S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 88–150 (2008) УДК 512.54+519.17
MSC 05C25

ГРАФЫ КЭЛИ ГРУПП $\mathbb{Z}^4$, $\mathbb{Z}^5$ И $\mathbb{Z}^6$, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ МИНИМАЛЬНОЙ ВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ВЕРШИННО-ПРИМИТИВНЫХ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ

К. В. КОСТОУСОВ

Abstract. Infinite connected graph Γ is called a limit graph for the set X of finite vertex-primitive graphs, if each ball of Γ is isomorphic to a ball of some graph in X. A finite graph Γ is called a graph of minimal degree for a vertex-primitive group $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$, if the condition $\deg(\Gamma) \leq \deg(\Delta)$ is hold for any graph Δ such that $V(\Delta) = V(\Gamma)$ and $G \leq \mathrm{Aut}(\Delta)$. It is obtained the description of Cayley graphs of groups $\mathbb{Z}^4$, $\mathbb{Z}^5$ and $\mathbb{Z}^6$ which are limit graphs for the finite graphs of minimal degree for vertex-primitive groups of automorphisms.

Введение. Формулировки основных результатов

Всюду ниже под графом понимается неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин графа Γ обозначается через $V(\Gamma)$, а множество ребер — через $E(\Gamma)$. Под автоморфизмами графа Γ понимаются подстановки на множестве $V(\Gamma)$, сохраняющие отношение смежности. Классом графов будем называть множество изоморфных типов некоторых графов.

Группа подстановок на конечном множестве называется *примитивной группой HA-типа*, если она содержит регулярную абелеву нормальную подгруппу. Графами минимальной валентности для примитивной группы HA-типа H подстановок на конечном множестве V, называются графы минимальной валентности среди графов Γ, таких что $V(\Gamma) = V$ и $H \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Класс всех графов, допускающих примитивную на множестве вершин группу

Kostousov, K.V., Cayley graphs of groups $\mathbb{Z}^4$, $\mathbb{Z}^5$ and $\mathbb{Z}^6$ which are limit graphs for the finite graphs of minimal valency for vertex-primitive groups of automorphisms.

Работа поддержана РФФИ (грант 06-01-00378).

Поступила 1 марта 2008 г., опубликована 31 марта 2008 г.

автоморфизмов HA-типа, обозначается через $\mathcal{FP}_{HA}$. Класс всех графов минимальной валентности для примитивных групп HA-типа обозначается через $\mathcal{FP}_{HA}^{min}$.

Пусть X — произвольный класс конечных связных графов, допускающих вершинно-примитивную группу автоморфизмов. Тогда *предельными* для C называются бесконечные связные графы, у которых каждый шар изоморфен шару некоторого графа из C. Класс предельных для C графов обозначается через $\lim(C)$. Описание $\lim(C)$ доставляет описание типичного локального строения графов из C.

Пусть B — конечнопорожденная абелева группа и M — конечная система порождающих группы B такая, что $M = -M$ и $0 \notin M$. *Графом Кэли группы B, соответствующим системе порождающих M*, называется граф $\Gamma_{B,M}$ с множеством вершин $V(\Gamma_{B,M}) = B$ и множеством ребер $E(\Gamma_{B,M}) = \{\{a,b\} : a-b \in M\}$.

Пусть d — положительное целое и $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M})_0$ — стабилизатор вершины 0 в группе автоморфизмов графа Кэли $\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M}$ группы $\mathbb{Z}^d$, соответствующего системе порождающих M. Граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M}$ назовем *минимальным графом Кэли группы* $\mathbb{Z}^d$, если множество M является $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M})_0$-орбитой наименьшей мощности на $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Класс всех графов Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ обозначим через $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^d)$, а класс всех минимальных графов Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ обозначим через $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$.

По [1, теор. 2] каждый граф из $\lim(\mathcal{FP}_{HA})$ лежит в $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^d)$ для некоторого d. Кроме того, из [1, теор. 2] и определения предельного графа следует, что каждый граф из $\lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ лежит в $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ для некоторого d.

В [2] показано, что класс $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ конечен при $d \leq 3$. В указанной работе найдены все графы из классов $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ и $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ при $d \leq 3$. В [3] построен такой счетный класс графов $X \subset \mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^4) \cap \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$, что класс $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^4) \setminus X$ конечен. Теоремы 1-3 настоящей работы дают описание классов $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ и $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ при $d = 4, 5, 6$. Кроме того, в настоящей работе получено описание всех графов из $\lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$, валентность которых не превосходит 14 (см. следствие 1 ниже).

Естественным образом отождествим группу $\mathbb{Z}^d$ с множеством целочисленных вектор-строк длины d с операцией покоординатного сложения и через $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ обозначим группу целочисленных $d \times d$-матриц с определителями ± 1. Для $i \in \{1, \ldots, d\}$ через $e_{d,i}$ обозначим вектор-строку длины d, у которой на i-м месте стоит 1, а на остальных — 0. Всюду далее вместо $e_{d,i}$ будем писать e_i, опуская первый индекс (он всегда может быть восстановлен из контекста). Для конечной подгруппы G группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ через $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G)$ обозначим множество G-орбит на $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, порождающих $\mathbb{Z}^d$ и имеющих наименьшую мощность среди всех G-орбит на $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$.

Теорема 1. *Минимальные графы Кэли группы $\mathbb{Z}^4$ с точностью до изоморфизма исчерпываются графами Кэли группы $\mathbb{Z}^4$, соответствующими следующим системам порождающих:*

$M_{4,1} = \pm\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,

$M_{4,2} = \pm\{e_1, e_3, e_4, e_1 + e_2, e_2 + e_3 + e_4\}$,

$M_{4,3} = \pm\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 - e_2, e_3 - e_4\}$,

элементам из $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_1) \cup \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_2)$ (все они порядка 24), где

$G_1 = \langle h_1, h_2 \rangle$, $G_2 = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$,

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Все минимальные графы Кэли группы $\mathbb{Z}^4$ *лежат в* $\lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$.

Теорема 2. $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^5) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^5, M_{5,1}}, \Gamma_{\mathbb{Z}^5, M_{5,2}}\} \subseteq \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$, *где*
$M_{5,1} = \pm\{e_i : i \in \{1, \dots, 5\}\}$;
$M_{5,2} = M_1 \cup \pm\{e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5\}$.

Теорема 3. $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^6) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6, M_{6,i}} : i \in \{1, \dots, 7\}\} \subseteq \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$, *где*
$M_{6,1} = \pm\{e_i : i \in \{1, \dots, 6\}\}$,
$M_{6,2} = \pm\{e_1, e_2, e_3, e_6, e_1 - e_4, e_2 - e_5, e_3 - e_4 + e_5 - e_6\}$,
$M_{6,3} = M_{6,1} \cup \pm\{e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5 - e_6\}$,
$M_{6,4} = M_{6,1} \cup \pm\{e_1 - e_2 + e_4, e_1 - e_3 + e_5, e_2 - e_3 + e_6, e_4 - e_5 + e_6\}$,
$M_{6,5} = (e_1 - e_3)F_1$ *порядка* 36,
$M_{6,6} = e_1 F_2$ *порядка* 42,
$M_{6,7} = e_1 F_3$ *порядка* 54,
где

$$F_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$F_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$F_3 = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\rangle.$$

Результаты о строении класса $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ при $d \leq 6$ дают следующее описание графов малой валентности из $\lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$.

Следствие 1. *Следующий список содержит все графы из* $\lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$, *валентность которых не превосходит* 14*:*

1) $\Gamma_{\mathbb{Z},\{1,-1\}}$ *валентности* 2,
2) $\Gamma_{\mathbb{Z}^2,\pm\{e_1,e_2\}}$ *валентности* 4,
3) $\Gamma_{\mathbb{Z}^2,\pm\{e_1,e_2,e_1+e_2\}}$ *валентности* 6,
4) $\Gamma_{\mathbb{Z}^3,\pm\{e_1,e_2,e_3\}}$ *валентности* 6,
5) $\Gamma_{\mathbb{Z}^4,\pm\{e_1,e_2,e_3,e_4\}}$ *валентности* 8,
6) $\Gamma_{\mathbb{Z}^4,\pm\{e_1,e_3,e_4,e_1+e_2,e_2+e_3+e_4\}}$ *валентности* 10,
7) $\Gamma_{\mathbb{Z}^5,\pm\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}}$ *валентности* 10,
8) $\Gamma_{\mathbb{Z}^4,\pm\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_1-e_2,e_3-e_4\}}$ *валентности* 12,
9) $\Gamma_{\mathbb{Z}^5,\pm\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_1+e_2+e_3-e_4-e_5\}}$ *валентности* 12,
10) $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,\pm\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}}$ *валентности* 12,
11) $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,\pm\{e_1,e_2,e_3,e_6,e_1-e_4,e_2-e_5,e_3-e_4+e_5-e_6\}}$ *валентности* 14,
12) $\Gamma_{\mathbb{Z}^7,\pm\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}}$ *валентности* 14.

Оставшаяся часть работы имеет следующее строение. §1 содержит вспомогательные результаты для описания классов $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ и $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ при фиксированном d. Этот параграф завершается схемой описания классов $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ и $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ при фиксированном $d \geq 4$. В §2, §3 и §4 доказываются, соответственно, теоремы 1, 2 и 3 посредством реализации данной схемы для $d = 4, 5$ и 6.

1. Вспомогательные результаты

Пусть $\mathbb{Q}^d$ — d-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$, элементами которого являются рациональные вектор-строки длины d. Для $M \subseteq \mathbb{Q}^d$ через $\langle M \rangle_+$ будем обозначать подгруппу аддитивной группы векторов пространства $\mathbb{Q}^d$, порожденную множеством M, а через $\langle M \rangle_{\mathbb{Q}}$ будем обозначать подпространство векторного пространства на $\mathbb{Q}^d$, натянутое на M. Через $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ обозначим группу невырожденных $d \times d$-матриц над $\mathbb{Q}$, а через E_d — единичную $d \times d$ матрицу. Подмножества M, M' множества $\mathbb{Q}^d$ назовем *линейно эквивалентными*, если $M' = Ma$ для некоторой матрицы $a \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$.

1.1. **Связь минимальных графов Кэли групп $\mathbb{Z}^d$ с конечными группами целочисленных матриц.** Следующая теорема 1.1 доставляет эффективный метод проверки изоморфности графов Кэли свободных абелевых групп конечного ранга и непосредственно следует из [2, теорема 3(a)] и [2, предложение 3(b)].

Теорема 1.1. *Пусть M_i — конечное подмножество пространства $\mathbb{Q}^d$, такое что $0 \notin M_i$ и $M_i = -M_i$, для $i = 1, 2$. Тогда*

(a) *Графы Кэли* $\Gamma_{\langle M_1\rangle_+,M_1}$ *и* $\Gamma_{\langle M_2\rangle_+,M_2}$ *изоморфны тогда и только тогда, когда множества* M_1 *и* M_2 *линейно эквивалентны.*

(b) *Каждый изоморфизм графа* $\Gamma_{\langle M_1\rangle_+,M_1}$ *на граф* $\Gamma_{\langle M_2\rangle_+,M_2}$ *имеет вид* $x \mapsto xa + y$, $x \in \langle M_1\rangle_+$, *для подходящих* $a \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}), y \in \mathbb{Q}^d$.

(c) *Если* $\dim(\langle M_1\rangle_{\mathbb{Q}}) = d$, *то для каждого автоморфизма* $g \in \mathrm{Aut}(\langle M_1\rangle_+, M_1)_0$ *существует единственная матрица* $\phi(g) \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$, *такая что* $xg = x\phi(g)$ *для каждого* $x \in \langle M_1\rangle_+$.

В следующей теореме 1.2 устанавливается связь минимальных графов Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ с конечными подгруппами группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$. Перед ее формулировкой введем следующие определения.

Для конечной подгруппы G группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ определим число

$$m(G) := \min\{|xG| : x \in \mathbb{Q}^d \setminus \{0\}\},$$

множество

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G) := \{xG : x \in \mathbb{Q}^d \setminus \{0\}, |xG| = m(G), xG = -xG, \dim(\langle xG\rangle_{\mathbb{Q}}) = d\},$$

и класс графов

$$\mathcal{OG}^{min}(G) := \{\Gamma_{\langle M\rangle_+,M} : M \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G)\}.$$

Теорема 1.2. *Пусть* $G_1, \ldots, G_n$ *— все с точностью до сопряжения в* $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ *конечные подгруппы группы* $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$, *содержащие* $-E_d$. *Тогда класс* $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ *совпадает с классом* $\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \mathcal{OG}^{min}(G_i)$.

Доказательство. Пусть $\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M}$ — произвольный минимальный граф Кэли группы $\mathbb{Z}^d$. В силу теоремы 1.1(c) положим $H := \phi(\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M})_0) \leq \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$. Из [2, предложение 2] следует, что $M = xH$ для некоторого $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ и группа H конечна. Поскольку $-E_d \in H$, то существует матрица $a \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$, такая что $H^a = G_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. По определению $\mathcal{OG}^{min}(G_i)$ имеем $\Gamma_{\langle Ma\rangle_+,Ma} \in \mathcal{OG}^{min}(G_i)$. Если граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M}$ минимален, то $Ma \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_i)$ и, следовательно, $\Gamma_{\langle Ma\rangle_+,Ma} \in \mathcal{OG}^{min}(G_i)$. По теореме 1.1($a$) графы $\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M}$ и $\Gamma_{\langle Ma\rangle_+,Ma}$ изоморфны, и теорема 1.2 доказана.

В силу теоремы 1.2 для явного описания класса $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ требуется выбрать представителей различных изоморфных типов графов из $\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \mathcal{OG}^{min}(G_i)$ соответственно. Для этого используется, в частности, теорема 1.1.

Использование теорем 1.1 и 1.2 для описания класса $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$ при $d \geq 4$ требует больших вычислений. В связи с этим в §1.6 описана схема нахождения минимальных графов Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ сиспользованием системы GAP [4].

1.2. **О пределах вершинно-примитивных графов HA-типа.** Пусть p — простое число. Для $x \in \mathbb{Z}^d$ (соответственно $a \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$) через $\phi_p(x)$ (соответственно $\phi_p(a)$) обозначим вектор-строку (соответственно матрицу), элементы которой являются вычетами по модулю p соответствующих элементов вектор-строки x (соответственно матрицы a).

Лемма 1.3. *Для любой конечной группы* $G \leq \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ *существует такое целое число* p_0, *что для всех простых* $p > p_0$ *группа* $\phi_p(G)$ *действует точно на* $\mathbb{Z}_p^d$, *и* $|x\phi_p(G)| \geq m(G)$ *для каждого* $x \in \mathbb{Z}_p^d \setminus \{0\}$.

Доказательство. Положим $p_1 := \{|g_{ij}| : g \in G, i, j \in \{1, \dots, d\}\}$. Очевидно, существует такое целое число p_2, что для простых $p > p_2$ справедливо $\max\{|J| : J \subseteq G, \mathrm{fix}(J) \neq \{0\}\} = \max\{|J| : J \subseteq \phi_p(G), \mathrm{fix}(J) \neq \{0\}\}$. Положим $p_0 := \max\{p_1, p_2\}$.

Пусть p — простое и $p > p_0$. Точность действия $\phi_p(G)$ на $\mathbb{Z}_p^d$ следует из неравенства $p > p_1$. Поскольку $p > p_2$, $|x\phi_p(G)| \geq \frac{|G|}{\max\{|J| : J \subseteq \phi_p(G), \mathrm{fix}(J) \neq \{0\}\}}$ и $m(G) = \frac{|G|}{\max\{|J| : J \subseteq G, \mathrm{fix}(J) \neq \{0\}\}}$, то $|x\phi_p(G)| \geq m(G)$ для каждого $x \in \mathbb{Z}_p^d \setminus \{0\}$. Лемма доказана.

Предложение 1.4. *Пусть G — конечная подгруппа группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G)$. Если существует бесконечное множество простых чисел P такое, что для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G)$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^d$, то $\Gamma_{\mathbb{Z}^d, M} \in \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$.*

Доказательство. Положим $P_1 := \{p \in P : p > p_0\}$, где p_0 — число, определенное в соответствии с леммой 1.3 для группы G.

Пусть $p \in P_1$. Множество $\phi_p(M)$ является $\phi_p(G)$-орбитой, причем $\phi_p(M) = -\phi_p(M)$, $\langle \phi_p(M) \rangle_+ = \mathbb{Z}_p^d$, $0 \notin \phi_p(M)$. Граф Кэли $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^d, \phi_p(M)}$ допускает группу автоморфизмов $t(\mathbb{Z}_p^d) \rtimes \phi_p(G)$, которая является вершинно-примитивной группой HA-типа в силу неприводимости действия $\phi_p(G)$ на $\mathbb{Z}_p^d$. С учетом выбора p_0 отсюда следует, что граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^d, \phi_p(M)}$ является минимальным вершинно-примитивным графом HA-типа.

Из определения предельного графа следует, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^d, M} \in \lim(\{\Gamma_{\mathbb{Z}_p^d, \phi_p(M)} : p \in P_1\}) \subseteq \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$. Предложение доказано.

1.3. **Графы Кэли групп $\mathbb{Z}^d$ наименьшей валентности как пределы минимальных вершинно-примитивных графов HA-типа.** Для $d \geq 1$ через K_d обозначим подгруппу группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$, состоящую из элементов g, определяемых формулой $(x_1, \dots, x_d)g = (\varepsilon_1 x_{\tau(1)}, \dots, \varepsilon_d x_{\tau(d)})$, где τ — подстановка на множестве индексов $\{1, \cdots, d\}$ и $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$. Через Γ_d обозначим граф Кэли группы $\mathbb{Z}^d$, соответствующий системе порождающих $M_{d,1} := \{\pm e_i : i \in \{1, \dots, d\}\}$ группы $\mathbb{Z}^d$.

Предложение 1.5. $\Gamma_d \in \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ *для каждого* $d \geq 1$.

Доказательство. Легко видеть, что стабилизатор $\mathrm{Aut}(\Gamma_d)_0$ совпадает с группой K_d. Легко видеть, что $M_{d,1}$ является K_d-орбитой на $\mathbb{Z}^d$, $|M_{d,1}| = 2d$ и любая K_d-орбита на $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ имеет порядок не менее $2d$. Поэтому $m(K_d) = 2d$ и $M_{d,1} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(K_d)$.

Пусть p — произвольное простое число, большее 2. Покажем, что группа $\phi_p(K_d)$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^d$. Пусть U — ненулевое $\phi_p(K_d)$-инвариантное подпространство $\mathbb{Z}_p^d$. В силу строения K_d пространство U содержит элемент $(x_1, x_2, \dots, x_d)$, такой что $x_1 \neq 0$. В силу строения K_d имеем $(x_1, -x_2, \dots, -x_d) \in U$, откуда $(2x_1, 0, \dots, 0) \in U$. Следовательно, $\phi_p(e_1) \in U$, откуда в силу строения K_d имеем $\phi_p(e_i) \in U$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$. Таким образом, $U = \mathbb{Z}_p^d$ и, следовательно, группа $\phi_p(K_d)$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^d$.

Теперь по предложению 1.4 граф Γ_d лежит в $\lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$. Предложение доказано.

Предложение 1.6. *Пусть* $M \subset \mathbb{Q}^d$, $0 \notin M$, $M = -M$, $\dim(\langle M\rangle_{\mathbb{Q}}) = d$ *и* $|M| \leq 2d$. *Тогда граф* $\Gamma_{\langle M\rangle_+, M}$ *изоморфен графу* Γ_d.

Доказательство. Поскольку $M = -M$ и $0 \notin M$, то $M = \{a_1, \ldots, a_n, -a_1, \ldots, -a_n\}$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}^d \setminus \{0\}$. Поскольку $\dim(\langle M\rangle_{\mathbb{Q}}) = d$ и $|M| \leq 2d$, то $n = d$ и векторы $a_1, \ldots, a_d$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Следовательно, существует матрица $b \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ такая, что $a_i b = e_i$ для $i = 1, \ldots, d$. Таким образом, множества M и $M_{d,1}$ линейно эквивалентны, и соответствующие им графы Кэли $\Gamma_{\langle M\rangle_+, M}$ и Γ_d изоморфны по теореме 1.1(a). Предложение доказано.

Из доказанного предложения в частности следует, что $\mathcal{OG}^{min}(K_d) = \{\Gamma_d\}$.

1.4. **Графы Кэли группы $\mathbb{Z}^d$, соответствующие орбитам конечной группы целочисленных матриц.** Одним из этапов нахождения всех графов из $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ с помощью теоремы 1.2 является описание класса $\mathcal{OG}^{min}(G)$ для фиксированных конечных групп $G \leq \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$. Ниже мы находим условия, которые в некоторых случаях позволяют прояснить строение класса $\mathcal{OG}^{min}(G)$ для фиксированной конечной подгруппы G группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$. Для формулировки этих условий нам понадобятся следующие обозначения.

Для конечной подгруппы G группы $\leq \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ определим

$$c_1(G) := \max\{|G_U| : U \leq \mathbb{Q}^d, \dim(U) \geq 1\}.$$

Очевидно, что

$$m(G)c_1(G) = |G|. \tag{1}$$

Следующее предложение является незначительной модификацией [3, предложение 2] и доказывается аналогично. Единственное различие заключается в том, что в [3, предложение 2] рассматриваются G-орбиты на $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, а в настоящем предложении — G-орбиты на $\mathbb{Q}^d \setminus \{0\}$.

Предложение 1.7. *Пусть группа G циклическая и $c_1(G) = 1$. Тогда G-орбитам на $\mathbb{Q}^d \setminus \{0\}$ с точностью до изоморфизма соответствует не более одного графа Кэли. В частности,* $|\mathcal{OG}^{min}(G)| \leq 1$.

Предложение 1.8. *Пусть H, G — конечные подгруппы группы* $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$, $m(H) \geq m(G)$ *и* $H^b < G$ *для некоторой матрицы* $b \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$. *Тогда* $\mathcal{OG}^{min}(G) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(H)$.

Доказательство. Из определения $m(\cdot)$ следует, что $m(H^b) = m(H)$ и $m(H) \leq m(G)$. Поэтому из условия $m(H) \geq m(G)$ следует, что $m(H^b) = m(G)$, откуда $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(H^b) \supseteq \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G)$. Теперь утверждение предложения следует из теоремы 1.1(a).

1.5. **Алгоритм, позволяющий находить минимальные графы Кэли групп $\mathbb{Z}^d$, соответствующие орбитам фиксированной конечной группы целочисленных матриц.** Для конечной подгруппы G группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ положим $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{Q}} := \{xG : x \in \mathbb{Q}^d \setminus \{0\}, |xG| = m(G)\}$. Очевидно, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G) \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{Q}}(G)$. В настоящем параграфе описывается алгоритм A1, являющийся незначительной модификацией алгоритма 1 из [3], позволяющий для произвольной конечной подгруппы G группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ вычислять $c_1(G)$, $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{Q}}(G)$ при помощи системы GAP.

Из определения $c_1(G)$ следует, что $c_1(G) = \max\{|J| : J \subseteq G, \mathrm{fix}(J) \neq \{0\}\}$. Алгоритмом A1 вычисляет $c_1(G)$ путем перебора подмножеств множества $\{\mathrm{fix}(g) : g \in G, \mathrm{fix}(g) \neq \{0\}\}$ (элементы этого множества будем называть *атомарными* подпространствами). Ниже приведена запись алгоритма A1 на неформальном PASCAL-подобном языке программирования.

АЛГОРИТМ A1. ВЫЧИСЛЕНИЕ $c_1(G)$ и $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{Q}}(G)$.

Входные данные:

G — конечная подгруппа группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$.

Результаты:

$c_1(G)$,

D — множество подпространств пространства $\mathbb{Q}^d$, такое что для каждого $J \subseteq G$, такого что $\mathrm{fix}(J) \neq \{0\}$ и $|J| = c_1(G)$, справедливо включение $\mathrm{fix}(J) \subseteq \bigcup_{g \in G} Dg$ (множество D определяет $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{Q}}(G)$, как ниже указано в замечании),

t — число итераций основного цикла алгоритма.

Инициализация:

$A := \emptyset$; // массив атомарных подпространств
for $g \in G$
  if $\mathrm{fix}(g) \neq \{0\}$ **then** добавить $\mathrm{fix}(g)$ в A; **end if;**
end for;
$n :=$ Размер(A); // число атомарных подпространств
$t := 0$; // номер итерации основного цикла
$c := 0$; // текущий максимум
$S := \emptyset$; // стек номеров атомарных подпространств
$l := 1$; // номер текущего атомарного подпространства
$D := \emptyset$;

Основной цикл:

while $l \leq n$ **or** $S \neq \emptyset$
  $t := t + 1$;
  while $A[l] \cap \bigcap_{i \in S} A[i] = \{0\}$ **and** $l \leq n$
    l:=l+1;
  end while;
  if $l \leq n$ **then**
    добавить l в S;
    $l := l + 1$;
  else
    $l :=$ вершина$(S) + 1$;
    if $c <$ размер(S) **then**
      $c :=$ размер(S);
      $D := \{\bigcap_{i \in S} A[i]\}$;
    else if $c =$ размер(S) **and** $\bigcap_{i \in S} A[i] \notin \bigcup_{g \in G} Dg$ **then**
      $D := D \cup \{\bigcap_{i \in S} A[i]\}$;
    end if;
    удалить вершину из S;
  end if;
end while;

Выдача результатов:

return c, D, t;

Корректность алгоритма A1 следует из того что он является незначительной модификацией алгоритма 1 из [3], касающейся лишь определения и вычисления множества D.

Замечание. Пусть D — множество, полученное в результате применения алгоритма A1 к конечной группе $G \leq \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$. Из определения множества D в алгоритме A1 следует, что $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{Q}}(G) = \{xG : x \in D \setminus \{0\}\}$ и, таким образом, $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G) \subseteq \{xG : x \in D \setminus \{0\}\}$.

1.6. **Схема описания классов** $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ **и** $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ **при фиксированном** $d \geq 4$**.** Для дальнейшего нам понадобятся следующие обозначения. Для конечной подгруппы G группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ положим

$$m_1(G) = \min\{|xG| : 0 \neq x = (x_1, \ldots, x_d), x_i \in \{-1, 0, 1\}$$
$$\text{для } i \in \{1, \ldots, d\}\}.$$

Число $m_1(G)$ для наших целей является хорошей оценкой сверху для $m(G)$.

Пусть $\mathcal{G}_d$ — множество представителей всех классов сопряженных в $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$. Тогда положим

$$\tilde{\mathcal{G}_d}' := \{G \in \mathcal{G}_d : -E_d \in G, m_1(G) > 2d\}.$$

Приведем схему описания классов $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ и $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ при фиксированном $d \geq 4$. Ее применение требует некоторых предположений.

Во-первых, предполагается, что дано множество $\mathcal{G}_d$ представителей всех классов сопряженных в $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$. Выберем из них подмножество $\tilde{\mathcal{G}_d}' = \{G \in \mathcal{G}_d : -E_d \in G, m_1(G) > 2d\}$. По теореме 1.2 и предложению 1.6 имеем $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) = \{\Gamma_d\} \cup \bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_d}'} \mathcal{OG}^{min}(G)$.

Во-вторых, предполагается, что удается найти относительно небольшое подмножество $\tilde{\mathcal{G}_d}''$, множества $\tilde{\mathcal{G}_d}'$, такое что для каждой группы $G \in \tilde{\mathcal{G}_d}' \setminus \tilde{\mathcal{G}_d}''$ найдется группа $H \in \tilde{\mathcal{G}_d}''$, такая что для групп G, H выполняются условия предложения 1.8. Тогда $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) = \{\Gamma_d\} \cup \bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_d}''} \mathcal{OG}^{min}(G)$.

В третьих, предполагается что для каждой группы $G \in \tilde{\mathcal{G}_d}''$ удается (по времени) выполнить алгоритм A1 для нахождения множества $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{Q}}(G)$. Предположим также, что для каждой группы $G \in \tilde{\mathcal{G}_d}''$ удается найти относительно просто устроенное подмножество $\mathcal{M}(G)$ множества $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{Q}}(G)$, такое что для каждое множество из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G)$ линейно эквивалентно некоторому множеству из $\mathcal{M}(G)$. Тогда из теоремы 1.1(a) следует, что $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) = \{\Gamma_d\} \cup \{\Gamma_{\langle M\rangle_+, M} : M \in \bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_d}''} \mathcal{M}(G)\}$.

В четвертых, предположим, что удается выбрать те графы из $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$, которые лежат в $\lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$. В этом может помочь предложение 1.4.

В следующих трех параграфах мы реализуем данную схему для $d = 4, 5, 6$. Граница $d = 6$ обусловлена тем, что в настоящее время перечисление представителей всех классов сопряженных в $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ реализовано лишь при $d \leq 6$. Это перечисление реализовано в пакете компьютерных программ CARAT, предназначенном для перечисления, построения, распознавания и сравнения кристаллографических групп размерности ≤ 6 (см. [5],[6]).

2. Минимальные графы Кэли группы $\mathbb{Z}^4$ и пределы графов минимальной валентности для вершинно-примитивных групп HA-типа

Настоящий параграф посвящен описанию классов $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ и $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ для $d = 4$.

В §2.1 доказывается теорема 1. При этом используются технические результаты, приведенные в §§2.2-2.5, полученные с использованием систем GAP и Maple [7].

2.1. **Доказательство теоремы 1.** Используя пакет CARAT, получаем множество $\mathcal{G}_4$ представителей всех (227) классов сопряженных в $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$. Далее, выбираем из него подмножество $\tilde{\mathcal{G}_4}'$, по определению равное $\{G \in \mathcal{G}_4 : -E_4 \in G, m_1(G) > 8\}$ (подробности о том, как это делается, описаны в §2.2). Группы из $\tilde{\mathcal{G}_4}'$ явно перечислены в §2.3. По теореме 1.2 и предложению 1.6 имеем $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^4) = \{\Gamma_4\} \cup \bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_4}'} \mathcal{OG}^{min}(G)$.

При нахождении класса $\bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_4}'} \mathcal{OG}^{min}(G)$ мы будем использовать свойства групп из $\tilde{\mathcal{G}_4}'$, приведенные в §2.4 и §2.5.

Для нахождения класса $\bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_4}'} \mathcal{OG}^{min}(G)$ сначала найдем классы $\mathcal{OG}^{min}(H)$ для $H \in \tilde{\mathcal{G}_4}''$, где $\tilde{\mathcal{G}_4}'' := \{G_{4,166}, G_{4,167}, G_{4,215}, G_{4,224}\} \subset \tilde{\mathcal{G}_4}'$.

Заметим, что группы $G_{4,166}$ и G_1 совпадают, а группы $G_{4,167}$ и G_2 сопряжены в силу свойства 6_2. Поэтому из строк 2 и 3 таблицы 2 имеем $m(G_1) = m(G_2) = 24$. Из [3, теорема 1] следует бесконечность классов $\mathcal{OG}^{min}(G_1) = \mathcal{OG}^{min}(G_{4,166})$ и $\mathcal{OG}^{min}(G_2) = \mathcal{OG}^{min}(G_{4,167})$. Покажем, что каждый граф $\Gamma_{\langle M \rangle_+, M}$ из $\mathcal{OG}^{min}(G_1)$ изоморфен некоторому графу Кэли группы $\mathbb{Z}^4$, соответствующему системе порождающих из $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_1)$. Поскольку $\dim(\langle M \rangle_{\mathbb{Q}}) = d$, то существует матрица $a \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$, такая что $\langle Ma \rangle_+ = \mathbb{Z}^4$. Поскольку $\langle M \rangle_+ G_1 = \langle M \rangle_+$, то $G_1^a \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^4) \leq \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$. Из 2-й строки таблицы 2 следует, что все группы из класса сопряженных конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ в группе $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$, содержащего группу G_1, сопряжены в $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$. Поэтому существует матрица $b \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, такая что $G_1^{ab} = G_1$. Тогда $Mab \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_1)$ и граф $\Gamma_{\langle M \rangle_+, M}$ изоморфен графу $\Gamma_{\mathbb{Z}^4, Mab}$ по теореме 1.1(a). Аналогично доказывается, что каждый граф из $\mathcal{OG}^{min}(G_2)$ изоморфен некоторому графу Кэли группы $\mathbb{Z}^4$, соответствующему системе порождающих из $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_2)$.

Из строки 7 таблицы 2 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,215}) \subseteq \{xG_{4,215} : x \in \mathbb{Q}^4 \setminus \{0\}\}$. Поэтому в силу свойства 34_2 имеем $M_{4,3} = e_1 G_{4,215} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,215})$. Кроме того, в предыдущем параграфе было доказано, что $|\mathcal{OG}^{min}(G_{4,215})| \leq 1$. Следовательно, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,215}) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^4, M_{4,3}}\}$.

Из строки 8 таблицы 2 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,224}) \subseteq \{xG_{4,224} : x \in \mathbb{Q}^4 \setminus \{0\}\}$. Поэтому в силу свойства 39_2 имеем $M_{4,2} = e_1 G_{4,224} =\in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,224})$. Кроме того, в предыдущем параграфе было доказано, что $|\mathcal{OG}^{min}(G_{4,224})| \leq 1$. Следовательно, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,224}) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^4, M_{4,2}}\}$.

Итак, мы нашли классы $\mathcal{OG}^{min}(H)$ для каждой группы $H \in \tilde{\mathcal{G}_4}''$ и видим, что класс $\bigcup_{H \in \tilde{\mathcal{G}_4}''} \mathcal{OG}^{min}(H)$ состоит из графов Кэли группы $\mathbb{Z}^4$, соответствующих системам порождающих из $\{M_{4,2}, M_{4,3}\} \cup \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_1) \cup \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_2)$. Покажем теперь, что для каждой группы $G \in \tilde{\mathcal{G}_4}'$ справедливо включение $\mathcal{OG}^{min}(G) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(H)$ для подходящей группы $H \in \tilde{\mathcal{G}_4}''$.

Из предложения 1.8 и свойств 1_2-3_2 следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,154}), \mathcal{OG}^{min}(G_{4,156}), \mathcal{OG}^{min}(G_{4,163}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,167}) = \mathcal{OG}^{min}(G_2)$.

Из строки 1 таблицы 2 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,165}) \subseteq \{xG_{4,165} : x \in \mathbb{Q}^4 \setminus \{0\}\}$. Поэтому из свойств 4_2 и 5_2 следует, что все элементы из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,165})$ линейно эквиваленты элементу $e_1G_{4,166}$ из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,166})$. Следовательно, в силу теоремы 1.1(a) имеем $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,165}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,166}) = \mathcal{OG}^{min}(G_1)$.

Из предложения 1.8 и свойств 8_2, 9_2, 11_2-16_2 следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,176})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,177})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,179})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,180})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,185})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,188})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,189})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,190}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,165}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_1)$.

Из предложения 1.8 и свойства 7_2 и 10_2 следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,168}), \mathcal{OG}^{min}(G_{4,178}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,167}) = \mathcal{OG}^{min}(G_2)$.

Из строки 7 таблицы 2 следует, что $m(G_{4,215}) = 12$. Поэтому из предложения 1.8 и свойств 21_2, 22_2, 24_2, 25_2, 28_2, 31_2, 35_2 следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,197})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,199})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,201})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,202})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,207})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,210})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,216}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,215})$.

Из строки 5 таблицы 2 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,204}) \subseteq \{xG_{4,204} : x \in \langle e_3, e_4\rangle_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}\}$. Поэтому из свойства 27_2 следует, что все элементы из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,204})$ линейно эквиваленты элементу $e_1G_{4,215}$ из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,215})$. Следовательно в силу теоремы 1.1(a) имеем $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,204}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,215})$.

Из предложения 1.8 и свойств 19_2, 32_2, 33_2 следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,195})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,211})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,212}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,204}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,215})$.

Из строки 8 таблицы 2 следует, что $m(G_{4,224}) = 10$. Поэтому предложения 1.8 и свойств 36_2-38_2, 40_2 следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,219})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,221})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,222})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,226}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,224})$.

Из строки 4 таблицы 2 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,193}) \subseteq \{xG_{4,193} : x \in \mathbb{Q}^4 \setminus \{0\}\}$. Поэтому из свойства 17_2 следует, что все элементы из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,193})$ линейно эквивалентны элементу $e_1G_{4,224}$ из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,224})$. Следовательно, в силу теоремы 1.1(a) имеем $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,193}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,224})$.

Из предложения 1.8 и свойств 18_2, 23_2, 26_2, 29_2 следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,194})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,200})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,203})$, $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,208}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,193}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,224})$.

Из строки 6 таблицы 2 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,209}) \subseteq \{xG_{4,209} : x \in \langle e_1 - 2e_2\rangle_{\mathbb{Q}} \cup \langle e_4\rangle_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}\}$. Поэтому из свойства 30_2 следует, что все элементы из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,209})$ линейно эквивалентны элементу $e_1G_{4,224}$ из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,224})$. Следовательно, в силу теоремы 1.1(a) имеем $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,209}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,224})$.

Из предложения 1.8 и свойства 20_2 следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{4,196}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,209}) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(G_{4,224})$.

Итак, мы проверили, что для каждой группы $G \in \tilde{\mathcal{G}_4}'$ справедливо включение $\mathcal{OG}^{min}(G) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(H)$ для подходящей группы $H \in \tilde{\mathcal{G}_4}''$. Поэтому $\bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_4}'} \mathcal{OG}^{min}(G) = \bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_4}''} \mathcal{OG}^{min}(G)$ и, следовательно, минимальные графы Кэли группы $\mathbb{Z}^4$ с точностью до изоморфизма исчерпываются графами Кэли группы $\mathbb{Z}^4$, соответствующими системам порождающих из $\{M_{4,1}, M_{4,2}, M_{4,3}\} \cup \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_1) \cup \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_2)$. Для завершения доказательства теоремы 1 проверим, что все графы Кэли группы $\mathbb{Z}^4$, соответствующие системам порождающих из $\{M_{4,1}, M_{4,2}, M_{4,3}\} \cup \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_1) \cup \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_2)$, лежат в $\lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$.

Из предложения 1.5 следует, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^4, M_{4,1}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$.

Покажем, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^4, M_{4,2}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$. Применяя лемму 1.3, найдем число p_0, такое что для всех простых $p > p_0$ и для каждого $x \in \mathbb{Z}_p^4 \setminus \{0\}$ справедливо равенство $|x\phi_p(G_{4,224})| = 10$. Положим $P = \{p \in \mathbb{N} : p - \text{простое}, p > \max\{p_0, 10\}, p \equiv 3 \text{ или } 7 (\mathrm{mod}\, 10)\}$. Покажем, что для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{4,224})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^4$. Предположим противное: пусть для некоторого $p \in P$ существует собственное $\phi_p(G_{4,224})$-допустимое подпространство U. Поскольку $p > 10 = |G_{4,224}|$, то по теореме Машке без ограничения общности можно считать, что $\dim(U) \leq 2$. В силу выбора p_0 число 10 делит $p^{\dim(U)} - 1$, что противоречит условию $p \equiv 3 \text{ или } 7 (\mathrm{mod}\, 10)$. Следовательно, для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{4,224})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^4$. Кроме того, из свойства 39_2 имеем $M_{4,2} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_{4,224})$. Следовательно, по предложению 1.4 имеем $\Gamma_{\mathbb{Z}^4, M_{4,2}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$.

Для доказательства того, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^4, M_{4,3}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. *Существует бесконечное множество простых числе P, такое что для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{4,202})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^4$.*

Доказательство. Из §2.3 имеем $G_{4,202} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, где

$$a_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Положим $b_1 := a_2$, $b_2 := a_2 a_1^2$, $b_3 := a_3^3 a_1 a_3^3 a_1^{-1} a_3^{-1}$, $b_4 := a_3^3 a_1 a_3^2 a_1^{-1}$, $b_5 := a_2 a_1^{-1}$, $c_1 := a_3^2$, $c_2 := a_1 a_3^2 a_1^{-1}$. Непосредственно проверяем, что $|b_1| = |b_2| = |b_3| = |b_4| = |b_5| = 2$, $|c_1| = |c_2| = 3$, $\langle b_3, c_1 \rangle \cong \langle b_4, c_2 \rangle \cong \mathrm{S}_3$, $b_1 b_2 = -E_4$, $b_1^{b_5} = b_2$, $b_3^{b_5} = b_4$, $c_1^{b_5} = c_2$ и

$$G_{4,202} = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \langle b_3, c_1 \rangle \times \langle b_4, c_2 \rangle) \leftthreetimes \langle b_5 \rangle. \tag{2}$$

Дважды применяя лемму 1.3, найдем число p_0, такое что для всех простых $p > p_0$ группа $\phi_p(G_{4,202})$ действует точно на $\mathbb{Z}_p^4$ и для каждого $x \in \mathbb{Z}_p^4 \setminus \{0\}$ справедливо равенство $|x\phi_p(G_{4,215})| = m(G_{4,215}) = 12$. Положим $P = \{p \in \mathbb{N} : p - \text{простое}, p > \max\{p_0, 288\}, p \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 12) \text{ и } 288 \text{ не делит } (p^2-1)(p-1)p\}$. Легко видеть, что P содержит все достаточно большие простые числа p, такие что $p \equiv 19 (\mathrm{mod}\, 288)$, и, следовательно, множество P бесконечно.

Для доказательства леммы осталось показать, что каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{4,202})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^4$. Предположим противное. Тогда для некоторого $p \in P$ существует собственное $\phi_p(G_{4,202})$-допустимое подпространство U_1. Поскольку $p > 288 = |G_{4,202}|$, то по теореме Машке существует $\phi_p(G_{4,202})$-допустимое подпространство U_2, такое что $\mathbb{Z}_p^4 = U_1 \oplus$

U_2. Для $i = 1, 2$ через ψ_i обозначим гомоморфизм группы $\phi_p(G_{4,202})$ в группу $\mathrm{GL}_{\dim(U_i)}(p)$, который каждому элементу группы $\phi_p(G_{4,202})$ ставит в соответствие его ограничение на подпространство U_i. По выбору p_0 из $G_{4,215} < G_{4,202}$ и $|G_{4,215}| = 12$ следует, что порядок группы $\psi_i(\phi_p(G_{4,202}))$ делится на 12 для $i = 1, 2$. Поэтому из условия $p \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 12)$ следует, что $\dim(U_i) \neq 1$ для $i = 1, 2$. Следовательно, $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$.

Имеем $\langle \phi_p(b_1), \phi_p(b_2) \rangle \cap \ker(\psi_1) = \{\phi_p(E_4)\}$, поскольку в противном случае из $b_1^{b_5} = b_2$ и $b_1 b_2 = -E_4$ следует, что $\phi_p(-E_4) \in \ker(\phi_1)$. Кроме того, имеем $\langle \phi_p(c_1), \phi_p(c_2) \rangle \cap \ker(\psi_1) = \{\phi_p(E_4)\}$. Действительно, в противном случае из $c_1^{b_5} = c_2$ и $c_1^{b_3} = c_1^2$ следует включение $\langle \phi_p(c_1), \phi_p(c_2) \rangle \subseteq \ker(\psi_1)$, противоречащее тому, что порядок группы $\psi_1(\phi_p(G_{4,202}))$ делится на 12 (см. выше). Из $\langle \phi_p(b_1), \phi_p(b_2) \rangle \cap \ker(\psi_1) = \langle \phi_p(c_1), \phi_p(c_2) \rangle \cap \ker(\psi_1) = \{\phi_p(E_4)\}$, (2) и $c_1^{b_3} = c_1^2, c_2^{b_4} = c_2^2, c_1^{b_5} = c_2$ следует, что гомоморфизм ψ_1 точен. Поэтому порядок группы $\phi_p(G_{4,202})$, равный 288, делит порядок группы $\mathrm{GL}_2(p)$, равный $(p^2 - 1)(p-1)p$. Мы пришли к противоречию с определением P, и, следовательно, группа $\phi_p(G_{4,202})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^4$ для каждого $p \in P$.

Лемма доказана.

Из свойства 25_2 и того, что $M_{4,3} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,215})$ следует, что $M_{4,3} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{4,202})$. Поэтому из леммы 2.1 и предложения 1.4 следует, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^4, M_{4,3}} \in \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$.

Наконец, из [3, теорема 2] следует, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^4, M} \in \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ для каждого $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_1) \cup \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(G_2)$.

Теорема 1 доказана.

2.2. **Построение множества групп $\tilde{\mathcal{G}_4}'$.** Используя пакет CARAT, получаем множество $\mathcal{G}_4$ представителей всех (227) $\mathbb{Q}$-классов конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$. Для каждой группы G из $\mathcal{G}_4$ проверяем условие $-E_4 \in G$, и для тех групп G, для которых оно выполняется, при помощи GAP вычисляем $m_1(G)$. Соответствующие результаты собраны в следующей таблице 1. Каждая строка таблицы 1 содержит следующие элементы.

1) Номер некоторой группы G из $\mathcal{G}_4$ (нумерация групп в $\mathcal{G}_4$ взята из пакета CARAT).
2) Порядок группы G.
3) Число $m_1(G)$, если $-E_4 \in G$, и пустое место в противном случае.

Таблица 1 позволяет непосредственно найти группы, содержащиеся в $\tilde{\mathcal{G}_4}' = \{G \in \mathcal{G}_4 : -E_4 \in G, m_1(G) > 8\}$. Строки таблицы 1, соответствующие группам из $\tilde{\mathcal{G}_4}'$, выделены жирным шрифтом. Группу, соответствующую строке i-й строке для $i \in \{1, \dots, 227\}$, будем обозначать через $G_{4,i}$.

Таблица 1.

n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$
1	1		2	2	2	3	2		4	2	
5	4	2	6	2		7	4	2	8	4	
9	4		10	4		11	8	2	12	16	2
13	4		14	8		15	8		16	8	2
17	4	4	18	8	4	19	16	2	20	4	
21	4		22	8	2	23	8		24	8	

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
25	8		26	16	2	27	16		28	16	
29	16		30	16	2	31	16	2	32	32	2
33	4		34	8		35	8		36	8	
37	8		38	8		39	8		40	8	2
41	16	4	42	16	4	43	16	4	44	16	4
45	16	4	46	32	4	47	32	4	48	32	4
49	32	4	50	64	4	51	8	4	52	3	
53	6	6	54	12	6	55	6		56	12	2
57	12	2	58	12		59	12		60	12	
61	24	2	62	3		63	6	2	64	6	
65	6		66	6		67	6		68	12	2
69	12		70	12		71	12		72	12	2
73	12		74	12		75	12		76	12	
77	12		78	12		79	24	2	80	24	2
81	24		82	24		83	24		84	24	
85	24	2	86	48	2	87	6		88	6	
89	6		90	12		91	12		92	12	
93	24	4	94	24		95	24		96	24	
97	24		98	24		99	24		100	24	
101	24	4	102	24		103	24		104	48	4
105	48		106	48		107	48		108	48	4
109	48	4	110	48	4	111	96	4	112	12	6
113	12		114	144	6	115	18	6	116	18	
117	18		118	18		119	18		120	24	6
121	36	6	122	36	6	123	36	6	124	36	
125	36		126	36		127	36		128	36	
129	36		130	36		131	6		132	72	6
133	72	6	134	72	6	135	72		136	72	
137	9		138	12		139	24	2	140	24	
141	24		142	24		143	24		144	24	
145	24		146	48	2	147	48	2	148	48	
149	48		150	48		151	48	2	152	48	
153	96	2	**154**	**1152**	**24**	155	128	8	**156**	**144**	**24**
157	16	8	158	16	8	159	16	8	160	192	8
161	192	8	162	192	8	**163**	**192**	**24**	164	24	8
165	**24**	**24**	**166**	**24**	**24**	**167**	**24**	**24**	**168**	**288**	**24**
169	32	8	170	32	8	171	32	8	172	32	8
173	32	8	174	384	8	175	48	8	**176**	**48**	**24**
177	**48**	**24**	**178**	**48**	**24**	**179**	**576**	**24**	**180**	**576**	**24**
181	64	8	182	64	8	183	64	8	184	64	8
185	**72**	**24**	186	8	8	187	96	8	**188**	**96**	**24**
189	**96**	**24**	**190**	**96**	**24**	191	16	8	192	8	8
193	**12**	**12**	**194**	**144**	**12**	**195**	**144**	**12**	**196**	**144**	**12**
197	**144**	**12**	198	18		**199**	**24**	**12**	**200**	**24**	**12**
201	**24**	**12**	**202**	**288**	**12**	**203**	**36**	**12**	**204**	**36**	**12**
205	36		206	36		**207**	**48**	**12**	**208**	**72**	**12**
209	**72**	**12**	**210**	**72**	**12**	**211**	**72**	**12**	**212**	**72**	**12**
213	72		214	72		**215**	**12**	**12**	**216**	**24**	**12**
217	120		218	120		**219**	**120**	**20**	220	20	
221	**240**	**20**	**222**	**40**	**10**	223	60		**224**	**10**	**10**
225	10		**226**	**20**	**10**	227	5				

2.3. **Группы из $\tilde{\mathcal{G}}_4{}'$ со своими порождающими.** В настоящем разделе указаны все 40 группы из $\tilde{\mathcal{G}}_4{}'$ со своими порождающими. Они были получены с помощью пакета CARAT и системы GAP в соответствии с таблицей 1, приведенной в предыдущем разделе.

$$G_{4,154} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,156} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,163} = \langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,165} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,166} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,167} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,168} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,176} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,177} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,178} = \langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,179} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,180} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,185} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,188} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,189} = \langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,190} = \langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,193} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,194} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,195} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,196} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,197} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,199} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,200} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,201} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,202} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,203} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,204} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,207} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,208} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,209} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,210} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,211} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,212} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,215} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,216} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{4,219} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,221} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,222} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,224} = \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{4,226} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

2.4. **Свойства групп из $\tilde{\mathcal{G}}_4{}'$.** Следующие свойства групп из $\tilde{\mathcal{G}}_4{}'$, приведенных в предыдущем разделе, частью проверены при помощи GAP и Maple, частью же (оценка $m(G) \le m_1(G)$) следуют из таблицы 1 в §2.2. Эти свойства применяются в §2.1 для доказательства теоремы 1.

Свойство 1_2.

$$G_{4,154} > G_{4,166};$$
$$m(G_{4,154}) \le 24.$$

Свойство 2_2.

$$G_{4,156} > G_{4,166}^{a_{4,1}}, \text{ где } a_{4,1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$
$$m(G_{4,156}) \le 24.$$

Свойство 3_2.

$$G_{4,163} > G_{4,166};$$
$$m(G_{4,163}) \le 24.$$

Свойство 4_2.

Для $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 \setminus \{0\}$ справедливо

$$e_1 G_{4,165} b_{4,1} = (x_1, x_2, x_3, x_4) G_{4,165},$$

$$\text{где } b_{4,1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 + x_2 & x_4 & x_4 - x_3 \\ x_4 - x_3 & x_2 - x_4 & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & x_2 \\ x_2 - x_4 & x_3 - x_4 & -x_2 & x_1 + x_3 - x_4 \end{pmatrix};$$

$$e_1 G_{4,165} = e_1 G_{4,166}.$$

Свойство 5_2**.**
$$e_2, e_3, e_4 \in e_1 G_{4,166}.$$

Свойство 6_2**.**
$$G_{4,167}^{a_{4,2}} = G_2, \text{ где}$$
$$a_{4,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_2 \text{ — группа из теоремы 1.}$$

Свойство 7_2**.**
$$G_{4,168} > G_{4,167};$$
$$m(G_{4,168}) \le 24.$$

Свойство 8_2**.**
$$G_{4,176} > G_{4,165};$$
$$m(G_{4,176}) \le 24.$$

Свойство 9_2**.**
$$G_{4,177} > G_{4,165};$$
$$m(G_{4,177}) \le 24.$$

Свойство 10_2**.**
$$G_{4,178} > G_{4,167}^{a_{4,2}};$$
$$m(G_{4,178}) \le 24.$$

Свойство 11_2**.**
$$G_{4,179} > G_{4,165};$$
$$m(G_{4,179}) \le 24.$$

Свойство 12_2**.**
$$G_{4,180} > G_{4,165};$$
$$m(G_{4,180}) \le 24.$$

Свойство 13_2**.**
$$G_{4,185} > G_{4,165};$$
$$m(G_{4,185}) \le 24.$$

Свойство 14_2**.**
$$G_{4,188} > G_{4,165};$$
$$m(G_{4,188}) \le 24.$$

Свойство 15_2**.**
$$G_{4,189} > G_{4,165};$$
$$m(G_{4,189}) \le 24.$$

Свойство 16_2**.**
$$G_{4,190} > G_{4,165};$$
$$m(G_{4,190}) \le 24.$$

Свойство 17_2**.**
$$\text{Для } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 \setminus \{0\} \text{ справедливо}$$
$$e_1 G_{4,193} b_{4,2} = (x_1, x_2, x_3, x_4) G_{4,193}, \text{ где}$$

$$b_{4,2} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1+x_2 & -x_4 & x_3+x_4 \\ -x_3-x_4 & x_4 & x_1+x_2 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix};$$

$$e_1G_{4,193} = e_1G_{4,224}.$$

Свойство 18_2**.**

$$G_{4,194} > G_{4,193};$$
$$m(G_{4,194}) \le 12.$$

Свойство 19_2**.**

$$G_{4,195} > G_{4,204};$$
$$m(G_{4,195}) \le 12.$$

Свойство 20_2**.**

$$G_{4,196} > G_{4,209};$$
$$m(G_{4,196}) \le 12.$$

Свойство 21_2**.**

$$G_{4,197} > G_{4,215};$$
$$m(G_{4,197}) \le 12.$$

Свойство 22_2**.**

$$G_{4,199} > G_{4,215};$$
$$m(G_{4,199}) \le 12.$$

Свойство 23_2**.**

$$G_{4,200} > G_{4,193};$$
$$m(G_{4,200}) \le 12.$$

Свойство 24_2**.**

$$G_{4,201} > G_{4,215};$$
$$m(G_{4,201}) \le 12.$$

Свойство 25_2**.**

$$G_{4,202} > G_{4,215};$$
$$m(G_{4,202}) \le 12.$$

Свойство 26_2**.**

$$G_{4,203} > G_{4,193};$$
$$m(G_{4,203}) \le 12.$$

Свойство 27_2**.**

Для $(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$ справедливо

$$e_3G_{4,204}b_{4,3} = (x_1e_3 + x_2e_4)G_{4,204}, \text{ где}$$

$$b_{4,3} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & -x_2 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & -x_2 & x_1+x_2 \end{pmatrix};$$

$$e_3G_{4,204} = e_1G_{4,215}.$$

Свойство 28_2**.**

$$G_{4,207} > G_{4,215}^{a_{4,3}}, \text{ где } a_{4,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$m(G_{4,207}) \leq 12.$$

Свойство 29_2**.**

$$G_{4,208} > G_{4,193};$$

$$m(G_{4,208}) \leq 12.$$

Свойство 30_2**.**

$$(e_1 - 2e_2)G_{4,209}a_{4,4} = e_1 G_{4,224}, \text{ где } a_{4,4} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_4 G_{4,209} = e_1 G_{4,224}.$$

Свойство 31_2**.**

$$G_{4,210} > G_{4,215};$$

$$m(G_{4,210}) \leq 12.$$

Свойство 32_2**.**

$$G_{4,211} > G_{4,204};$$

$$m(G_{4,211}) \leq 12.$$

Свойство 33_2**.**

$$G_{4,212} > G_{4,204};$$

$$m(G_{4,212}) \leq 12.$$

Свойство 34_2**.**

$$e_1 G_{4,215} = \pm\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 - e_2, e_3 - e_4\}.$$

Свойство 35_2**.**

$$G_{4,216} > G_{4,215}^{a_{4,5}}, \text{ где } a_{4,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$m(G_{4,219}) \leq 12.$$

Свойство 36_2**.**

$$G_{4,219} > G_{4,224}^{a_{4,9}}, \text{ где } a_{4,9} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$|(1,2,3,4)G_{4,219}| = 10.$$

Свойство 37_2**.**

$$G_{4,221} > G_{4,224};$$

$$|(1,2,3,4)G_{4,221}| = 10.$$

Свойство 38_2**.**

$$G_{4,222} > G_{4,224}^{a_{4,10}}, \text{ где } a_{4,10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$m(G_{4,222}) \leq 10.$$

Свойство 39_2**.**

$$e_1 G_{4,224} = \pm\{e_1, e_3, e_4, e_1 + e_2, e_2 + e_3 + e_4\}.$$

Свойство 40_2**.**

$$G_{4,226} > G_{4,224};$$
$$m(G_{4,226}) \leq 10.$$

2.5. **Дополнительные свойства групп из** $\tilde{\mathcal{G}}_4{}'$**.** В приведенной ниже таблице 2 собраны результаты работы алгоритма A1 из §1.5 для некоторых групп из $\tilde{\mathcal{G}}_4{}'$. Они применяются в §2.1 для доказательства теоремы 1. Каждая строка таблицы 2 состоит из следующих 7 элементов (в некоторых строках некоторые элементы отсутствуют).

1) Номер стоки.

2) Группа G из $\tilde{\mathcal{G}}_4{}'$.

3) Число $c_1(G)$, вычисленное с помощью алгоритма A1.

4) Число $m(G)$, равное $\frac{|G|}{c_1(G)}$ в силу (1) ($|G|$ взято из таблицы 1).

5) Множество D, полученное в результате применения алгоритма A1 к группе G.

6) Число итераций основного цикла алгоритма A1 для группы G.

7) Полученное с помощью пакета CARAT число классов сопряженных конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, на которые распадается класс сопряженных относительно $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, содержащий группу G.

Таблица 2.

	G	$c_1(G)$	$m(G)$	D	t_1	кл.
1	$G_{4,165}$	1	24	$\mathbb{Q}^4$	2	1
2	$G_{4,166}$	1	24	$\mathbb{Q}^4$	2	1
3	$G_{4,167}$	1	24	$\mathbb{Q}^4$	2	1
4	$G_{4,193}$	1	12	$\mathbb{Q}^4$	2	1
5	$G_{4,204}$	3	12	$\langle e_3, e_4\rangle_{\mathbb{Q}}$	50	2
6	$G_{4,209}$	6	12	$\{\langle e_1 - 2e_2\rangle_{\mathbb{Q}}, \langle e_4\rangle_{\mathbb{Q}}\}$	1730	3
7	$G_{4,215}$	1	12	$\mathbb{Q}^4$	2	1
8	$G_{4,224}$	1	10	$\mathbb{Q}^4$	2	1

3. Минимальные графы Кэли группы $\mathbb{Z}^5$ и пределы графов минимальной валентности для вершинно-примитивных групп HA-типа

Настоящий параграф посвящен описанию классов $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ и $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$ для $d = 5$.

В §3.1 доказывается теорема 2. При этом используются технические результаты, приведенные в §3.2, полученные с использованием системы GAP.

3.1. **Доказательство теоремы 2.** Используя пакет CARAT, получаем множество $\mathcal{G}_5$ представителей всех (955) классов сопряженных в $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$. Далее, выбираем из него подмножество $\tilde{\mathcal{G}_5}'$, по определению равное $\{G \in \mathcal{G}_5 : -E_5 \in G, m_1(G) > 10\}$ (подробности о том, как это делается, описаны в §3.2). В результате получаем, что $\tilde{\mathcal{G}_5}'$ состоит из групп $H_1 := \langle g_1, g_2\rangle$, $H_2 := \langle H_1, g_3\rangle$, $H_3 := \langle g_4, g_5\rangle$, $H_4 := \langle H_1, g_3^2\rangle$, где

$$g_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_3 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, g_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

По теореме 1.2 и предложению 1.6 имеем $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^5) = \{\Gamma_5\} \cup \bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_5}'} \mathcal{OG}^{min}(G)$.

В результате вызова алгоритма A1 из §1.5 для группы $G = H_1$ на выходе было получено $c_1(H_1) = 10$, $t = 13706$ и $D = \{\langle e_5\rangle_{\mathbb{Q}}\}$. Поэтому в силу замечания из §1.5 имеем $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(H_1) \subseteq \{xH_1 : x \in \langle e_5\rangle_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}\}$. Поскольку $M_{5,2} = e_5 H_1 \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(H_1)$, то по теореме 1.1($a$) имеем $\mathcal{OG}^{min}(H_1) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^5, M_{5,2}}\}$.

Далее, поскольку $H_2, H_4 > H_1$ и $m(H_1) = |M_{5,2}| = 12$ и $e_1 H_2 = e_1 H_4 = M_{5,2}$, то из предложения 1.8 следует, что $\mathcal{OG}^{min}(H_2), \mathcal{OG}^{min}(H_4) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(H_1)$.

Поскольку $H_3 > H_1^g$ для

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и $m_1(H_3) = 12$ (см. строку 950 таблицы 3 из §3.2), то по предложению 1.8 имеем $\mathcal{OG}^{min}(H_3) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(H_1)$.

Итак, $\mathcal{OG}^{min}(G) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(H_1) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^5, M_{5,2}}\}$ для каждой группы $G \in \tilde{\mathcal{G}_5}'$. Следовательно, $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^5) = \{\Gamma_5, \Gamma_{\mathbb{Z}^5, M_{5,2}}\}$. По предложению 1.5 имеем $\Gamma_5 \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$. Для доказательства теоремы 2, таким образом, осталось показать, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^5, M_{5,2}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$.

Применяя лемму 1.3, найдем число p_0, такое что для всех простых $p > p_0$ и для каждого $x \in \mathbb{Z}_p^4 \setminus \{0\}$ справедливо неравенство $|x\phi_p(H_1)| \geq 12$. Положим

$P = \{p \in \mathbb{N} : p$ — простое, $p > \max\{p_0, 120\}, p \equiv 2$ или $3 (\bmod 5)\}$. Покажем, что для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(H_1)$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^5$. Предположим противное: пусть для некоторого $p \in P$ существует собственное $\phi_p(H_1)$-допустимое подпространство U. Поскольку $p > 120 = |H_1|$, то по теореме Машке без ограничения общности можно считать, что $\dim(U) \leq 2$. Поскольку $H_1 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{A}_5$, то по выбору p_0 группа $\mathrm{GL}_{\dim(U)}(p)$ содержит подгруппу, изоморфную A_5, что невозможно при $p \equiv 2$ или $3 (\bmod 5)$. Следовательно, для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(H_1)$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^5$ и по предложению 1.4 имеем $\Gamma_{\mathbb{Z}^5, M_{5,2}} \in \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$.

Теорема 2 доказана.

3.2. **Построение множества групп $\tilde{\mathcal{G}_5}'$.** Используя пакет CARAT, получаем множество $\mathcal{G}_5$ представителей всех (955) классов сопряженных в $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$. Для каждой группы G из $\mathcal{G}_5$ проверяем условие $-E_5 \in G$, и для тех групп G, для которых оно оказалось выполнено, при помощи GAP вычисляем $m_1(G)$. Соответствующие результаты собраны в следующей таблице 3. Каждая строка таблицы 3 содержит следующие элементы.

1) Номер некоторой группы G из $\mathcal{G}_5$ (нумерация групп в $\mathcal{G}_5$ взята из пакета CARAT).

2) Порядок группы G.

3) Число $m_1(G)$, если $-E_5 \in G$, и пустое место в противном случае.

Таблица 3 позволяет непосредственно найти группы, содержащиеся в $\tilde{\mathcal{G}_5}' = \{G \in \mathcal{G}_5 : -E_5 \in G, m_1(G) > 10\}$. Строки таблицы 3, соответствующие группам из $\tilde{\mathcal{G}_5}'$, выделены жирным шрифтом.

Таблица 3.

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
1	1		2	2	2	3	2		4	2	
5	4	2	6	2		7	2		8	4	2
9	4		10	4		11	4		12	8	2
13	4		14	4		15	4		16	8	2
17	16	2	18	4		19	4		20	8	2
21	8		22	8		23	8		24	8	
25	16	2	26	16		27	16		28	16	
29	32	2	30	8		31	8		32	8	
33	4		34	4		35	8	2	36	16	2
37	8		38	8		39	8		40	16	2
41	4		42	4		43	8		44	8	
45	8		46	8	2	47	16	2	48	16	2
49	16		50	16		51	16		52	16	
53	16		54	16		55	16	2	56	32	2
57	4		58	4		59	8		60	8	
61	8		62	8		63	8		64	8	
65	8		66	8	2	67	8		68	8	
69	8		70	8		71	16	2	72	16	
73	16		74	16		75	16		76	16	
77	16		78	16		79	16		80	16	
81	16		82	16		83	16	2	84	16	

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
85	16		86	16		87	16		88	32	2
89	32	2	90	32		91	32		92	32	
93	32		94	32		95	32		96	32	2
97	64	2	98	8		99	8		100	8	
101	8		102	8		103	8		104	128	2
105	16		106	16		107	16		108	16	
109	16		110	16		111	16		112	16	2
113	16		114	16		115	16		116	16	
117	16		118	16		119	16		120	16	
121	16		122	16		123	32	2	124	32	2
125	32		126	32		127	32		128	32	
129	32		130	32		131	32		132	32	
133	32		134	32		135	32		136	32	
137	32		138	32		139	32		140	32	
141	32		142	32		143	32		144	32	
145	32		146	32		147	32	2	148	32	2
149	32	2	150	64	2	151	64	2	152	64	2
153	64	2	154	64		155	64		156	64	
157	64		158	64		159	64		160	8	
161	8		162	8		163	12	2	164	3	
165	6		166	6		167	6	2	168	12	
169	12		170	12		171	12	2	172	24	2
173	6		174	6		175	12	2	176	12	2
177	12		178	12		179	12		180	24	2
181	3		182	6	2	183	6		184	6	
185	6		186	6		187	12	2	188	12	2
189	12	2	190	12		191	12		192	12	
193	12		194	12		195	12		196	12	
197	12		198	12		199	12		200	12	
201	12		202	12		203	12		204	12	
205	24	2	206	24	2	207	24	2	208	24	2
209	24		210	24		211	24		212	24	
213	24		214	24		215	48	2	216	6	
217	6		218	6		219	6		220	6	
221	6		222	12		223	12		224	12	
225	12		226	12		227	12		228	12	
229	12		230	12		231	12		232	12	
233	24	2	234	24	2	235	24		236	24	2
237	24		238	24		239	24		240	24	
241	24		242	24		243	24		244	24	2
245	24		246	24		247	24		248	24	
249	24		250	24		251	24		252	24	
253	24		254	24		255	24		256	48	2
257	48	2	258	48	2	259	48		260	48	
261	48		262	48	2	263	48		264	48	
265	48		266	96	2	267	12		268	12	
269	12		270	12		271	12		272	12	
273	192	2	274	24	2	275	24		276	24	
277	24		278	24		279	24		280	24	
281	24		282	24		283	24		284	24	
285	24	2	286	24		287	24		288	24	
289	24		290	24		291	24		292	24	

n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$
293	24		294	24	2	295	24		296	24	
297	24		298	24		299	24		300	24	
301	24		302	24		303	24		304	24	
305	24		306	24		307	24		308	24	
309	24		310	24		311	24		312	24	
313	24		314	24		315	24		316	48	2
317	48	2	318	48	2	319	48		320	48	
321	48		322	48		323	48		324	48	
325	48	2	326	48	2	327	48	2	328	48	2
329	48		330	48		331	48		332	48	
333	48		334	48		335	48	2	336	48	2
337	48		338	48		339	48		340	48	
341	48		342	48		343	48		344	48	
345	48		346	48		347	48		348	48	
349	48		350	48	2	351	48	2	352	48	
353	48		354	48		355	48		356	48	
357	48		358	48		359	48		360	48	
361	48		362	48		363	48		364	48	
365	48		366	48		367	48		368	48	
369	48		370	96	2	371	96	2	372	96	2
373	96		374	96		375	96		376	96	
377	96		378	96	2	379	96		380	96	2
381	96	2	382	96		383	96	2	384	96	
385	96		386	12		387	12		388	12	
389	12		390	12		391	12		392	12	2
393	144	2	394	144	2	395	144	2	396	144	2
397	144		398	144		399	144		400	144	2
401	144		402	144		403	144		404	18	2
405	18		406	18		407	18		408	18	
409	18		410	18		411	18		412	18	
413	18		414	18		415	24	2	416	24	2
417	24		418	24		419	24		420	24	
421	288	2	422	36	2	423	36	2	424	36	2
425	36	2	426	36	2	427	36		428	36	
429	36		430	36		431	36		432	36	
433	36		434	36		435	36		436	36	
437	36		438	36		439	36		440	36	
441	36		442	36		443	36		444	36	
445	36		446	36		447	36		448	36	
449	36		450	36		451	36		452	36	
453	36		454	36		455	36		456	36	
457	36		458	36		459	36		460	48	2
461	6		462	6		463	72	2	464	72	2
465	72	2	466	72	2	467	72	2	468	72	2
469	72	2	470	72		471	72		472	72	
473	72		474	72		475	72	2	476	72	
477	72	2	478	72		479	72		480	72	
481	72		482	72		483	72		484	72	
485	72	2	486	72		487	72		488	72	
489	72		490	72		491	72		492	72	
493	72		494	72		495	72		496	72	
497	72		498	72		499	72		500	72	

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
501	9		502	12		503	24	2	504	24	
505	24		506	24		507	24		508	24	
509	24		510	48	2	511	48	2	512	48	
513	48		514	48		515	48	2	516	48	
517	96	2	518	192	2	519	24		520	24	
521	24		522	24		523	48	2	524	48	
525	48		526	48		527	48	2	528	48	
529	48		530	48		531	48		532	48	
533	48		534	48		535	48		536	48	
537	48		538	48		539	96	2	540	96	2
541	96		542	96	2	543	96		544	96	
545	96		546	96		547	96	2	548	96	
549	192	4	550	192	4	551	192		552	192	
553	192		554	192		555	192		556	192	
557	192	4	558	192	4	559	384	4	560	48	
561	48		562	48		563	48		564	96	
565	96		566	96		567	96	4	568	96	
569	96		570	96		571	96		572	96	
573	96		574	96		575	96		576	96	
577	96		578	96		579	96	4	580	12	
581	144	6	582	144		583	144		584	144	6
585	144	6	586	144		587	144		588	144	
589	144		590	144		591	144	6	592	144	
593	144		594	144		595	144		596	144	
597	144		598	144		599	144		600	144	6
601	144		602	144		603	144		604	24	6
605	24		606	24		607	24		608	24	
609	288	6	610	288	6	611	288	6	612	288	6
613	288		614	288		615	288		616	288	
617	288		618	288	6	619	288		620	36	
621	48	6	622	48		623	48		624	48	6
625	48		626	576	6	627	72	6	628	72	
629	72		630	72		631	72		632	72	
633	72		634	72		635	72		636	72	
637	72		638	96	6	639	16	2	640	16	
641	16		642	16		643	32	2	644	8	
645	8		646	1152	2	647	1152		648	1152	
649	1152	2	650	1152		651	128		652	128	
653	128		654	128		655	128		656	128	
657	128	2	658	128	2	659	128	2	660	128	2
661	144	2	662	144		663	144		664	16	2
665	16		666	16		667	16		668	16	
669	16		670	16		671	16		672	16	
673	16		674	16		675	16		676	192	
677	192		678	192		679	192		680	192	2
681	192	2	682	192	2	683	192		684	192	
685	192	2	686	192		687	192		688	192	
689	192		690	2304	2	691	24		692	24	
693	24		694	24		695	24		696	24	
697	256	2	698	288		699	288	2	700	32	
701	32		702	32		703	32		704	32	
705	32		706	32		707	32		708	32	

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
709	32		710	32		711	32		712	32	
713	32		714	32		715	32		716	32	
717	32		718	32		719	32	2	720	32	2
721	32	2	722	384	2	723	384	2	724	384	
725	384		726	384		727	384	2	728	384	
729	384	2	730	48	2	731	48		732	48	
733	48		734	48		735	48	2	736	48	2
737	48		738	48		739	48		740	48	
741	48	2	742	48		743	48		744	576	2
745	576		746	576		747	576		748	576	
749	64	2	750	64		751	64		752	64	
753	64		754	64		755	64		756	64	
757	64		758	64		759	64		760	64	
761	64		762	64		763	64		764	64	
765	64		766	64		767	64	2	768	64	2
769	64	2	770	64	2	771	72		772	768	2
773	8		774	8		775	96	2	776	96	2
777	96		778	96		779	96		780	96	
781	96		782	96		783	96		784	96	2
785	96		786	96	2	787	12		788	12	
789	24	2	790	24		791	24		792	24	
793	48	2	794	12		795	12		796	144	2
797	144	2	798	144	2	799	144	2	800	144	2
801	144	2	802	144		803	144		804	144	
805	144		806	144		807	144		808	144	
809	144		810	144		811	144		812	144	2
813	144		814	144		815	144		816	144	
817	144		818	144		819	144		820	144	
821	144		822	18		823	18		824	24	2
825	24		826	24		827	24		828	24	
829	24		830	24		831	24		832	24	
833	24		834	24		835	24		836	288	2
837	288	2	838	288		839	288		840	288	
841	288		842	288		843	288		844	288	2
845	288	2	846	36	2	847	36		848	36	
849	36		850	36		851	36		852	36	
853	36		854	36		855	36		856	36	
857	48	2	858	48	2	859	48	2	860	48	
861	48		862	48		863	48		864	48	
865	48		866	576	2	867	72	2	868	72	2
869	72	2	870	72	2	871	72		872	72	
873	72		874	72		875	72		876	72	
877	72		878	72		879	72		880	72	
881	72		882	72		883	72		884	72	
885	72		886	72		887	72		888	72	
889	72		890	72		891	72		892	72	
893	72		894	72		895	72		896	72	
897	96	2	898	10		899	10		900	10	
901	10		902	10	2	903	20	2	904	20	2
905	20		906	20		907	20		908	40	2
909	5		910	120	2	911	120		912	120	
913	120		914	120		915	120		916	120	

n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$
917	20		918	20		919	240	2	920	240	2
921	240	2	922	240		923	240		924	240	
925	240		926	40	2	927	40		928	40	
929	40		930	480	2	931	60		932	80	2
933	160	10	934	160		935	160		936	1920	10
937	1920		938	1920		939	320		940	320	
941	320	10	942	3840	10	943	640	10	944	80	
945	960		946	120		947	120		**948**	**120**	**12**
949	**1440**	**12**	**950**	**240**	**12**	951	360		952	60	
953	720		954	720		**955**	**720**	**12**			

Группы, отвечающие четырем выделенным строкам 948, 949, 950, 955 приведены в §3.1, где они обозначены через H_1, H_2, H_3, H_4 соответственно.

4. Минимальные графы Кэли группы $\mathbb{Z}^6$ и пределы графов минимальной валентности для вершинно-примитивных групп HA-типа

Настоящий параграф посвящен описанию классов $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ и $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$ для $d = 6$.

В §4.1 доказываются теорема 3 и следствие 1. При этом используются технические результаты, приведенные в §§4.2-4.5, полученные с использованием систем GAP [4] и Maple [7].

4.1. **Доказательство теоремы 3.** Используя пакет CARAT, получаем множество $\mathcal{G}_6$ представителей всех (7104) классов сопряженных в $\mathrm{GL}_6(\mathbb{Q})$ конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$. Далее, выбираем из него подмножество $\tilde{\mathcal{G}_6}'$, по определению равное $\{G \in \mathcal{G}_6 : -E_6 \in G, m_1(G) > 12\}$ (подробности о том, как это делается, описаны в §4.2). Группы из $\tilde{\mathcal{G}_6}'$ явно перечислены в §2.3. По теореме 1.2 и предложению 1.6 имеем $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^6) = \{\Gamma_6\} \cup \bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_6}'} \mathcal{OG}^{min}(G)$.

При нахождении класса $\bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_6}'} \mathcal{OG}^{min}(G)$ мы будем использовать свойства групп из $\tilde{\mathcal{G}_6}'$, приведенные в §4.4 и §4.5.

Для нахождения класса $\bigcup_{G \in \tilde{\mathcal{G}_6}'} \mathcal{OG}^{min}(G)$ сначала найдем классы $\mathcal{OG}^{min}(H)$ для $H \in \tilde{\mathcal{G}_6}''$, где $\tilde{\mathcal{G}_6}'' := \{G_{6,2845}, G_{6,2885}, G_{6,2886}, G_{6,2901}, G_{6,2922}, G_{6,2929}, G_{6,2940}, G_{6,2948}, G_{6,2953}\} \subset \tilde{\mathcal{G}_6}'$.

Из строки 1 таблицы 5 из §4.5 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2845}) \subseteq \{xG_{6,2845} : x \in (U_1 \cup U_2) \setminus \{0\}\}$, где $U_1 = \langle(1,-2,-1,-1,0,0), (0,1,1,1,0,-1)\rangle_{\mathbb{Q}}$, $U_2 = \langle(0,1,0,1,1,0), (0,0,1,1,0,0)\rangle_{\mathbb{Q}}$. Поэтому из свойства 19_4 из §4.4 и равенства $F_1 = G_{6,2845}$ (группа F_1 определена в теореме 3) следует, что $|M_{6,5}| = 36$, $\langle M_{6,5}\rangle_+ = \mathbb{Z}^6$, $M_{6,5} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2845})$, $m(G_{6,2845}) = 36$ и все элементы из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2845})$ попарно линейно эквивалентны. Таким образом, из теоремы 1.1(a) следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{6,2845}) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6, M_{6,5}}\}$.

Из строки 2 таблицы 5 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2885}) \subseteq \{xG_{6,2885} : x \in \langle e_3, e_5 + e_6\rangle_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}\}$. Поэтому из свойства 34_4 и равенства $F_3 = G_{6,2885}$ (группа F_3 определена в теореме 3) следует, что $M_{6,7} = e_1G_{6,2885}$, $|M_{6,7}| = 54$, $\langle M_{6,7}\rangle_+ = \mathbb{Z}^6$, $M_{6,7} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2885})$, $m(G_{6,2885}) = 54$ и все элементы из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2885})$ попарно линейно эквивалентны. Таким образом, из теоремы 1.1(a) следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{6,2885}) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6, M_{6,7}}\}$.

Из строки 3 таблицы 5 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2886}) \subseteq \{xG_{6,2886} : x \in (U_1 \cup U_2) \setminus \{0\}\}$, где $U_1 = \langle(1,-2,0,0,1,-1)\rangle_{\mathbb{Q}}$, $U_2 = \langle(1,-1,0,0,1,-1)\rangle_{\mathbb{Q}}$. Поэтому из свойства 35_4 следует, что все элементы из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2886}) \cup \{M_{6,7}\}$ попарно линейно эквивалентны и $m(G_{6,2886}) = |M_{6,7}| = 54$. Таким образом, из теоремы 1.1(a) следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{6,2886}) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,7}}\}$.

Из строки 6 таблицы 5 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2929}) \subseteq \{xG_{6,2929} : x \in \mathbb{Q}^6\{0\}\}$ и $c_1(G_{6,2929}) = 1$. Поэтому в силу свойства 52_4 имеем $M_{6,3} = e_1G_{6,2929} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2929})$ и $m(G_{6,2929}) = 18$, а в силу предложения 1.7 имеем $|\mathcal{OG}^{min}(G_{6,2929})| \leq 1$. Следовательно, $\mathcal{OG}^{min}(G_{6,2929}) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,3}}\}$.

Из строки 4 таблицы 5 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2901}) \subseteq \{xG_{6,2901} : x \in (U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4) \setminus \{0\}\}$, где $U_1 = \langle e_5, e_6\rangle_{\mathbb{Q}}$, $U_2 = \langle(1,0,-1,1,0,1),\ (0,1,-1,0,1,0)\rangle_{\mathbb{Q}}$, $U_3 = \langle(1,0,-1,1,1,-1),\ (0,1,-1,0,0,-1)\rangle_{\mathbb{Q}}$, $U_4 = \langle(1,0,-1,1,-1,0),\ (0,1,-1,0,-1,1)\rangle_{\mathbb{Q}}$. Поэтому из свойства 42_4 следует, что все элементы из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2901}) \cup \{M_{6,3}\}$ попарно линейно эквивалентны и $m(G_{6,2901}) = |M_{6,3}| = 18$. Таким образом, из теоремы 1.1(a) следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{6,2901}) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,3}}\}$.

Из строки 5 таблицы 5 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2922}) \subseteq \{xG_{6,2922} : x \in \langle e_5, e_6\rangle_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}\}$. Поэтому из свойства 48_4 следует, что все элементы из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2922}) \cup \{M_{6,3}\}$ попарно линейно эквивалентны и $m(G_{6,2922}) = |M_{6,3}| = 18$. Таким образом, из теоремы 1.1(a) следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{6,2922}) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,3}}\}$.

Из строки 7 таблицы 5 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2940}) = \{xG_{6,2940} : x \in \langle(1,-1,0,0,-1,0),(0,1,-1,0,0,-1)\rangle_{\mathbb{Q}}\setminus\{0\}\}$. Поэтому из свойства 56_4 и равенства $F_2 = G_{6,2940}$ (группа F_2 определена в теореме 3) следует, что $|M_{6,6}| = 42$, $\langle M_{6,6}\rangle_+ = \mathbb{Z}^6$, $M_{6,6} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2940})$, $m(G_{6,2940}) = 42$ и все элементы из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2940})$ попарно линейно эквивалентны. Таким образом, из теоремы 1.1(a) следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{6,2940}) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,6}}\}$.

Из строки 8 таблицы 5 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2948}) \subseteq \{xG_{6,2948} : x \in \mathbb{Q}^6 \setminus \{0\}\}$ и $c_1(G_{6,2948}) = 1$. Поэтому в силу свойства 61_4 имеем $M_{6,2} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2948})$ и $m(G_{6,2948}) = 14$, а в силу предложения 1.7 имеем $|\mathcal{OG}^{min}(G_{6,2948})| \leq 1$. Следовательно, $\mathcal{OG}^{min}(G_{6,2948}) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,2}}\}$.

Из строки 9 таблицы 5 и замечания из §1.5 следует, что $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2953}) \subseteq \{xG_{6,2953} : x \in (U_1 \cup U_2) \setminus \{0\}\}$, где $U_1 = \langle(0,1,-1,1,-1,3)\rangle_{\mathbb{Q}}$, $U_2 = \langle(0,1,-1,0,0,1)\rangle_{\mathbb{Q}}$. Поэтому из свойства 63_4 следует, что $M_{6,4} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2953})$, $m(G_{6,2953}) = |M_{6,4}| = 20$ и все элементы из $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(G_{6,2953})$ попарно линейно эквивалентны. Таким образом, из теоремы 1.1(a) следует, что $\mathcal{OG}^{min}(G_{6,2953}) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,4}}\}$.

Итак, мы нашли классы $\mathcal{OG}^{min}(H)$ для каждой группы $H \in \tilde{\mathcal{G}}_6{}''$ и видим, что $\bigcup_{G\in\tilde{\mathcal{G}}_6{}''} \mathcal{OG}^{min}(G) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,i}} : i \in \{2,\dots,7\}\}$. Из предложения 1.8 и содержания §4.4 следует, что для каждой группы $G \in \tilde{\mathcal{G}}_6{}' \setminus \mathcal{G}_6''$ справедливо включение $\mathcal{OG}^{min}(G) \subseteq \mathcal{OG}^{min}(H)$ для подходящей группы $H \in \tilde{\mathcal{G}}_6{}''$. Поэтому $\bigcup_{G\in\tilde{\mathcal{G}}_6{}'} \mathcal{OG}^{min}(G) = \bigcup_{G\in\tilde{\mathcal{G}}_6{}''} \mathcal{OG}^{min}(G)$ и, следовательно, $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^6) = \{\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,i}} : i \in \{1,\dots,7\}\}$.

По предложению 1.5 имеем $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,1}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$. Для завершения доказательства теоремы 3 осталось показать, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,2}}$, ..., $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,7}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$.

Покажем, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,2}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$. Применяя лемму 1.3, найдем такое число p_0, что для всех простых $p > p_0$ и для каждого $x \in \mathbb{Z}_p^6 \setminus \{0\}$ справедливо равенство $|x\phi_p(G_{6,2948})| = 14$. Положим $P = \{p \in \mathbb{N} : p — \text{простое}, p > \max\{p_0, 14\}, p \equiv 3 \text{ или } 5 (\mathrm{mod}\, 14)\}$. Покажем, что для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2948})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$. Предположим противное: пусть для некоторого $p \in P$ существует собственное $\phi_p(G_{6,2948})$-допустимое подпространство U. Поскольку $p > 14 = |G_{6,2948}|$, то по теореме Машке без ограничения общности можно считать, что $\dim(U) \leq 3$. По выбору p_0 число 14 делит $p^{\dim(U)} - 1$, что противоречит условию $p \equiv 3 \text{ или } 5 (\mathrm{mod}\, 14)$. Таким образом, для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2948})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$, и по предложению 1.4 имеем $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,2}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$.

Покажем, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,3}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$. Применяя лемму 1.3 найдем такое число p_0, что для всех простых $p > p_0$ и для каждого $x \in \mathbb{Z}_p^6 \setminus \{0\}$ справедливо равенство $|x\phi_p(G_{6,2929})| = 18$. Положим $P = \{p \in \mathbb{N} : p — \text{простое}, p > \max\{p_0, 18\}, p \equiv 5 \text{ или } 11 (\mathrm{mod}\, 18)\}$. Покажем, что для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2929})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$. Предположим противное: пусть для некоторого $p \in P$ существует собственное $\phi_p(G_{6,2929})$-допустимое подпространство U. Поскольку $p > 18 = |G_{6,2929}|$, то по теореме Машке без ограничения общности можно считать, что $\dim(U) \leq 3$. По выбору p_0 число 18 делит $p^{\dim(U)} - 1$, что противоречит условию $p \equiv 5 \text{ или } 11 (\mathrm{mod}\, 18)$. Таким образом, для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2929})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$, и по предложению 1.4 имеем $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,3}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$.

Покажем, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,4}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$. Применяя лемму 1.3, найдем такое число p_0, что для всех простых $p > p_0$ и для каждого $x \in \mathbb{Z}_p^6 \setminus \{0\}$ справедливо неравенство $|x\phi_p(G_{6,2953})| \geq 20$. Положим $P = \{p \in \mathbb{N} : p — \text{простое}, p > \max\{p_0, 240\}, p \equiv 2 \text{ или } 3 (\mathrm{mod}\, 5)\}$. Покажем, что для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2953})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$. Предположим противное: пусть для некоторого $p \in P$ существует собственное $\phi_p(G_{6,2953})$-допустимое подпространство U. Поскольку $p > 240 = |G_{6,2953}|$, то по теореме Машке без ограничения общности можно считать, что $\dim(U) \leq 3$. Поскольку $G_{6,2953} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_5$ в силу свойства 63_4, то по выбору p_0 группа $\mathrm{GL}_{\dim(U)}(p)$ содержит подгруппу, изоморфную A_5, что противоречит условию $p \equiv 2 \text{ или } 3 (\mathrm{mod}\, 5)$. Таким образом, для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2953})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$, и по предложению 1.4 имеем $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,4}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$.

Покажем, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,5}} \in \lim(\mathcal{FP}^{min}_{HA})$. Применяя лемму 1.3 найдем такое число p_0, что для всех простых $p > p_0$ и для каждого $x \in \mathbb{Z}_p^6 \setminus \{0\}$ справедливо неравенство $|x\phi_p(G_{6,2845})| \geq 36$. Положим $P = \{p \in \mathbb{N} : p — \text{простое}, p > \max\{p_0, 216\}, p \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 9)\}$. Покажем, что для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2845})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$. Предположим противное: пусть для некоторого $p \in P$ существует собственное $\phi_p(G_{6,2845})$-допустимое подпространство U. Поскольку $p > 216 = |G_{6,2845}|$, то по теореме Машке без ограничения общности можно считать, что $\dim(U) \leq 3$. По выбору p_0 порядок группы $\phi_p(G_{6,2845})|_U$ больше или равен 36, откуда, в силу равенства $|G_{6,2845}| = 2^3 3^3$ следует, что 9 делит порядок группы $\phi_p(G_{6,2845})|_U$. Поэтому 9 делит $|\mathrm{GL}_d(p)|$ для некоторого $d \in \{1, 2, 3\}$. Следовательно, 9 делит $(p^3 - 1)(p^2 - 1)(p - 1)p^3$, что противоречит условию $p \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 9)$. Таким образом, для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2845})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$, и по предложению 1.4 имеем $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,5}} \in \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$.

Покажем, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,6}} \in \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$. Применяя лемму 1.3, найдем такое число p_0, что для всех простых $p > p_0$ и для каждого $x \in \mathbb{Z}_p^6 \setminus \{0\}$ справедливо неравенство $|x\phi_p(G_{6,2940})| \geq 42$. Положим $P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ — простое}, p > \max\{p_0, 336\}, p \equiv 3 \text{ или } 5 (\operatorname{mod} 7)\}$. Покажем, что для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2940})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$. Предположим противное: пусть для некоторого $p \in P$ существует собственное $\phi_p(G_{6,2940})$-допустимое подпространство U. Поскольку $p > 336 = |G_{6,2940}|$, то по теореме Машке без ограничения общности можно считать, что $\dim(U) \leq 3$. Поскольку $G_{6,2940} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}_3(2)$ в силу свойства 56_4, то по выбору p_0 группа $\mathrm{GL}_{\dim(U)}(p)$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathrm{PSL}_3(2)$, что противоречит условию $p \equiv 3 \text{ или } 5 (\operatorname{mod} 7)$. Таким образом, для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2940})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$, и по предложению 1.4 имеем $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,6}} \in \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$.

Покажем, что $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,7}} \in \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$. Применяя лемму 1.3, найдем такое число p_0, что для всех простых $p > p_0$ и для каждого $x \in \mathbb{Z}_p^6 \setminus \{0\}$ справедливо неравенство $|x\phi_p(G_{6,2885})| \geq 54$. Положим $P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ — простое}, p > \max\{p_0, 432\}, p \equiv 2 (\operatorname{mod} 9)\}$. Покажем, что для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2885})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$. Предположим противное: пусть для некоторого $p \in P$ существует собственное $\phi_p(G_{6,2885})$-допустимое подпространство U. Поскольку $p > 432 = |G_{6,2885}|$, то по теореме Машке без ограничения общности можно считать, что $\dim(U) \leq 3$. По выбору p_0 порядок группы $\phi_p(G_{6,2885})|_U$ больше или равен 54, откуда, в силу равенства $|G_{6,2885}| = 2^4 3^3$ получаем, что 9 делит порядок группы $\phi_p(G_{6,2885})|_U$. Следовательно, 9 делит $|\mathrm{GL}_d(p)|$ некоторого $d \in \{1, 2, 3\}$. Но тогда 9 делит $(p^3-1)(p^2-1)(p-1)p^3$, что противоречит условию $p \equiv 2 (\operatorname{mod} 9)$. Таким образом, для каждого $p \in P$ группа $\phi_p(G_{6,2885})$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^6$, и по предложению 1.4 имеем $\Gamma_{\mathbb{Z}^6,M_{6,7}} \in \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$.

Теорема 3 доказана.

Следствие 1 вытекает из описания классов $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d) \cap \lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$ при $d \leq 6$ (при $d \leq 3$ оно описано в [2], а при $d = 4, 5, 6$ получено в настоящей работе), предложения 1.6 и того, что каждый граф, лежащий в $\lim(\mathcal{FP}_{HA}^{min})$, лежит в $\mathrm{Cay}^{min}(\mathbb{Z}^d)$ для некоторого d.

4.2. **Построение множества групп $\tilde{\mathcal{G}_6}'$.** Используя пакет CARAT, получаем множество $\mathcal{G}_6$ представителей всех (7104) классов сопряженных в $\mathrm{GL}_6(\mathbb{Q})$ конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$. Для каждой группы G из $\mathcal{G}_6$ проверяем условие $-E_6 \in G$, и для тех групп G, для которых оно выполняется, при помощи GAP вычисляем $m_1(G)$. Соответствующие результаты собраны в следующей таблице 4. Строки таблицы 4 соответствуют группам G, для которых $-E_6 \in G$, и содержат следующие элементы.

1) Номер группы G из $\mathcal{G}_6$ (нумерация групп в $\mathcal{G}_6$ взята из пакета CARAT).

2) Порядок группы G.

3) Число $m_1(G)$.

Таблица 4 позволяет непосредственно найти группы, содержащиеся в $\tilde{\mathcal{G}_6}' = \{G \in \mathcal{G}_6 : -E_6 \in G, m_1(G) > 12\}$. Строки таблицы 4, соответствующие группам из $\tilde{\mathcal{G}}_6{}'$, выделены жирным шрифтом. Через $G_{6,i}$ будем обозначать i-ую группу из $\mathcal{G}_6$ для $i \in \{1,\ldots,7104\}$.

Таблица 4.

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
4	4	2	7	4	2	11	8	2	13	4	2
18	8	2	22	24	4	25	24	4	26	48	4
34	48	4	35	48	4	36	48	4	40	96	4
47	192	2	48	24	2	49	24	2	68	24	2
90	48	2	91	48	2	96	48	2	97	48	2
100	48	2	101	48	2	104	48	2	110	48	2
116	48	2	127	48	2	138	48	2	144	96	2
145	96	2	146	96	2	148	96	2	149	96	2
155	96	2	156	96	2	163	192	2	164	192	2
165	192	2	168	192	2	170	192	2	172	192	2
173	192	2	174	192	2	180	192	2	181	192	2
185	192	2	186	192	2	209	24	2	213	24	2
252	384	2	253	48	2	255	48	2	267	48	2
268	48	2	289	48	2	291	48	2	296	48	2
305	48	2	306	48	2	321	48	2	331	48	2
332	48	2	365	48	2	366	48	2	373	48	2
415	48	2	444	48	2	447	48	2	452	48	2
453	48	2	454	96	2	455	96	2	458	96	2
460	96	2	467	96	2	468	96	2	469	96	2
470	96	2	477	96	2	480	96	2	481	96	2
482	96	2	494	96	2	496	96	2	497	96	2
498	96	2	499	96	2	500	96	2	502	96	2
536	96	2	548	96	2	557	96	2	567	96	2
568	96	2	573	96	2	576	96	2	580	96	2
581	96	2	587	96	2	588	96	2	589	96	2
592	96	2	593	192	4	594	192	4	595	192	4
596	192	4	603	192	4	606	192	4	607	192	4
608	192	4	610	192	4	611	192	4	615	192	4
616	192	4	617	192	4	618	192	4	619	192	4
620	192	4	621	192	4	629	192	4	630	192	4
631	192	4	632	192	4	633	192	4	636	192	4
642	192	4	644	192	4	674	192	4	675	192	4
683	384	4	684	384	4	685	384	4	686	384	4
687	384	4	688	384	4	692	384	4	695	384	4
696	384	4	697	384	4	709	48	4	731	48	4
735	48	4	749	768	4	750	96	4	773	96	4
774	96	4	775	96	4	776	96	4	777	96	4
780	96	4	800	96	4	801	96	4	809	96	4
810	96	4	811	96	4	857	96	4	858	96	4
860	96	4	865	96	4	866	96	4	868	96	4
870	12	2	877	144	2	878	144	2	879	144	2
883	144	2	886	144	2	896	18	2	899	24	2
900	24	2	905	288	2	906	36	2	907	36	2
908	36	2	917	36	2	943	36	2	944	48	2
947	72	2	948	72	2	949	72	2	950	72	2
951	72	2	952	72	2	953	72	2	956	72	2
964	72	2	971	72	2	996	12	2	997	144	2

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
998	144	2	999	144	2	1000	144	2	1001	144	2
1002	144	2	1003	144	2	1004	144	2	1005	144	2
1008	144	2	1013	144	2	1016	144	2	1018	144	2
1020	144	2	1027	144	2	1031	144	2	1038	144	2
1043	144	2	1044	144	2	1046	144	2	1047	144	2
1056	144	2	1070	144	2	1092	24	2	1095	24	2
1098	24	2	1099	24	2	1112	288	2	1113	288	2
1114	288	2	1115	288	2	1116	288	2	1117	288	2
1125	288	2	1127	288	2	1128	36	2	1133	36	2
1188	36	2	1189	36	2	1190	48	2	1191	48	2
1192	48	2	1193	48	2	1199	576	2	1201	72	2
1202	72	2	1203	72	2	1204	72	2	1205	72	2
1206	72	2	1207	72	2	1208	72	2	1213	72	2
1218	72	2	1223	72	2	1228	72	2	1239	72	2
1244	72	2	1256	72	2	1258	72	2	1260	72	2
1264	72	2	1343	96	2	1344	1152	4	1346	144	4
1347	144	4	1348	144	4	1349	144	4	1353	144	4
1354	144	4	1357	144	4	1360	144	4	1363	144	4
1366	144	4	1373	144	4	1378	144	4	1390	144	4
1393	144	4	1406	144	4	1407	144	4	1420	144	4
1424	144	4	1444	144	4	1451	144	4	1452	144	4
1453	144	4	1488	192	4	1489	24	4	1500	288	4
1501	288	4	1502	288	4	1503	288	4	1504	288	4
1506	288	4	1512	288	4	1515	288	4	1517	288	4
1518	288	4	1519	288	4	1520	288	4	1525	288	4
1532	288	4	1533	288	4	1534	288	4	1536	288	4
1539	288	4	1540	288	4	1541	288	4	1542	288	4
1543	288	4	1544	288	4	1545	288	4	1555	288	4
1562	288	4	1565	288	4	1595	48	4	1596	48	4
1597	48	4	1601	48	4	1602	48	4	1605	48	4
1606	48	4	1615	576	4	1616	576	4	1617	576	4
1618	576	4	1619	576	4	1620	576	4	1621	576	4
1622	576	4	1624	576	4	1625	576	4	1631	72	4
1632	72	4	1644	72	4	1647	72	4	1693	96	4
1694	96	4	1695	96	4	1696	96	4	1697	96	4
1698	96	4	1702	108	6	1703	108	6	1704	108	6
1744	108	6	1745	108	6	1748	144	6	1749	144	6
1750	144	6	1751	144	6	1757	144	6	1758	144	6
1759	1728	6	1764	18	6	1767	216	6	1768	216	6
1769	216	6	1770	216	6	1771	216	6	1772	216	6
1773	216	6	1774	216	6	1778	216	6	1786	216	6
1788	216	6	1795	216	6	1800	216	6	1803	216	6
1843	24	6	1847	288	6	1858	36	6	1859	36	6
1870	36	6	1871	36	6	1872	432	6	1873	432	6
1874	432	6	1875	432	6	1876	432	6	1877	432	6
1881	432	6	1885	432	6	1887	432	6	1888	432	6
1897	432	6	1899	432	6	1900	432	6	1903	432	6
1916	48	6	1924	54	6	1926	72	6	1927	72	6
1932	72	6	1933	72	6	1946	72	6	1948	72	6
1952	72	6	1953	72	6	1956	864	6	1957	864	6
1959	864	6	1960	864	6	1961	864	6	1967	6	6
1968	12	2	1972	6	2	1973	12	2	1977	24	2

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
1982	24	4	1986	48	4	1987	12	6	1992	18	6
1993	36	6	1994	36	6	2000	72	6	2002	12	2
2003	12	2	2007	24	2	2013	6	2	2014	12	2
2019	12	2	2031	12	2	2032	24	2	2033	24	2
2034	24	2	2035	24	2	2042	48	2	2049	12	2
2059	12	2	2060	24	2	2061	24	2	2066	24	2
2067	48	2	2095	24	2	2100	24	2	2103	24	2
2104	24	2	2105	24	2	2109	24	2	2135	24	2
2139	48	2	2140	48	2	2143	48	2	2144	48	2
2150	48	2	2153	48	2	2154	96	2	2159	192	2
2168	24	2	2172	24	2	2198	48	2	2200	48	2
2205	48	2	2206	48	2	2207	48	2	2234	48	2
2236	48	2	2240	48	2	2242	48	2	2243	96	2
2244	96	2	2245	96	2	2249	96	2	2254	96	2
2255	96	2	2256	12	6	2258	12	2	2262	24	2
2271	12	2	2272	24	2	2275	24	2	2278	48	2
2281	24	4	2288	48	4	2289	48	4	2290	48	4
2294	96	4	2297	144	6	2301	24	6	2309	36	6
2312	36	6	2313	72	6	2314	72	6	2317	72	6
2320	128	2	2321	16	2	2339	32	2	2340	32	2
2341	32	2	2364	32	2	2365	32	2	2366	64	2
2367	64	2	2368	64	2	2369	64	2	2379	128	2
2380	128	2	2381	128	2	2382	128	2	2383	128	2
2384	128	2	2385	128	2	2386	128	2	2387	128	2
2414	16	2	2415	16	2	2426	256	2	2427	32	2
2428	32	2	2429	32	2	2433	32	2	2434	32	2
2435	32	2	2436	32	2	2437	32	2	2515	32	2
2516	32	2	2517	32	2	2518	32	2	2519	32	2
2520	64	2	2521	64	2	2522	64	2	2523	64	2
2524	64	2	2525	64	2	2526	64	2	2527	64	2
2528	64	2	2529	64	2	2536	64	2	2537	64	2
2538	64	2	2539	64	2	2540	64	2	2541	64	2
2542	64	2	2543	64	2	2544	64	2	2545	64	2
2546	64	2	2547	64	2	2548	64	2	2597	128	4
2598	128	4	2599	128	4	2600	128	4	2601	128	4
2602	128	4	2603	128	4	2604	128	4	2605	128	4
2606	128	4	2607	128	4	2608	128	4	2609	128	4
2610	128	4	2611	128	4	2612	128	4	2613	128	4
2614	128	4	2615	128	4	2616	128	4	2617	128	4
2618	128	4	2619	128	4	2620	128	4	2621	128	4
2622	128	4	2623	128	4	2624	128	4	2625	128	4
2626	128	4	2627	128	4	2628	128	4	2629	128	4
2632	16	4	2633	16	4	2634	16	4	2635	16	4
2636	256	4	2637	256	4	2638	256	4	2639	256	4
2640	256	4	2641	256	4	2642	256	4	2643	256	4
2644	32	4	2645	32	4	2646	32	4	2647	32	4
2648	32	4	2649	32	4	2650	32	4	2653	32	4
2654	32	4	2655	32	4	2656	32	4	2657	32	4
2658	32	4	2659	32	4	2660	32	4	2661	32	4
2662	32	4	2663	32	4	2664	32	4	2665	32	4
2666	512	4	2667	64	4	2668	64	4	2669	64	4
2670	64	4	2671	64	4	2672	64	4	2673	64	4

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
2674	64	4	2675	64	4	2676	64	4	2677	64	4
2678	64	4	2679	64	4	2680	64	4	2681	64	4
2682	64	4	2683	64	4	2684	64	4	2685	64	4
2686	64	4	2687	64	4	2688	64	4	2689	64	4
2690	64	4	2691	64	4	2692	64	4	2693	64	4
2694	64	4	2695	64	4	2696	64	4	2697	64	4
2698	64	4	2699	64	4	2700	64	4	2701	64	4
2702	64	4	2703	64	4	2704	64	4	2705	64	4
2706	64	4	2707	64	4	2708	64	4	2709	64	4
2710	2	2	2711	1152	12	2712	1152	12	2713	1152	12
2714	1152	12	2717	1152	12	2720	1152	12	2721	11520	12
2722	1536	12	2723	1536	12	2724	1536	12	2725	1536	12
2726	1536	12	2727	192	12	2728	192	12	2729	192	12
2734	192	12	2735	192	12	2736	192	12	2737	192	12
2738	192	12	2739	192	12	2740	192	12	2741	192	12
2742	192	12	2743	1920	12	2744	2304	12	2745	2304	12
2746	2304	12	2747	2304	12	2748	2304	12	2749	2304	12
2750	23040	12	2751	23040	12	2752	23040	12	2753	240	12
2755	3072	12	2756	384	12	2757	384	12	2758	384	12
2759	384	12	2760	384	12	2761	384	12	2762	384	12
2763	384	12	2764	384	12	2765	384	12	2766	384	12
2767	384	12	2768	384	12	2769	3840	12	2770	3840	12
2771	3840	12	2772	4608	12	2773	46080	12	2774	46080	12
2776	48	12	2777	48	12	2782	576	12	2783	576	12
2784	768	12	2785	768	12	2786	768	12	2787	768	12
2788	768	12	2789	768	12	2790	768	12	2791	7680	12
2792	96	12	2793	96	12	2794	96	12	2795	96	12
2796	96	12	2797	96	12	**2804**	**10368**	**18**	**2805**	**103680**	**54**
2806	**108**	**18**	**2813**	**108**	**18**	**2814**	**108**	**18**	**2816**	**1296**	**18**
2820	**1296**	**18**	**2823**	**1296**	**18**	**2824**	**1296**	**18**	**2827**	**1296**	**18**
2828	**1296**	**54**	**2829**	**1296**	**18**	**2830**	**1296**	**18**	**2831**	**144**	**18**
2832	**144**	**18**	**2833**	**144**	**18**	**2836**	**144**	**18**	**2839**	**162**	**18**
2845	**216**	**36**	**2846**	**216**	**18**	2853	216	18	**2855**	**216**	**18**
2856	**2592**	**54**	**2857**	**2592**	**18**	**2862**	**2592**	**18**	**2863**	**2592**	**18**
2867	**288**	**18**	**2868**	**324**	**18**	**2874**	**324**	**18**	**2875**	**324**	**18**
2882	**432**	**18**	**2883**	**432**	**18**	**2884**	**432**	**18**	**2885**	**432**	**54**
2886	**432**	**54**	**2887**	**432**	**36**	**2888**	**432**	**18**	**2889**	**5184**	**18**
2891	**5184**	**18**	**2893**	**5184**	**18**	**2896**	**51840**	**54**	**2901**	**54**	**18**
2902	**54**	**18**	**2910**	**648**	**18**	**2912**	**648**	**18**	**2913**	**648**	**18**
2918	**648**	**18**	**2922**	**72**	**18**	**2923**	**72**	**18**	**2927**	**864**	**54**
2928	**864**	**18**	**2929**	**18**	**18**	**2931**	**36**	**18**	**2933**	**10080**	**14**
2938	**336**	**14**	**2940**	**336**	**42**	**2941**	**42**	**14**	**2943**	**5040**	**14**
2946	**672**	**42**	**2947**	**84**	**14**	**2948**	**14**	**14**	**2950**	**28**	**14**
2953	**240**	**20**	2954	120	12	2956	10	2	2961	20	2
2962	20	2	2966	40	2	2971	20	2	2972	20	2
2982	40	2	2983	40	2	2988	40	2	2989	80	2
2990	160	4	2994	40	4	3000	40	4	3005	80	4
3006	80	4	3007	80	4	3010	80	4	3012	120	6
3013	120	6	3016	120	6	3019	120	6	3021	240	6
3023	30	6	3030	60	6	3034	60	6	3035	60	6
3042	60	6	3046	120	2	3055	240	2	3057	240	2
3060	240	2	3062	40	2	3066	480	2	3068	80	2

n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$
3073	160	2	3075	240	2	3076	240	2	3091	40	2
3098	480	2	3101	480	2	3104	480	2	3105	480	2
3108	80	2	3112	80	2	3114	960	2	3115	160	4
3118	160	4	3120	160	4	3121	1920	4	3127	320	4
3128	40	4	3134	480	4	3135	480	4	3149	80	4
3154	960	4	3159	960	4	3160	960	4	3161	960	4
3166	120	6	3174	120	6	3175	1440	6	3177	1440	6
3179	1440	6	3181	1440	6	3182	1440	6	3187	240	6
3189	240	6	3193	240	6	3194	2880	6	3201	360	6
3206	480	6	3210	720	6	3215	720	6	3216	720	6
3218	720	6	3232	720	6	3233	1280	2	3234	160	2
3241	1920	2	3252	320	2	3253	320	2	3255	320	2
3259	3840	2	3263	3840	2	3264	3840	2	3266	640	2
3269	640	2	3272	640	2	3273	7680	2	3282	120	2
3283	1440	2	3284	1440	2	3289	1440	2	3290	240	2
3295	240	2	3296	240	2	3297	2880	2	3299	480	2
3302	720	2	3310	24	2	3314	48	2	3316	24	2
3323	48	2	3324	48	2	3325	48	2	3329	96	2
3330	12	4	3331	192	4	3332	24	4	3333	24	4
3334	48	4	3335	48	4	3336	48	4	3337	48	4
3338	48	4	3339	48	4	3340	48	4	3341	96	4
3342	96	4	3343	96	4	3344	96	4	3345	96	4
3346	96	4	3349	144	6	3351	144	6	3353	144	6
3355	144	6	3356	24	6	3359	288	6	3363	48	6
3364	72	6	3374	72	6	3377	144	2	3378	144	2
3379	144	2	3380	144	2	3381	144	2	3382	144	2
3391	144	2	3405	24	2	3417	288	2	3418	288	2
3423	288	2	3425	288	2	3427	36	2	3438	48	2
3439	48	2	3440	48	2	3447	576	2	3448	72	2
3449	72	2	3450	72	2	3451	72	2	3478	96	2
3479	1152	2	3503	144	2	3504	144	2	3505	144	2
3506	144	2	3507	144	2	3508	144	2	3509	144	2
3514	144	2	3515	144	2	3516	144	2	3517	144	2
3527	144	2	3528	144	2	3529	144	2	3530	144	2
3531	144	2	3543	144	2	3544	144	2	3559	144	2
3577	192	2	3578	24	2	3597	288	2	3598	288	2
3599	288	2	3600	288	2	3601	288	2	3622	288	2
3628	288	2	3631	288	2	3632	288	2	3633	288	2
3634	288	2	3635	288	2	3636	288	2	3637	288	2
3638	288	2	3639	288	2	3640	288	2	3641	288	2
3642	288	2	3655	288	2	3668	36	2	3687	48	2
3688	48	2	3689	48	2	3690	48	2	3695	48	2
3696	48	2	3697	48	2	3698	48	2	3699	48	2
3707	576	2	3708	576	2	3709	576	2	3710	576	2
3711	576	2	3712	576	2	3713	576	2	3720	576	2
3721	576	2	3722	72	2	3723	72	2	3724	72	2
3731	72	2	3732	72	2	3733	72	2	3780	96	2
3781	96	2	3782	96	2	3783	96	2	3784	96	2
3791	96	2	3792	96	2	3793	96	2	3794	1152	4
3795	1152	4	3796	1152	4	3797	1152	4	3798	1152	4
3799	1152	4	3800	1152	4	3801	1152	4	3802	1152	4
3803	1152	4	3804	1152	4	3805	1152	4	3806	1152	4

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
3807	1152	4	3808	1152	4	3809	12	4	3820	144	4
3821	144	4	3822	144	4	3823	144	4	3824	144	4
3825	144	4	3826	144	4	3827	144	4	3828	144	4
3832	144	4	3833	144	4	3834	144	4	3837	144	4
3838	144	4	3839	144	4	3840	144	4	3841	144	4
3842	144	4	3845	144	4	3846	144	4	3851	144	4
3859	144	4	3860	144	4	3861	144	4	3862	144	4
3863	144	4	3864	144	4	3865	144	4	3870	144	4
3874	144	4	3875	144	4	3876	144	4	3877	144	4
3878	192	4	3879	192	4	3880	192	4	3881	192	4
3882	192	4	3883	192	4	3884	192	4	3885	192	4
3886	192	4	3887	192	4	3888	192	4	3889	192	4
3890	192	4	3891	192	4	3892	2304	4	3893	24	4
3894	24	4	3895	24	4	3896	24	4	3897	288	4
3898	288	4	3899	288	4	3900	288	4	3901	288	4
3902	288	4	3903	288	4	3904	288	4	3905	288	4
3906	288	4	3907	288	4	3908	288	4	3909	288	4
3932	288	4	3933	288	4	3934	288	4	3935	288	4
3936	288	4	3937	288	4	3938	288	4	3939	288	4
3940	288	4	3941	288	4	3942	288	4	3943	288	4
3944	288	4	3945	288	4	3946	288	4	3949	288	4
3950	288	4	3951	288	4	3952	288	4	3953	288	4
3954	288	4	3955	288	4	3956	288	4	3957	288	4
3958	288	4	3959	288	4	3960	288	4	3961	288	4
3962	288	4	3967	288	4	3968	288	4	3969	288	4
3970	288	4	3971	288	4	3972	288	4	3974	288	4
3975	288	4	3976	288	4	3980	288	4	3981	288	4
3983	288	4	3984	288	4	3986	288	4	3987	288	4
3988	288	4	3989	288	4	3990	288	4	3991	288	4
3992	288	4	3993	288	4	3994	288	4	3995	288	4
3998	36	4	3999	384	4	4000	48	4	4001	48	4
4002	48	4	4003	48	4	4004	48	4	4005	48	4
4006	48	4	4007	48	4	4008	48	4	4009	48	4
4010	48	4	4011	48	4	4012	48	4	4013	48	4
4014	48	4	4015	48	4	4016	48	4	4017	48	4
4018	48	4	4019	48	4	4020	576	4	4021	576	4
4022	576	4	4023	576	4	4024	576	4	4025	576	4
4026	576	4	4027	576	4	4028	576	4	4029	576	4
4030	576	4	4031	576	4	4032	576	4	4033	576	4
4034	576	4	4035	576	4	4036	576	4	4037	576	4
4038	576	4	4045	576	4	4046	576	4	4047	576	4
4048	576	4	4049	576	4	4050	576	4	4051	576	4
4052	576	4	4053	576	4	4054	576	4	4055	576	4
4056	576	4	4057	576	4	4058	576	4	4059	576	4
4060	576	4	4061	576	4	4062	576	4	4063	576	4
4064	576	4	4065	576	4	4066	576	4	4067	576	4
4068	576	4	4069	576	4	4070	576	4	4071	576	4
4072	576	4	4073	576	4	4074	576	4	4075	576	4
4076	576	4	4077	576	4	4078	576	4	4079	72	4
4080	72	4	4083	72	4	4084	72	4	4097	72	4
4098	72	4	4099	96	4	4100	96	4	4101	96	4
4102	96	4	4103	96	4	4104	96	4	4105	96	4

n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$
4106	96	4	4107	96	4	4108	96	4	4109	96	4
4110	96	4	4111	96	4	4112	96	4	4113	96	4
4114	96	4	4115	96	4	4116	96	4	4117	96	4
4118	96	4	4119	96	4	4120	96	4	4121	96	4
4122	96	4	4123	96	4	4124	96	4	4125	96	4
4126	96	4	4127	96	4	4128	96	4	4129	96	4
4130	96	4	4131	96	4	4132	96	4	4133	96	4
4134	96	4	4135	96	4	4136	96	4	4137	108	6
4160	108	6	4166	144	6	4167	144	6	4168	144	6
4177	144	6	4180	144	6	4181	144	6	4185	144	6
4186	144	6	4191	144	6	4192	144	6	4193	144	6
4212	144	6	4213	144	6	4214	144	6	4215	144	6
4216	144	6	4217	144	6	4218	144	6	4221	1728	6
4223	1728	6	4224	1728	6	4225	1728	6	4229	1728	6
4230	1728	6	4231	1728	6	4232	1728	6	4233	1728	6
4234	1728	6	4238	216	6	4239	216	6	4240	216	6
4241	216	6	4242	216	6	4243	216	6	4244	216	6
4245	216	6	4246	216	6	4247	216	6	4329	24	6
4334	288	6	4335	288	6	4336	288	6	4337	288	6
4338	288	6	4341	288	6	4344	288	6	4345	288	6
4346	288	6	4347	288	6	4350	3456	6	4353	36	6
4365	36	6	4388	432	6	4389	432	6	4390	432	6
4391	432	6	4392	432	6	4393	432	6	4394	432	6
4395	432	6	4396	432	6	4397	432	6	4400	432	6
4401	432	6	4402	432	6	4407	432	6	4410	432	6
4411	432	6	4414	432	6	4415	432	6	4416	432	6
4423	432	6	4424	432	6	4429	432	6	4438	432	6
4439	432	6	4448	432	6	4464	432	6	4487	48	6
4491	48	6	4492	48	6	4496	576	6	4497	72	6
4509	72	6	4510	72	6	4527	72	6	4528	72	6
4529	72	6	4532	72	6	4550	864	6	4566	864	6
4567	864	6	4573	864	6	4575	864	6	4578	864	6
4579	864	6	4582	864	6	4583	864	6	4584	864	6
4585	864	6	4586	864	6	4587	864	6	4588	864	6
4589	864	6	4590	864	6	4591	864	6	4592	864	6
4593	864	6	4602	864	6	4603	864	6	4607	864	6
4609	864	6	4616	864	6	4617	96	6	4618	16	2
4621	8	2	4628	8	2	4629	16	2	4632	8	2
4637	16	2	4638	16	2	4644	32	2	4658	16	2
4659	32	2	4660	32	2	4664	64	2	4667	4	4
4670	8	2	4671	16	2	4673	8	2	4676	16	4
4677	16	4	4678	16	4	4679	32	4	4680	8	4
4681	8	4	4682	16	2	4689	16	2	4690	16	2
4691	32	2	4696	16	4	4697	16	4	4698	16	4
4699	16	4	4700	32	4	4701	32	4	4702	32	4
4703	32	4	4704	32	4	4705	64	4	4706	16	2
4709	8	2	4713	16	2	4720	16	2	4721	16	2
4722	32	2	4725	8	2	4737	16	2	4738	16	2
4739	16	2	4743	32	2	4745	8	2	4752	16	2
4753	16	2	4774	16	2	4775	16	2	4787	32	2
4788	32	2	4789	32	2	4799	32	2	4800	32	2
4801	64	2	4816	128	2	4825	16	2	4826	16	2

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
4843	32	2	4844	32	2	4845	32	2	4850	32	2
4876	32	2	4877	32	2	4878	32	2	4879	32	2
4880	64	2	4881	64	2	4882	64	2	4883	64	2
4884	64	2	4885	64	2	4895	24	6	4898	48	6
4902	24	2	4907	48	2	4910	48	2	4913	48	2
4914	96	2	4915	192	2	4924	48	2	4929	48	2
4934	48	2	4947	48	2	4952	96	2	4953	96	2
4954	96	2	4960	96	2	4962	96	2	4965	96	2
4966	192	2	4967	192	2	4970	192	2	4971	192	2
4973	192	2	4979	192	2	4980	384	2	4996	96	2
5001	96	2	5002	96	2	5003	96	2	5026	96	2
5031	192	2	5032	192	2	5033	192	2	5034	192	2
5041	192	2	5046	192	2	5048	192	2	5051	192	2
5053	192	2	5058	192	2	5062	192	2	5064	192	2
5065	192	2	5069	192	2	5072	192	2	5114	192	2
5115	384	2	5116	384	2	5117	384	2	5118	384	2
5119	384	2	5120	384	2	5133	384	2	5134	384	2
5135	384	2	5136	384	2	5145	768	2	5146	96	2
5161	96	2	5164	96	2	5209	96	2	5210	1152	2
5212	144	2	5213	144	2	5216	144	2	5219	144	2
5220	144	2	5224	144	2	5229	144	2	5236	144	2
5255	144	2	5267	144	2	5291	144	2	5311	192	2
5314	24	2	5323	288	2	5324	288	2	5325	288	2
5326	288	2	5331	288	2	5336	288	2	5337	288	2
5338	288	2	5339	288	2	5346	288	2	5347	288	2
5348	288	2	5350	288	2	5351	288	2	5361	288	2
5365	288	2	5366	288	2	5367	288	2	5385	288	2
5395	288	2	5404	288	2	5409	288	2	5410	288	2
5423	48	2	5435	48	2	5436	48	2	5437	48	2
5442	48	2	5446	576	2	5447	576	2	5448	576	2
5449	576	2	5452	576	2	5454	576	2	5458	576	2
5459	576	2	5465	576	2	5466	576	2	5467	576	2
5469	72	2	5492	96	2	5493	96	2	5497	96	2
5501	96	2	5502	96	2	5503	1152	6	5504	1152	6
5505	1152	6	5506	1152	6	5507	1152	6	5513	192	6
5516	192	6	5517	192	6	5518	2304	6	5521	288	6
5530	384	6	5534	48	6	5535	48	6	5536	576	6
5537	576	6	5541	576	6	5545	576	6	5547	576	6
5558	96	6	5559	96	6	5563	16	2	5567	32	2
5576	16	2	5577	32	2	5578	32	2	5579	32	2
5583	64	2	5585	128	4	5586	16	4	5588	32	4
5589	32	4	5590	32	4	5591	32	4	5592	32	4
5593	32	4	5594	32	4	5595	64	4	5596	64	4
5597	64	4	5598	64	4	5599	64	4	5600	64	4
5602	192	6	5606	48	6	5612	48	6	5617	96	6
5618	96	6	5619	96	6	5620	96	6	5624	1152	2
5626	1152	2	5635	128	2	5636	128	2	5637	128	2
5638	128	2	5639	144	2	5642	16	2	5654	192	2
5665	192	2	5666	192	2	5667	192	2	5668	2304	2
5675	256	2	5677	288	2	5693	32	2	5694	32	2
5695	32	2	5700	384	2	5701	384	2	5706	384	2
5707	384	2	5708	48	2	5711	48	2	5716	48	2

n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$
5717	48	2	5722	576	2	5727	64	2	5728	64	2
5729	64	2	5730	64	2	5731	64	2	5750	768	2
5754	96	2	5755	96	2	5756	96	2	5764	96	2
5765	1152	2	5767	1152	2	5772	1152	2	5794	128	2
5795	128	2	5796	128	2	5797	128	2	5798	128	2
5816	128	2	5817	128	2	5818	128	2	5819	128	2
5820	128	2	5821	128	2	5822	128	2	5823	128	2
5824	128	2	5825	128	2	5826	128	2	5827	128	2
5828	128	2	5831	1536	2	5853	16	2	5858	192	2
5861	192	2	5864	192	2	5867	192	2	5868	192	2
5870	192	2	5877	192	2	5878	192	2	5879	2304	2
5880	2304	2	5881	2304	2	5885	2304	2	5889	256	2
5890	256	2	5891	256	2	5892	256	2	5893	256	2
5900	256	2	5901	256	2	5902	256	2	5903	256	2
5904	288	2	5907	288	2	5942	32	2	5943	32	2
5944	32	2	5945	32	2	5946	32	2	5947	32	2
5948	32	2	5949	32	2	5950	32	2	5968	384	2
5969	384	2	5974	384	2	5983	384	2	5984	384	2
5985	384	2	5986	384	2	5989	384	2	5990	384	2
5991	384	2	5994	4608	2	6007	48	2	6011	48	2
6012	512	2	6016	576	2	6017	64	2	6018	64	2
6019	64	2	6020	64	2	6021	64	2	6022	64	2
6023	64	2	6024	64	2	6025	64	2	6026	64	2
6027	64	2	6043	64	2	6044	64	2	6045	64	2
6046	64	2	6047	64	2	6048	64	2	6090	768	2
6091	768	2	6095	768	2	6096	768	2	6098	768	2
6099	768	2	6100	768	2	6103	96	2	6106	96	2
6114	96	2	6116	96	2	6117	96	2	6121	96	2
6122	96	2	6127	96	2	6128	96	2	6129	96	2
6130	1024	4	6131	1152	4	6132	1152	4	6133	1152	4
6134	1152	4	6139	128	4	6140	128	4	6141	128	4
6142	128	4	6143	128	4	6144	128	4	6145	128	4
6146	128	4	6147	128	4	6148	128	4	6149	128	4
6150	128	4	6151	128	4	6152	128	4	6153	128	4
6154	128	4	6155	128	4	6156	128	4	6157	128	4
6158	128	4	6159	128	4	6160	128	4	6161	128	4
6162	128	4	6163	128	4	6164	128	4	6165	128	4
6166	128	4	6167	128	4	6168	128	4	6169	128	4
6170	128	4	6171	128	4	6172	128	4	6173	128	4
6174	128	4	6175	128	4	6176	128	4	6177	128	4
6178	128	4	6179	128	4	6180	128	4	6181	128	4
6182	128	4	6183	128	4	6184	128	4	6185	128	4
6186	128	4	6187	128	4	6188	128	4	6189	128	4
6190	128	4	6191	128	4	6192	128	4	6193	128	4
6194	128	4	6195	128	4	6196	128	4	6197	128	4
6198	128	4	6199	128	4	6200	128	4	6201	128	4
6202	128	4	6203	128	4	6204	128	4	6205	128	4
6206	128	4	6207	128	4	6208	128	4	6209	128	4
6210	128	4	6211	128	4	6212	1536	4	6213	1536	4
6214	1536	4	6215	1536	4	6216	1536	4	6217	1536	4
6218	1536	4	6219	1536	4	6220	1536	4	6221	1536	4
6222	1536	4	6225	16	4	6226	16	4	6228	192	4

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
6229	192	4	6230	192	4	6231	192	4	6232	192	4
6233	192	4	6234	192	4	6235	192	4	6236	192	4
6237	192	4	6238	192	4	6239	192	4	6240	192	4
6241	192	4	6242	192	4	6243	192	4	6244	192	4
6245	192	4	6247	192	4	6248	192	4	6249	192	4
6250	192	4	6251	192	4	6252	192	4	6253	192	4
6254	192	4	6255	192	4	6256	2304	4	6257	2304	4
6258	2304	4	6259	2304	4	6260	2304	4	6261	2304	4
6262	2304	4	6263	2304	4	6264	2304	4	6265	2304	4
6266	2304	4	6268	256	4	6269	256	4	6270	256	4
6271	256	4	6272	256	4	6273	256	4	6274	256	4
6275	256	4	6276	256	4	6277	256	4	6278	256	4
6279	256	4	6280	256	4	6281	256	4	6282	256	4
6283	256	4	6284	256	4	6285	256	4	6286	256	4
6287	256	4	6288	256	4	6289	256	4	6290	256	4
6291	256	4	6292	256	4	6293	256	4	6294	256	4
6295	256	4	6296	256	4	6297	256	4	6298	256	4
6299	256	4	6300	256	4	6301	256	4	6302	256	4
6303	256	4	6304	256	4	6305	256	4	6306	256	4
6307	256	4	6308	256	4	6309	256	4	6310	256	4
6311	256	4	6312	256	4	6313	256	4	6314	256	4
6315	256	4	6316	256	4	6317	256	4	6318	256	4
6319	256	4	6320	256	4	6321	288	4	6322	288	4
6323	3072	4	6327	32	4	6328	32	4	6329	32	4
6330	32	4	6331	32	4	6332	32	4	6333	32	4
6334	32	4	6335	32	4	6344	32	4	6345	32	4
6346	32	4	6347	32	4	6348	32	4	6349	32	4
6350	32	4	6351	32	4	6352	32	4	6353	32	4
6354	32	4	6355	32	4	6356	32	4	6357	384	4
6358	384	4	6359	384	4	6360	384	4	6361	384	4
6362	384	4	6363	384	4	6364	384	4	6365	384	4
6366	384	4	6367	384	4	6368	384	4	6369	384	4
6370	384	4	6371	384	4	6372	384	4	6373	384	4
6374	384	4	6375	384	4	6376	384	4	6377	384	4
6378	384	4	6379	384	4	6380	384	4	6381	384	4
6382	4608	4	6383	4608	4	6384	4608	4	6385	4608	4
6386	4608	4	6387	4608	4	6388	4608	4	6390	48	4
6391	48	4	6392	48	4	6393	512	4	6394	512	4
6395	512	4	6396	512	4	6397	512	4	6398	512	4
6399	512	4	6400	512	4	6401	512	4	6402	512	4
6403	512	4	6404	512	4	6405	512	4	6406	512	4
6407	512	4	6408	576	4	6409	576	4	6410	576	4
6411	576	4	6412	64	4	6413	64	4	6414	64	4
6415	64	4	6416	64	4	6417	64	4	6418	64	4
6419	64	4	6420	64	4	6421	64	4	6422	64	4
6423	64	4	6424	64	4	6425	64	4	6426	64	4
6427	64	4	6428	64	4	6429	64	4	6430	64	4
6431	64	4	6432	64	4	6433	64	4	6434	64	4
6435	64	4	6436	64	4	6437	64	4	6438	64	4
6439	64	4	6440	64	4	6441	64	4	6442	64	4
6443	64	4	6444	64	4	6445	64	4	6446	64	4
6447	64	4	6448	64	4	6449	64	4	6450	64	4

n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$	n	$\lvert G\rvert$	$m_1(G)$
6451	64	4	6452	64	4	6453	64	4	6454	64	4
6455	64	4	6456	64	4	6457	64	4	6458	64	4
6459	64	4	6460	64	4	6461	64	4	6462	64	4
6463	64	4	6464	64	4	6465	64	4	6466	64	4
6467	64	4	6468	64	4	6469	64	4	6470	64	4
6471	64	4	6484	768	4	6485	768	4	6486	768	4
6487	768	4	6488	768	4	6489	768	4	6490	768	4
6491	768	4	6492	768	4	6493	768	4	6494	768	4
6495	768	4	6496	768	4	6497	768	4	6498	768	4
6499	768	4	6500	768	4	6501	768	4	6502	768	4
6503	768	4	6504	768	4	6505	768	4	6506	768	4
6507	768	4	6508	768	4	6509	768	4	6510	9216	4
6511	96	4	6512	96	4	6514	96	4	6515	96	4
6516	96	4	6517	96	4	6518	96	4	6519	96	4
6520	96	4	6521	96	4	6522	96	4	6523	96	4
6524	96	4	6525	96	4	6526	96	4	6527	96	4
6528	96	4	6529	1152	6	6530	1152	6	6531	1152	6
6532	1152	6	6533	1152	6	6534	1152	6	6536	1152	6
6537	1152	6	6541	1152	6	6544	1152	6	6545	1152	6
6546	1152	6	6547	1152	6	6548	1152	6	6553	1152	6
6554	1152	6	6558	1152	6	6563	1152	6	6569	13824	6
6572	144	6	6573	144	6	6574	144	6	6575	144	6
6584	144	6	6587	144	6	6591	144	6	6601	144	6
6602	144	6	6607	1536	6	6611	1728	6	6613	1728	6
6617	192	6	6618	192	6	6636	192	6	6637	192	6
6638	192	6	6639	192	6	6642	192	6	6643	192	6
6644	192	6	6687	192	6	6690	192	6	6691	192	6
6694	192	6	6699	192	6	6700	192	6	6701	192	6
6702	192	6	6703	192	6	6710	192	6	6711	192	6
6712	192	6	6713	192	6	6714	192	6	6715	192	6
6716	192	6	6717	192	6	6723	2304	6	6724	2304	6
6725	2304	6	6726	2304	6	6727	2304	6	6728	2304	6
6733	2304	6	6734	2304	6	6735	2304	6	6745	288	6
6746	288	6	6748	288	6	6749	288	6	6752	288	6
6759	288	6	6760	288	6	6761	288	6	6763	288	6
6767	288	6	6768	288	6	6769	288	6	6774	288	6
6775	288	6	6783	288	6	6785	288	6	6786	288	6
6792	3456	6	6793	3456	6	6801	3456	6	6803	3456	6
6804	3456	6	6811	384	6	6812	384	6	6813	384	6
6814	384	6	6833	384	6	6836	384	6	6837	384	6
6838	384	6	6839	384	6	6840	384	6	6845	384	6
6846	384	6	6847	384	6	6857	384	6	6858	384	6
6859	384	6	6862	384	6	6863	384	6	6864	384	6
6865	384	6	6866	384	6	6867	384	6	6868	384	6
6869	384	6	6870	384	6	6872	384	6	6875	432	6
6879	4608	6	6880	48	6	6881	48	6	6882	48	6
6899	48	6	6901	48	6	6923	48	6	6925	576	6
6931	576	6	6932	576	6	6933	576	6	6934	576	6
6946	576	6	6947	576	6	6948	576	6	6949	576	6
6953	576	6	6955	576	6	6958	576	6	6966	576	6
6969	576	6	6970	6912	6	6971	6912	6	6972	6912	6
6974	6912	6	6976	6912	6	6990	768	6	6991	768	6

n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$	n	$\|G\|$	$m_1(G)$
6998	768	6	6999	768	6	7000	768	6	7001	768	6
7002	768	6	7003	768	6	7004	768	6	7005	768	6
7006	768	6	7007	864	6	7011	864	6	7012	864	6
7034	96	6	7035	96	6	7036	96	6	7037	96	6
7044	96	6	7081	96	6	7082	96	6	7085	96	6
7086	96	6	7087	96	6	7090	96	6	7093	96	6
7094	96	6	7095	96	6	7101	96	6	7103	96	6

4.3. **Группы из $\tilde{\mathcal{G}_6}'$ со своими порождающими.** В настоящем разделе указаны все 63 группы из $\tilde{\mathcal{G}_6}'$ со своими порождающими. Они были получены с помощью пакета CARAT и системы GAP в соответствии с таблицей 4, приведенной в предыдущем разделе.

$$G_{6,2804} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2805} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2806} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2813} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2814} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2816} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2820} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2823} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2824} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2827} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2828} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2829} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2830} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2831} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2832} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2833} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2836} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2839} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_{6,2845}=\langle\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&-1\\1&0&0&1&1&0\\0&1&1&0&0&-1\\-1&0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&-1&0&-1\\0&1&1&0&0&-1\\-1&0&0&0&0&0\\1&-1&-1&0&0&0\\-1&1&0&0&-1&1\\-1&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2846}=\langle\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&-1&1&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0&1\\-1&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2853}=\langle\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&-1\\0&1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0&0\\0&0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2855}=\langle\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&-1\\0&1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2856}=\langle\begin{pmatrix}-1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\-1&0&-1&0&-1&1\\1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\1&0&0&1&1&0\\0&0&-1&-1&-1&0\\-1&0&0&0&0&1\\1&-1&0&0&1&0\end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2857}=\langle\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2862} = \langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2863} = \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2867} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2868} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2874} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2875} = \langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2882} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2883} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2884} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2885} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2886} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\rangle,$$

$$G_{6,2887} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2888} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2889} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2891} = \langle, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2893} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2896} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2901} = \langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2902} = \langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2910} = \langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2912} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2913} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2918} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2922} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2923} = \langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2927} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2928} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2929} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2931} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2933} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2938} = \langle, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2940} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2941} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2943} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2946} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2947} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2948} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2950} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$G_{6,2953} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

4.4. **Свойства групп из $\tilde{\mathcal{G}}_6{}'$.** Следующие свойства групп из $\tilde{\mathcal{G}}_6{}'$, приведенных в предыдущем разделе, частью проверены при помощи систем GAP и Maple, частью же (оценка $m(G) \leq m_1(G)$) следуют из таблицы 4 в §4.2. Эти свойства применяются в §4.1 для доказательства теоремы 3.

Свойство 1_4**.**

$$G_{6,2804} > G_{6,2929};$$

$$m(G_{6,2804}) \leq 18.$$

Свойство 2_4**.**

$$G_{6,2805} > G_{6,2885};$$

$$m(G_{6,2805}) \leq 54.$$

Свойство 3_4**.**

$$G_{6,2806} > G_{6,2901};$$

$$m(G_{6,2806}) \leq 18.$$

Свойство 4_4**.**

$$G_{6,2813} > G_{6,2901}^{a_1}, \text{ где } a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$m(G_{6,2813}) \leq 18.$$

Свойство 5_4**.**

$$G_{6,2814} > G_{6,2929}^{a_2}, \text{ где } a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$m(G_{6,2814}) \leq 18.$$

Свойство 6_4**.**

$$G_{6,2816} > G_{6,2901}^{a_3}, \text{ где } a_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$m(G_{6,2816}) \le 18.$$

Свойство 7_4**.**

$$G_{6,2820} > G_{6,2901}^{a_4}, \text{ где } a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$m(G_{6,2820}) \le 18.$$

Свойство 8_4**.**

$$G_{6,2823} > G_{6,2929}^{a_5}, \text{ где } a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$m(G_{6,2823}) \le 18.$$

Свойство 9_4**.**

$$G_{6,2824} > G_{6,2929};$$

$$m(G_{6,2824}) \le 18.$$

Свойство 10_4**.**

$$G_{6,2827} > G_{6,2929};$$

$$m(G_{6,2827}) \le 18.$$

Свойство 11_4**.**

$$G_{6,2828} > G_{6,2885};$$

$$m(G_{6,2828}) \le 54.$$

Свойство 12_4**.**

$$G_{6,2829} > G_{6,2929};$$

$$m(G_{6,2829}) \le 18.$$

Свойство 13_4**.**

$$G_{6,2830} > G_{6,2901};$$

$$m(G_{6,2830}) \le 18.$$

Свойство 14_4**.**

$$G_{6,2831} > G_{6,2922}^{a_6},\ \text{где } a_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$m(G_{6,2831}) \le 18.$$

Свойство 15_4**.**

$$G_{6,2832} > G_{6,2929}^{a_5};$$
$$m(G_{6,2832}) \le 18.$$

Свойство 16_4**.**

$$G_{6,2833} > G_{6,2922};$$
$$m(G_{6,2833}) \le 18.$$

Свойство 17_4**.**

$$G_{6,2836} > G_{6,2922};$$
$$m(G_{6,2836}) \le 18.$$

Свойство 18_4**.**

$$G_{6,2839} > G_{6,2901};$$
$$m(G_{6,2839}) \le 18.$$

Свойство 19_4**.**

Для $(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$ справедливо

$$(1,-2,-1,-1,0,0)G_{6,2845}b_1 =$$
$$(x_1(1,-2,-1,-1,0,0) + x_2(0,1,1,1,0,-1))G_{6,2845},$$
$$\text{где } b_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_2 & -x_2 \\ 0 & x_1 - x_2 & 0 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_2 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & -x_2 & -x_2 & x_1 - x_2 & 0 \\ x_2 & -x_2 & 0 & 0 & x_2 & x_1 - x_2 \end{pmatrix},$$
$$(0,1,0,1,1,0)G_{6,2845}b_2 =$$
$$(x_1(0,1,0,1,1,0) + x_2(0,0,1,1,0,0))G_{6,2845},\ \text{где}$$
$$b_2 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & 0 & -x_2 & 0 & -x_2 & x_2 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 & -x_2 & -x_2 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & x_1 - x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & x_2 & x_2 & x_1 & 0 \\ -x_2 & x_2 & 0 & 0 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$
$$(1,-2,-1,-1,0,0)G_{6,2845}a_7 = (0,1,0,1,1,0)G_{6,2845},\ \text{где}$$
$$a_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$|(1,-2,-1,-1,0,0)G_{6,2845}| = 36,$$
$$(e_1-e_3),(e_1-e_5),(e_5-e_6),(e_1+e_3-e_6) \in (1,-2,-1,-1,0,0)G_{6,2845},$$
$$e_i \in ((e_1-e_3)-(e_1-e_5)-(e_5-e_6)+(e_1+e_3-e_6))G_{6,2845}$$
$$\text{для } i \in \{1,\dots,6\}.$$

Свойство 20_4.

$$G_{6,2846} > G^{a_8}_{6,2901}, \text{ где } a_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$m(G_{6,2846}) \le 18.$$

Свойство 21_4.

$$G_{6,2853} > G_{6,2901};$$
$$m(G_{6,2853}) \le 18.$$

Свойство 22_4.

$$G_{6,2855} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2855}) \le 18.$$

Свойство 23_4.

$$G_{6,2856} > G_{6,2886};$$
$$m(G_{6,2856}) \le 54.$$

Свойство 24_4.

$$G_{6,2857} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2857}) \le 18.$$

Свойство 25_4.

$$G_{6,2862} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2862}) \le 18.$$

Свойство 26_4.

$$G_{6,2863} > G^{a_8}_{6,2901};$$
$$m(G_{6,2863}) \le 18.$$

Свойство 27_4.

$$G_{6,2867} > G^{a_9}_{6,2922}, \text{ где } a_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$m(G_{6,2867}) \le 18.$$

Свойство 28_4.

$$G_{6,2868} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2868}) \le 18.$$

Свойство 29_4.

$$G_{6,2874} > G^{a_5}_{6,2929};$$

$$m(G_{6,2874}) \leq 18.$$

Свойство 30_4**.**

$$G_{6,2875} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2875}) \leq 18.$$

Свойство 31_4**.**

$$G_{6,2882} > G_{6,2901};$$
$$m(G_{6,2882}) \leq 18.$$

Свойство 32_4**.**

$$G_{6,2883} > G_{6,2901}^{a_1};$$
$$m(G_{6,2883}) \leq 18.$$

Свойство 33_4**.**

$$G_{6,2884} > G_{6,2929}^{a_2};$$
$$m(G_{6,2884}) \leq 18.$$

Свойство 34_4**.**

Для $(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$ справедливо

$$e_3 G_{6,2885} b_1 = (x_1 e_3 + x_2(e_5 + e_6)) G_{6,2885};$$
$$|e_3 G_{6,2885}| = 54,$$
$$e_i \in e_3 G_{6,2885} \text{ для } i \in \{1, \dots, 6\}.$$

Свойство 35_4**.**

$$(1, -2, 0, 0, 1, -1) G_{6,2886} a_{10} = e_3 G_{6,2885}, \text{ где}$$
$$a_{10} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$(1, -1, 0, 0, 1, -1) G_{6,2886} a_{11} = e_3 G_{6,2885}, \text{ где}$$
$$a_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Свойство 36_4**.**

$$G_{6,2887} > G_{6,2845}^{a_{12}}, \text{ где } a_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$m(G_{6,2887}) \leq 36.$$

Свойство 37_4**.**

$$G_{6,2888} > G_{6,2901};$$
$$m(G_{6,2888}) \leq 18.$$

Свойство 38_4**.**

$$G_{6,2889} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2889}) \le 18.$$

Свойство 39_4**.**

$$G_{6,2891} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2891}) \le 18.$$

Свойство 40_4**.**

$$G_{6,2893} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2893}) \le 18.$$

Свойство 41_4**.**

$$G_{6,2896} > G_{6,2885};$$
$$m(G_{6,2896}) \le 54.$$

Свойство 42_4**.**

Для $(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$ справедливо

$$e_5 G_{6,2901} b_3 = (x_1 e_5 + x_2 e_6) G_{6,2901}, \text{ где}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1+x_2 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & x_1+x_2 \end{pmatrix},$$

$$(1,0,-1,1,0,1) G_{6,2901} b_4 =$$
$$(x_1(1,0,-1,1,0,1) + x_2(0,1,-1,0,1,0)) G_{6,2901},$$
$$(1,0,-1,1,1,-1) G_{6,2901} b_4 =$$
$$(x_1(1,0,-1,1,1,-1) + x_2(0,1,-1,0,0,-1)) G_{6,2901},$$
$$(1,0,-1,1,-1,0) G_{6,2901} b_4 =$$
$$(x_1(1,0,-1,1,-1,0) + x_2(0,1,-1,0,-1,1)) G_{6,2901},$$

$$\text{где } b_4 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1+x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & x_1+x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1+x_2 & -x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_1 \end{pmatrix};$$

$$e_5 G_{6,2901} a_{13} = (1,0,-1,1,0,1) G_{6,2901} a_{14} = (1,0,-1,1,1,-1) G_{6,2901} a_{15}$$
$$= (1,0,-1,1,-1,0) G_{6,2901} a_{16} = e_1 G_{6,2929}, \text{ где}$$

$$a_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_{14}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_{15}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$a_{16}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойство 43_4.

$$G_{6,2902} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2902}) \le 18.$$

Свойство 44_4.

$$G_{6,2910} > G_{6,2901}^{a_8};$$
$$m(G_{6,2910}) \le 18.$$

Свойство 45_4.

$$G_{6,2912} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2912}) \le 18.$$

Свойство 46_4.

$$G_{6,2913} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2913}) \le 18.$$

Свойство 47_4.

$$G_{6,2918} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2918}) \le 18.$$

Свойство 48_4.

Для $(x_1,x_2)\in\mathbb{Q}^2\setminus\{0\}$ справедливо

$$e_5G_{6,2922}b_3 = (x_1e_5+x_2e_6)G_{6,2922};$$
$$e_5G_{6,2922}a_{13} = e_1G_{6,2929}.$$

Свойство 49_4.

$$G_{6,2923} > G_{6,2929};$$
$$m(G_{6,2923}) \le 18.$$

Свойство 50_4.

$$G_{6,2927} > G_{6,2886};$$
$$m(G_{6,2927}) \le 54.$$

Свойство 51_4.

$$G_{6,2928} > G_{6,2901}^{a_8};$$

$$m(G_{6,2928}) \leq 18.$$

Свойство 52_4**.**

$$e_1 G_{6,2929} = M_{6,3} \text{ (множество } M_{6,3} \text{ определено в теореме 3).}$$

Свойство 53_4**.**

$$G_{6,2931} > G_{6,2929}^{a_5};$$
$$m(G_{6,2831}) \leq 18.$$

Свойство 54_4**.**

$$G_{6,2933} > G_{6,2948}^{a_{17}}, \text{ где } a_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$
$$m(G_{6,2933}) \leq 14.$$

Свойство 55_4**.**

$$G_{6,2938} > G_{6,2948}^{a_{17}};$$
$$m(G_{6,2938}) \leq 14.$$

Свойство 56_4**.**

$$\text{Для } (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\} \text{ справедливо}$$
$$(1, -1, 0, 0, -1, 0) G_{6,2940} b_5 =$$
$$(x_1(1, -1, 0, 0, -1, 0) + x_2(0, 1, -1, 0, 0, -1)) G_{6,2940},$$
$$\text{где } b_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & 0 & x_2 & 0 & x_2 & -x_2 \\ -x_2 & 2x_1 - x_2 & 2x_2 & x_2 & x_2 & 0 \\ -x_2 & 0 & 2x_1 & x_2 & 0 & -x_2 \\ x_2 & -x_2 & 0 & 2x_1 - x_2 & x_2 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_2 & -x_2 & 2x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_2 & x_2 & 0 & 0 & 2x_1 \end{pmatrix};$$
$$|(0, 1, -1, 0, 0, -1) G_{6,2940}| = 42,$$
$$e_i \in (0, 1, -1, 0, 0, -1) G_{6,2940} \text{ для } i \in \{1, \ldots, 6\};$$
$$G_{6,2940} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}_3(2).$$

Свойство 57_4**.**

$$G_{6,2941} > G_{6,2948}^{a_{18}}, \text{ где } a_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$m(G_{6,2941}) \leq 14.$$

Свойство 58_4**.**

$$G_{6,2943} > G_{6,2948}^{a_{17}};$$
$$m(G_{6,2943}) \leq 14.$$

Свойство 59_4**.**

$$G_{6,2946} > G_{6,2940};$$

$$m(G_{6,2946}) \le 42.$$

Свойство 60_4**.**

$$G_{6,2947} > G_{6,2948}^{a_{19}}, \text{ где } a_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$m(G_{6,2947}) \le 14.$$

Свойство 61_4**.**

$$e_1 G_{6,2948} = M_{6,2} \text{ (множество } M_{6,2} \text{ определено в теореме 3).}$$

Свойство 62_4**.**

$$G_{6,2950} > G_{6,2948}^{a_{20}}, \text{ где } a_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$m(G_{6,2950}) \le 14.$$

Свойство 63_4**.**

$$(0,1,-1,1,-1,3)G_{6,2953}a_{21} = (0,1,-1,0,0,1)G_{6,2953}, \text{ где}$$

$$a_{21} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(0,1,-1,0,0,1)G_{6,2953} = M_{6,4} \text{ (} M_{6,4} \text{ определено в теореме 3),}$$

$$e_i \in (0,1,-1,0,0,1)G_{6,2953} \text{ для } i \in \{1,\dots,6\};$$

$$G_{6,2953} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_5.$$

4.5. **Дополнительные свойства групп из $\tilde{\mathcal{G}}_6{}'$.** В приведенной ниже таблице 5 собраны результаты работы алгоритма A1 из §1.5 для некоторых групп из $\tilde{\mathcal{G}}_6{}'$. Они используются в §4.1 для доказательства теоремы 3. Каждая строка таблицы 5 состоит из следующих 5 элементов.

1) Номер строки.
2) Группа G из $\tilde{\mathcal{G}}_6{}'$.
3) Число $c_1(G)$, вычисленное с помощью алгоритма A1.
4) Множество D, полученное в результате применения алгоритма A1 к группе G.
5) Число итераций основного цикла алгоритма A1 для группы G.

Таблица 5.

n	G	$c_1(G)$	D	t
1	$G_{6,2845}$	6	$\{\langle(1,-2,-1,-1,0,0),(0,1,1,1,0,-1)\rangle_{\mathbb{Q}}$, $\langle(0,1,0,1,1,0),(0,0,1,1,0,0)\rangle_{\mathbb{Q}}\}$,	1634
2	$G_{6,2885}$	8	$\langle e_3, e_5+e_6\rangle_{\mathbb{Q}}$	5954
3	$G_{6,2886}$	8	$\{\langle(1,-2,0,0,1,-1)\rangle_{\mathbb{Q}}$, $\langle(1,-1,0,0,1,-1)\rangle_{\mathbb{Q}}\}$	27554
4	$G_{6,2901}$	3	$\{\langle e_5,e_6\rangle_{\mathbb{Q}}$, $\langle(1,0,-1,1,0,1),(0,1,-1,0,1,0)\rangle_{\mathbb{Q}}$ $\langle(1,0,-1,1,1,-1),(0,1,-1,0,0,-1)\rangle_{\mathbb{Q}}$ $\langle(1,0,-1,1,-1,0),(0,1,-1,0,-1,1)\rangle_{\mathbb{Q}}\}$,	146
5	$G_{6,2922}$	4	$\langle e_5,e_6\rangle_{\mathbb{Q}}$	218
6	$G_{6,2929}$	1	$\mathbb{Q}^6$	2
7	$G_{6,2940}$	8	$\langle(1,-1,0,0,-1,0),(0,1,-1,0,0,-1)\rangle_{\mathbb{Q}}$	13554
8	$G_{6,2948}$	1	$\mathbb{Q}^6$	2
9	$G_{6,2953}$	12	$\{\langle(0,1,-1,1,-1,3)\rangle_{\mathbb{Q}},\langle(0,1,-1,0,0,1)\rangle_{\mathbb{Q}}\}$	188346

Список литературы

[1] Giudici M., *On limit graphs of finite vertex-primitive graphs* / M. Giudici, C.H. Li, C.E. Praeger, A. Seress, V. Trofimov, J. Comb. Theory. Ser. A, **114** (2007), 110–134.

[2] Костоусов К.В., *Графы Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ и пределы вершинно-примитивных графов НА-типа*,Сиб. мат. журнал, 2007. **48**: 3 (2007), 606–620.

[3] Костоусов К.В., *О графах Кэли группы $\mathbb{Z}^4$, являющихся предельными для множества минимальных вершинно-примитивных графов НА-типа*, Труды ИММ УрО РАН, **13**: 1 (2007), 132–147.

[4] The GAP Group. GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4, Aachen, St Andrews, 2004 (http://www.gap-system.org).

[5] Opgenorth J., *Crystallographic Algorithms and Tables* / J. Opgenorth, W. Plesken, T. Schultz, Acta Cryst A, **54** (1998), 517–531.

[6] CARAT — Crystallographic AlgoRithms And Tables. Version 2.0 (http://wwwb.math.rwth-aachen.de/carat/).

[7] Maple — comprehensive computer system for advanced mathematics, Version 8 (http://www.maplesoft.com).

Кирилл Викторович Костоусов
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620219, Екатеринбург, Россия
E-mail address: `giant199@mail.ru`