение теории эллиптических операторов и их индекса на более общую ситуацию: на "негладкие многообразия, на немногообразия специального типа и на ситуацию, где целое число (индекс) может быть заменено вещественным". Следуя этой программе, Телеман (1983) создал теорию Ходжа на липшицевых многообразиях. Интерес к изучению липшицевых многообразий возникает ввиду следущих двух желаемых, но не совсем сочетающихся свойств липшицевых гомеоморфизмов в $\mathbf{R}^n$: они сохраняют богатую аналитическую структуру, в то время как с топологической точки зрения с этими многообразиями легко работать. Сулливан (1979) показал, что всякое топологическое многообразие размерности $\neq 4$ допускает липшицеву структуру, которая единственна с точностью до липшицева гомеоморфизма, близкого к тождественному.

В конце 70-х годов анализ вблизи конических особенностей стал более "геометрическим". Начало этому было положено в статье Атьи, Патоди и Зингера (1975). Они отождествили сигнатуру компактного многообразия с краем с индексом подходящей граничной задачи для оператора сигнатуры. Трудности в этой программе состоят в том, что существуют топологические препятствия для существования эллиптических граничных задач и эти препятствия ненулевые для оператора сигнатуры.

По этой причине Атья и др. должны были расширить классические (или локальные) краевые условия до глобальных. При этих глобальных условиях, однако, имеется хорошая фредгольмова теория и, в частности, конечный индекс. Для того, чтобы объяснить этот результат, удобно ввести некомпактное многообразие, полученное приклеиванием полубесконечного цилиндра $(-\infty, 0] \times Y$ к границе Y. Замена переменных $(t, y) \mapsto (e^t, y)$ отождествляет полуцилиндр $(-\infty, 0] \times Y$ с проколотым топологическим конусом над Y.

Теория оператора Лапласа на гладких многообразиях была распространена на определенные римановы пространства с (главным образом, коническими) особенностями Чигером (1983). Он сосредоточился на L^2-пространствах, методах уравнения теплопроводности и приложениях к теореме об индексе для характеристики Эйлера и комплекса сигнатуры.

При замене переменных $r = e^t$ производная ∂_t переходит в производную типа Фукса $r\partial_r$. Последняя неожиданно оказывается касательной к границе Y, соответствующей $r = 0$. Поэтому исчисление вполне характеристических псевдодифференциальных операторов на многообразиях с краем, развитое Мелрозом (1981), было фактически предвосхищено Кондратьевым (1967).

Основной успех в изучении краевых задач для уравнений второго порядка в областях с липшицевой границей был достигнут в 80-е годы. Он был инициирован статьей Калдерона (1977), который доказал L^2 ограниченность интеграла Коши на C^1 и липшицевых кривых. Кроме того, другим замечательным продвижением было изучение лапласиана с краевыми условиями Дирихле или Неймана на кусочно-гладких и липшицевых областях Верхотой (1984), Далбергом и Кенигом (1987) и др. С начала 90-х годов с этой точки зрения рассмотрено очень немного новых эллиптических краевых задач, такими проблемами главным образом занимались М. С. Агранович и школа А. Мэкинтоша. Развитием в этом направлении также является результат, связанный с задачей Неймана для оператора Ходжа-Лапласа $\Delta = \delta d + d\delta$ в произвольных липшицевых областях, полученный Д. Митреа, М. Митреа и Тейлором (1999).

Исследования И. А. Шведова внесли значительный вклад в современное развитие анализа на липшицевых многообразиях. Их основное значение состоит в том, что они содержат как глубокое развитие абстрактной теории, так и тонкие вычисления для искривленных произведений, которые проделаны для многообразий с коническими или каспидальными точками. Для того, чтобы продемонстрировать это, остановимся подробнее на содержании диссертации.

Глава 1 посвящена исчислению дифференциальных форм соболевского типа. Задано риманово многообразие M, пусть $L^p(M, \Lambda^k)$ обозначает пространство всех k-форм, модуль которых лежит в $L^p(M)$. Введем пространство $W^{p,q}(M, \Lambda^k)$, состоящее из всех $\omega \in L^p(M, \Lambda^k)$ с тем свойством, что $d\omega \in L^q(M, \Lambda^{k+1})$. Если $q = p$, мы пишем просто $W^p(M, \Lambda^k)$. Под L^p и $W^{p,q}$ мы понимаем соответствующие локальные пространства дифференциальных форм. Эти пространства хорошо определены и на всяком липшицевом римановом многообразии. В § 1.1 автор описывает естественный топологический изоморфизм между W^∞ и пространством локально плоских форм, введенным Уитни (1960).

В § 1.2 доказан аналог теоремы вложения Соболева для форм в $W^{p,q}$. Роль значений функции в точках $\mathbf{R}^n$ играют интегралы

$$\int_S \omega$$

от k-форм ω по ориентированной k-мерной поверхности S в $\mathbf{R}^n$. Получено интегральное представление для интеграла от дифференциальной формы по k-мерной поверхности в римановом многообразии. Для $k = 0$ это представление есть не что иное, как хорошо знакомая интегральная формула Соболева для интегрируемых функций.

В главе 2 речь идет об изоморфизме де Рама для L^p-когомологий. Классическая теорема де Рама устанавливает изоморфизм между сингулярными когомологиями многообразия M и когомологиями комплекса дифференциальных форм на M. В этой главе такой изоморфизм построен в случае комплекса L^p-форм. Точнее говоря, когомологии коцепного комплекса $\{W^p(M, \Lambda^k), d\}$

называются L^p-когомологии M и обозначаются через $H^{\cdot}(W^p(M,\Lambda^{\cdot}))$. С другой стороны, всякой триангуляции K многообразия M соответствует последовательность пространств коцепей $C^k_{\ell^p}(K)$, снабженная кограничным оператором $\delta\colon C^k_{\ell^p}(K)\to C^{k+1}_{\ell^p}(K)$. Когомологии этого комплекса обозначаются через $H^{\cdot}_{\ell^p}(K)$. Автор находит условия на триангуляцию K, при которых имеет место изоморфизм топологических векторных пространств $H^{\cdot}(W^p(M,\Lambda^{\cdot}))$ и $H^{\cdot}_{\ell^p}(K)$. Обратим внимание, что для случая редуцированных когомологий и $p=2$ наличие этого изоморфизма доказал Доджик (1979), он использовал дополнительные предположения о кривизне многообразия M.

Глава 3 включает в себя обсуждение L^p-когомологий римановых многообразий. L^p-когомологии компактного гладкого многообразия M не зависят от p и совпадают с обычными когомологиями $H^{\cdot}(M,\mathbf{R})$. Для некомпактного многообразия L^p-когомологии могут зависеть от p. L^2-когомологии многообразий с коническими особенностями подробно изучались Чигером (1980).

В § 3.1 зависимость от p исследуется для конуса над компактным римановым многообразием $\mathcal{X}$. Более того, автор указывает подкомплексы комплекса $W^p(\mathcal{X},\Lambda^{\cdot})$, связанные с различными краевыми задачами для комплекса де Рама на конусе, интерпретируя таким образом результаты Кодаиры (1949), Даффа и Спенсера (1952), Дезина (1962).

В § 3.2 и § 3.3 автор продолжает изучение L^p-когомологий цилиндра $M=[0,1)\times\mathcal{X}$, наделенного римановой метрикой искривленного произведения $ds^2=dr^2+f^2(r)dx^2$, где dx^2 – риманова метрика на $\mathcal{X}$. В случае $p=2$ этот вопрос рассматривали Доджик (1979) и Мюллер (1983).

Результат Соболева (1963) о плотности гладких функций с компактным носителем в пространстве $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ может быть переформулирован в виде $\bar{H}^1(W^p(\mathbf{R}^n,\Lambda^{\cdot}))=0$. Результаты Масленниковой и Богословского (1983) об аппроксимации соленоидальных векторных полей соленоидальными векторными полями с компактным носителем могут быть интерпретированы в терминах L^p-когомологий. В § 3.2 описаны редуцированные L^p-когомологии искривленных произведений. Эти результаты обобщают результат Доджика (1979) для римановых многообразий, симметричных относительно вращения, и $p=2$ на произвольные p.

Для компактного многообразия M гармонические k-формы представляют когомологии M на шаге k. В 1976 году Атья предложил описывать редуцированные L^2-когомологии некомпактного многообразия M с помощью гармонических L^2-форм. Чигер (1980) установил, что L^2-когомологии компактного псевдомногообразия отделимы, т.е. совпадают с редуцированными L^2-когомологиями. В общем случае аддиционные методы не работают при вычислении редуцированных когомологий, ибо соответствующие когомологические последовательности не точны. В § 3.4 разрабатывается подход, позволяющий преодолеть эти трудности.

В главе 4 автор представляет свои результаты о нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования. Замкнутый оператор $A\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ в банаховых пространствах нызывается нормально (соответственно компактно) разрешимым, если “обратный” оператор из $\operatorname{im}A$ в $\operatorname{dom}A/\ker A$

является непрерывным (соответственно компактным). В частности, нормальная разрешимость оператора A эквивалентна замкнутости образа A. Следовательно, L^p-когомологии $H^k(W^p(M,\Lambda^\cdot))$ совпадают с редуцированными L^p-когомологиями $\bar{H}^k(W^p(M,\Lambda^\cdot))$ тогда и только тогда, когда $d\colon L^p(M,\Lambda^{k-1}) \to L^p(M,\Lambda^k)$ нормально разрешим.

В § 4.1 оператор d имеет область определения $\mathcal{B}$, состоящую из всех $\omega \in W^p(M,\Lambda^k)$, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Выведены условия для нормальной и компактной разрешимости соответствующего оператора $d_{\mathcal{B}}$. Для компактного многообразия M задача сводится на воротниковую окрестность границы, т.е. на цилиндр $I \times \partial M$. Автор приводит примеры граничных условий $\mathcal{B}$ на произвольном компактном многообразии, при которых оператор $d_{\mathcal{B}}$ не является нормально разрешимым, и примеры граничных условий $\mathcal{B}$, при которых оператор $d_{\mathcal{B}}$ нормально разрешим, но не компактно разрешим. Подобные задачи обсуждали Беркин (1975), Сакс (1983), Телеман (1983), Хилсум (1985) и другие. В § 4.2 и § 4.3 найдены как необходимые, так и достаточные условия для нормальной разрешимости d на искривленном цилиндре.

Глава 5 представляет некоторые результаты об аппроксимации дифференциальными формами с компактным носителем. Из результатов Соболева (1963) следует, что всякое потенциальное векторное поле на $\mathbf{R}^n$ может быть аппроксимировано градиентами функций с компактным носителем. Хейвуд (1976) доказал, что каждое соленоидальное векторное поле на $\mathbf{R}^n$ может быть приближено соленоидальными векторными полями с компактным носителем. Заметим, что потенциальные векторные поля представляют собой точные дифференциальные формы степени 1, а соленоидальные векторные поля могут быть интерпретированы как замкнутые дифференциальные формы степени $n-1$. Автор решает ряд задач аппроксимации типа Соболева и Хейвуда для дифференциальных форм степени k на многообразиях с цилиндрическими концами.

В § 5.1 изучается задача приближения замкнутых дифференциальных форм формами с компактным носителем в L^p-норме на римановых многообразиях. В § 5.2 получены условия на дифференциальную форму ω, которые гарантируют принадлежность ω замыканию пространства всех форм с компактным носителем. Полученные результаты обобщают работы Гаффни (1951) и Чигера (1980). Для искривленного цилиндра $M = [0,1) \times_f \mathcal{X}$ над компактным многообразием $\mathcal{X}$ эти условия выписаны явно.

Глава 6 посвящена формулам Кюннета для L^p-когомологий. В § 6.1 такая формула доказана для случая редуцированных L^2-когомологий и ограниченных искажающих функций f. При некоторых дополнительных условиях аналогичный результат был установлен Цукером (1982).

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ суть липшицевы римановы многообразия и $f\colon \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ – положительная ограниченная функция. В § 6.2 формула

$$H^k_{\ell^p}(\mathcal{X} \times_f \mathcal{Y}, \mathbf{R}) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^k_{\ell^p, f^{n/p-j}}(\mathcal{X}, H^j_{\ell^p}(\mathcal{Y}, \mathbf{R}))$$

доказана для всех $p \in [1,\infty]$ при условии, что $\mathcal{Y}$ компактно. Нижний индекс $f^{n/p-j}$ указывает на определенную весовую когомологию $\mathcal{X}$. Доказательство основано на теории дифференциальных форм со значениями в банаховом пространстве, развитой в этом параграфе.

В главе 7 изучаются банаховы комплексы. Под банаховым комплексом понимается коцепной комплекс банаховых пространств и замкнутых линейных операторов. Каждой точной короткой последовательности банаховых комплексов соответствует точная последовательность когомологий и полуточная последовательность редуцированных когомологий этих комплексов. В § 7.1 обсуждается полуточная короткая последовательность банаховых комплексов. В качестве одной из проблем мы упомянем то, что нормальная или компактная разрешимость любого из комплексов оказывает влияние на свойства разрешимости других комплексов. Методы банаховых комплексов оказываются полезными при изучении теорем вложения для комплексов дифференциальных форм.

Пусть M – ориентируемое замкнутое гладкое многообразие размерности n. Кихенассами (1989) доказал, что, если $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ и $1/p - 1/q < 1/n$, то пространство $W^p(M, \Lambda^k)$ компактно вложено в потоки на M с нормой

$$\inf_{\upsilon \in L^q} \Big(\|\omega - d\upsilon\|_{L^q} + \|\upsilon\|_{L^q} \Big).$$

В § 7.2 эта конструкция интерпретируется в рамках свойства рефлексивности подкатегории банаховых комплексов с непрерывными дифференциалами в категории всех банаховых комплексов. Теоремы вложения устанавливаются таким образом в контексте банаховых комплексов, в частности, эллиптических дифференциальных комплексов на компактных замкнутых многообразиях.

В заключительной главе 8 обсуждаются эллиптические дифференциальные комплексы на многообразиях с цилиндрическими концами. Дифференциал эллиптического комплекса дифференциальных операторов на компактном замкнутом многообразии компактно разрешим. Этот факт перестает быть верным, если многообразие является некомпактным или незамкнутым. В § 8.1 автор приводит условия, которые гарантируют, что дифференциал эллиптического комплекса, действующий в весовых L^p-пространствах, компактно разрешим. В качестве одного из приложений этого абстрактного критерия выступает изучение комплекса де Рама на многообразиях с цилиндрическими концами. В § 8.2 доказана теорема сложения для многообразий с дискретным спектром оператора Лапласа–Бельтрами, где вопрос о сохранении дискретного спектра при разрезании и склеивании сводится к компактной разрешимости оператора внешней производной.

Единственное замечание, которое я хотел бы отметить, состоит в том, что автор использует слово "гомологии" для фактор-пространства коцепного комплекса. Это не согласуется с терминологией, сложившейся в гомологической алгебре, где понятие "гомологии" используется для цепных комплексов.

Из всего вышесказанного следует, что в диссертации И. А. Шведова решен ряд актуальных сложных задач геометрического анализа на липшицевых многообразиях. Полученные результаты несомненно могут рассматриваться как новая область в функциональном анализе и римановой геометрии.

Основные результаты диссертации получены в процессе неразрывной совместной творческой деятельности с соавторами и являются новыми.

Все результаты опубликованы в российских математических журналах и обсуждались на всероссийских и международных конференциях и семинарах.

Содержание диссертации соответствует специальности 01.01.01 – математический анализ.

Некоторые несущественные опечатки не умаляют значимость работы и не препятствуют ее пониманию.

Подводя итог всему вышесказанному, можно сделать вывод о том, что диссертационная работа “Проблемы исчисления дифференциальных форм на римановых многообразиях” удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям, а ее автор, Игорь Александрович Шведов, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ.

Николай Николаевич Тарханов
Institut für Mathematik, Universität Potsdam,
Am neuen Palais 10,
14469, Potsdam, Germany
E-mail address: tarkhanov@math.uni-potsdam.de