S⓪MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 80–87 (2008) УДК 519.17
MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ $(784, 116, 0, 20)$

А. Л. ГАВРИЛЮК

Abstract. It is studied the group G of automorphisms of a strongly regular graph with parameters $(784, 116, 0, 20)$. We proved that if G contain an element of prime order p, then $p \in \{2, 7\}$. As a corollary, it is followed that the group of automorphisms of this srg is not quasy primitive.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершин a, b графа Γ через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, а число $|[a]|$ называется степенью вершины a. Через $a^\perp$ обозначается шар радиуса 1 с центром a.

Полный n-дольный граф с долями порядков $m_1, ..., m_n$ обозначим через $K_{m_1,...,m_n}$. Если $m_1 = ... = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой*.

Граф Γ называется *сильно регулярным графом* с параметрами (v, k, λ, μ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, каждое ребро Γ лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин. Для подграфа Δ графа Γ через $X_i(\Delta)$ обозначим множество всех вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Gavrilyuk, A.L., On automorphisms of a strongly regular graph (784,116,0,20).

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00009).

Поступила 1 марта 2008 г., опубликована 31 марта 2008 г.

Пусть сильно регулярный граф Γ с параметрами (v, k, λ, μ) имеет собственные значения k, r, s. Если графы Γ и $\overline{\Gamma}$ связны, то выполняются неравенства, называемые условиями Крейна:

(1) $(r+1)(k+r+2rs) \leq (k+r)(s+1)^2$ и

(2) $(s+1)(k+s+2rs) \leq (k+s)(r+1)^2$.

Граф Γ назовем графом Крейна, если для него достигается равенство в одном из условий Крейна (1) или (2). По теореме 8.15 [1] для любой вершины a графа Крейна Γ подграфы $[a]$ и $\Gamma_2(a)$ сильно регулярны. Ввиду предложения 8.12 и теоремы 8.8 [1] граф Крейна без треугольников имеет параметры $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$ и неглавные собственные значения $r, -(r^2+2r)$. Граф с такими параметрами обозначим $Kre(r)$. Пусть $\Gamma = Kre(r)$. Для любых смежных вершин $a, b \in \Gamma$ подграфы $\Gamma_2(a)$ и $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ сильно регулярны с параметрами $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$ и $((r^2+2r)(r^2+2r-1), r^3+r^2-r, 0, r^2-r)$ и имеют неглавные собственные значения $r, -(r^2+r)$ и $r, -r^2$ соответственно. Ввиду теоремы 8.8 [1] сильно регулярный граф без треугольников Γ имеет параметры $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$ для некоторого $r \geq 2$ тогда и только тогда, когда любая 3-коклика из Γ попадает в окрестности r вершин. Известно, что в случаях $r = 1$ и 2 существуют единственные графы с такими параметрами — граф Клебша и граф Хигмена-Симса соответственно. Несуществование $Kre(3)$ доказано в [2]. Автоморфизмы графа $Kre(5)$ изучались в [3].

Пусть G — транзитивная группа подстановок на множестве X. Группа G называется квазипримитивной на X, если любая нормальная подгруппа из G действует транзитивно на X.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— граф Крейна* $Kre(4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* g *— элемент простого порядка* p *из* G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, *то* $p \in \{2, 7\}$, *причем в случае* $p = 7$ *автоморфизм* g *действует без неподвижных точек.*

Следствие 1. *Группа* G *не обладает квазипримитивным действием на вершинах графа* Γ.

Докажем следствие. По теореме 1 порядок группы G равен $2^a 7^b$, причем в случае транзитивного действия G на вершинах имеем $a \geq 4$, $b = 2$. По теореме Бернсайда группа G разрешима, следовательно, минимальная нормальная подгруппа N из G является элементарной абелевой p-группой для некоторого $p \in \{2, 7\}$, и в случае примитивного действия G на вершинах графа Γ по теореме 1.7 из [4] подгруппа N действует транзитивно, противоречие с тем, что $|\Gamma|$ не делит никакую степень p. Предположим, что G действует квазипримитивно, то есть любая нормальная подгруппа из G действует транзитивно на множестве вершин Γ. Поскольку максимальная нормальная подгруппа в разрешимой группе имеет примарный индекс, то снова в нашем случае минимальная нормальная подгруппа в G является p-группой, противоречие, как и в предыдущем случае.

2. Предварительные замечания

Доказательство основных результатов статьи опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом графу Γ соответствует симметричная схема отношений $(X, \{R_0, R_1, R_2\})$, где R_0 — отношение равенства на множестве вершин X графа Γ, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\overline{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, g$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пусть π_i — ортогональное проектирование $\mathbf{C}^v$ на i-ое собственное подпространство W_i матрицы смежности A графа Γ. Так как A перестановочна с любой матрицей из $\psi(G)$, то подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления группы G, полученного при проектировании π_i. Тогда для любого $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ верно равенство

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если $\chi_i(g)$ — число рациональное, то оно является целым.

Лемма 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф $Kre(r)$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Γ имеет параметры $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$, то значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности r^3+3r^2+r на элементе $g \in G$ равно*

$$\chi_1(g) = (r\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + r^2(r+3))/(r^2+3r);$$

(2) *если Γ имеет параметры $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$, то значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности r^3+2r^2, на элементе $g \in G$ равно*

$$\varphi_1(g) = (r\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + (r^3+2r^2-r))/(r^2+2r);$$

(3) *если Γ имеет параметры $((r^2+2r)(r^2+2r-1), r^3+r^2-r, 0, r^2-r)$, то значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности r^3+3r^2+r-2, на элементе $g \in G$ равно*

$$\psi_1(g) = (r\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + r^3 + r^2 - 2r)/(r^2+r).$$

Доказательство. Это лемма 1.7 из [3].

При $r = 4$ значения характеров принимают вид $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 112)/28$, $\varphi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 80)/24$ и $\psi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 72)/20$.

3. Автоморфизмы порядка 3 графа $Kre(4)$

До конца работы Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(784, 116, 0, 20)$, т.е. граф $Kre(4)$. Пусть g — автоморфизм порядка 3 графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Так как Γ не содержит треугольников, то $\alpha_1(g) = 0$.

Лемма 2. *Параметр $\alpha_0(g)$ больше 7 и делится на 7, а каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с 1 или 4 вершинами из Ω.*

Доказательство. Ввиду целочисленности значения характера $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 112)/28$ число $\alpha_0(g)$ делится на 7.

Пусть вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с β вершинами из Ω. Тогда $[u] \cap [u^g] \cap [u^{g^2}]$ содержит точно 4 вершины и $4 - \beta$ делится на 3. Поэтому $\beta \in \{1, 4\}$.

Допустим, что $\alpha_0(g) = 7$. Если Ω содержит 3-коклику a, b, c такую, что $[a] \cap [b] \cap [c] \subseteq \Omega$, то по построению $|\Omega| > 7$, противоречие. Если же для любой 3-коклики из Ω пересечение окрестностей вершин этой коклики содержит единственную вершину из Ω, то $\mu(\Omega) = 2$, и по предложению 1.1.2 из [1] подграф Ω является графом $Kre(1)$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3. *Граф Γ не имеет автоморфизмов порядка* 3.

Доказательство. Заметим, что Ω содержит не более, чем $784 - (1 + 112 + 112 \cdot 111/20) < 50$ вершин. Так как число нетривиальных орбит g на Γ кратно 3, то $|\Omega| \in \{28, 49\}$.

Допустим, что Ω содержит 49 вершин. Выберем вершину u из $\Gamma - \Omega$, смежную с 4 вершинами из Ω. Через γ_i обозначим число вершин из $\Gamma_2(u) - \Omega$, смежных точно с i вершинами из $[u] - \Omega$. Тогда $\gamma_i = 0$ для всех $i \notin \{16, 18, 19, 20\}$, при этом $\gamma_{16} = 2$. Через σ_j обозначим число вершин из $[u] - \Omega$, смежных точно с j вершинами из Ω, $j \in \{1, 4\}$. Тогда $\sigma_1 + \sigma_4 = 112$, $\sum_i \gamma_i = 667 - (|\Omega| - 4) = 622$, $114\sigma_1 + 111\sigma_4 = \sum_i i\gamma_i$. Далее, вершина $w \in \Omega \cap [u]$ смежна с 2 вершинами u^g, u^{g^2}, не более чем с 20 вершинами из Ω, и, поэтому не менее чем с 93 вершинами из $\Gamma_2(u) - \Omega$, смежными с 18 или 19 вершинами из $[u] - \Omega$. Отсюда $\gamma_{20} \geq (112 \cdot 111 - 32 - 19 \cdot 93)/20 > 531$ и $\sum_i \gamma_i \geq 535 + 92 + 2 = 626$, противоречие.

Итак, $|\Omega| = 28$. Пусть ребро $\{u, w\}$ принадлежит Ω. В этом случае автоморфизм g индуцирует действие на подграфах $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$. Обозначим через $\alpha'_i(g)$ и $\alpha''_i(g)$ значения $\alpha_i(g)$ для ограничения действия g на подграфах $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ соответственно. Тогда $\alpha'_0(g) = 28 - |\Omega(u)| - 1$, $\alpha''_0(g) = 28 - |\Omega(u)| - |\Omega(w)|$. Из условия целочисленности характера $\varphi_1(g)$ следует, что $|\Omega(u)| \in \{5, 11, 17, 23\}$. Из аналогичного условия для $\psi_1(g)$ следует, что, без ограничения общности, $|\Omega(u)| = 5$, $|\Omega(w)| = 11$. Таким образом, Ω является двудольным графом на 28 вершинах, в котором вершины могут быть смежны только если одна из них имеет степень 5, а другая степень 11. Обозначим через x_i число вершин степени i в Ω. Тогда $x_5 + x_{11} = 28$, $11x_5 = 5x_{11}$ и отсюда $16x_{11} = 308$, противоречие. Лемма доказана.

4. p-автоморфизмы графа $Kre(4)$, $p > 3$ — простое

Пусть до конца работы g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $p = 2$, *и* $\{b, b^g\}$ *— ребро, то пара* $(b^\perp - (b^g)^\perp, (b^g)^\perp - b^\perp)$ *является симметричной* $2-(115, 19, 3)$ *схемой, содержащей* $3 + 8\delta_b$ *абсолютных точек полярности* g *для некоторого целого* $\delta_b \leq 13$;

(2) *если* Ω *— пустой граф, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(*i*) $p = 2$, $\alpha_1(g) = 28t$, *и в случае* $t > 0$ *для любой вершины* b *такой, что* $\{b, b^g\}$ *— ребро,* 5 *делит* $t - 2\delta_b$;

(*ii*) $p = 7$, *любая* $\langle g \rangle$*-орбита является либо* 7*-кокликой, либо* 7*-циклом.*

Доказательство. Пусть $p = 2$. Рассмотрим пару подграфов $(X, Y) = (b^\perp - (b^g)^\perp, (b^g)^\perp - b^\perp)$. Если b и b^g смежны, то (X, Y) — симметричная 2-схема с параметрами (115,19,3). Если же b и b^g несмежны, то (X, Y) является симметричной 2-схемой с параметрами (96,20,4). В обоих случаях автоморфизм g действует как полярность этой схемы, причем в первом случае эта полярность всегда имеет нечетное число абсолютных точек.

Пусть $\{b, b^g\}$ — ребро. Рассмотрим фактор-граф Γ' на множестве орбит Γ, в котором две орбиты смежны, если вершина одной орбиты смежна с некоторой вершиной второй орбиты. Тогда Γ' — регулярный граф степени 115. Обозначим $X = \{x, x^g\}$ и рассмотрим $\Gamma'(B)$ для орбиты B такой, что b смежна с b^g. Легко видеть, что $\Gamma'(B)$ — бирегулярный граф с постоянным значением $\mu = 3$ и $\bar{\mu} = \mu(\bar{\Gamma}'(B)) = 80$. Пусть θ_1, θ_2 — собственные значения матрицы Лапласа (разность матрицы смежности графа и скалярной матрицы, диагональные элементы которой равны степени соответствующей вершины в графе) для графа $\Gamma'(B)$ с кратностями m_1, m_2 соответственно. Тогда по лемме 2.2.2 из [5] имеем $\theta_1 = 23$, $\theta_2 = 15$, и $m_1\theta_1 + m_2\theta_2 = 18n_1 + 19n_2$, где n_1 — число вершин степени 18, n_2 — число вершин степени 19, $m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 = 115$. Отсюда $n_1 = 3 + 8\delta$ для некоторого целого $\delta \leq 13$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω — пустой граф. Тогда p делит 784 и $p \in \{2, 7\}$.

Пусть $p = 2$. Ввиду целочисленности значений характера $\chi_1(g)$ имеем $\alpha_1(g) = 28t$ для целого t. Далее, автоморфизм g действует на $\Gamma_2(b) \cap \Gamma_2(b^g)$, пусть $\alpha_1'(g)$ — число некокликовых g-орбит на $\Gamma_2(b) \cap \Gamma_2(b^g)$. Ввиду целочисленности характера $\psi_1(g)$ число 20 делит $\alpha_1'(g) + 8$. Теперь $\alpha_1'(g) + 8 = \alpha_1(g) - 2 - 2n_1 + 8 = 28t + 6 - 2n_1$. Отсюда 10 делит $4t + 3 - n_1$. Подставив $n_1 = 3 + 8\delta$ из предыдущего утверждения леммы, получим, что 5 делит $t - 2\delta$.

Пусть $p = 7$. Допустим, что вершина x смежна с x^{g^3} и x^g. Тогда x^{g^3} смежна с x^{g^6}, противоречие с тем, что $\{x, x^{g^3}, x^{g^6}\}$ — треугольник. Поэтому $x^{\langle g \rangle}$ является либо 7-кокликой, либо 7-циклом. Лемма доказана.

До конца параграфа предполагается, что $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ — непустой граф и $\alpha_1(g) = pw$. Для двух несмежных вершин a, b из Ω через Ω_{ab} обозначим подграф $\Omega_2(a) \cap \Omega_2(b)$. Если $p \geq 5$, то любая вершина $u \in \Omega_{ab}$ смежна с 4 вершинами из $[a] \cap [b] \cap \Omega$.

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* a, b *— две несмежные вершины из* Ω *и* $|\Omega(a) \cap \Omega(b)| = \beta \geq 3$, *то* $\beta(\beta - 1)(\beta - 2)/3 = 4|\Omega_{ab}|$ *и* $\beta \neq 20$;

(2) *если* $p \neq 2$, *то* Ω *содержит* 3*-коклику.*

Доказательство. Пусть a, b — две несмежные вершины из Ω и $|\Omega(a) \cap \Omega(b)| = \beta \geq 3$. Тогда число 3-лап с центральной вершиной из $\Omega_2(a) \cap \Omega_2(b)$ и 3-кокликой из $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ равно $2\binom{\beta}{3} = 4|\Omega_{ab}|$.

Допустим, что $\beta = \mu = 20$. Тогда $|\Omega_{ab}| = 570$. С другой стороны, $|\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)| = v - 2k - 2 + \mu = 570$, поэтому $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp) \subset \Omega$. В этом случае любая вершина $c \in [a] - \Omega$ смежна с 20 вершинами из $[b]$ и с 96 вершинами из $\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$. Противоречие с тем, что тогда каждая вершина из $\langle g \rangle$-орбиты вершины c смежна с указанными 96 вершинами. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является ω-кликой. Если $\Omega = \{a\}$ и $p > 2$, то $p = 29$. Далее, $\chi_1(g) = (4 - \alpha_1(g) + 112)/28$, поэтому 28 делит $4 - \alpha_1(g)$. С другой стороны, $\varphi_1(g) = (4\alpha_0'(g) - \alpha_1'(g) + 80)/24$, где $\alpha_i'(g)$ — значения $\alpha_i(g)$ для действия g, индуцированного на $\Gamma_2(a)$. Так как $\Gamma_1(a)$ не содержит ребер, то $\alpha_0'(g) = 0$, $\alpha_1'(g) = \alpha_1(g)$. Поэтому 24 делит $8 - \alpha_1(g)$. Отсюда $\alpha_1(g) = 24t + 8$ и 7 делит $6t + 1$. Кроме того, 29 делит $\alpha_1(g)$, поэтому 29 делит $3t + 1$. Отсюда $t \geq 19 + 29u$ для некоторого целого u. По делимости $6t + 1$ на 7 имеем $t > 77$, противоречие с тем, что $\alpha_1(g) \geq 1856$.

Если $\omega = 2$ и $\Omega = \{a, b\}$, то $p = 23$. Далее, $\chi_1(g) = (8 - \alpha_1(g) + 112)/28$, поэтому 28 делит $8 - \alpha_1(g)$, $\varphi_1(g) = (4\alpha_0'(g) - \alpha_1'(g) + 80)/24$, $\psi_1(g) = (4\alpha_0''(g) - \alpha_1''(g) + 72)/20$, где $\alpha_i'(g)$, $\alpha_i''(g)$ — значения $\alpha_i(g)$ для действий g, индуцированных на $\Gamma_2(a)$ и $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$, соответственно. Заметим, что $\alpha_0'(g) = \alpha_0''(g) = 0$, $\alpha_1'(g) = \alpha_1''(g) = \alpha_1(g)$. Поэтому $\alpha_1(g) = 4 \cdot (7q + 2) = 4 \cdot (5t + 3) = 8 \cdot (3u + 1)$ для некоторых целых q, t, u. Если $p = 23$, то 23 делит $7q + 2$, $5t + 3$, $3u + 1$ и $7q + 2 = 5t + 3 = 2 \cdot (3u + 1)$. Отсюда $7q = 6u$ и 6 делит q. Заметим, что из условия делимости $7q + 2$ на 23 следует, что $q = 3 + 23q'$ для некоторого целого q'. Поэтому $q \geq 72$ и $\alpha_1(g) \geq 2024$, противоречие.

Пусть Ω содержит несмежные вершины a, b, но не содержит 3-коклик. Тогда $|[a] \cap [b]| = 20 = p \cdot s + |[a] \cap [b] \cap \Omega|$, где $|[a] \cap [b] \cap \Omega| \leq 2$. Отсюда $p \in \{19, 5, 3, 2\}$. Далее, p делит $|[c] - \{a, b\}|$ для $c \in [a] \cap [b] \cap \Omega$. Предположим, что $p = 19$ и $\{c\} = [a] \cap [b] \cap \Omega$. Тогда Ω является 5-циклом, так как имеет степень 2 и не содержит 3-коклик. Далее, $\chi_1(g) = (20 - \alpha_1(g) + 112)/28$, поэтому 28 делит $20 - \alpha_1(g)$. Для вершины a и действия g на $\Gamma_2(a)$ получим, что 24 делит $8 - \alpha_1(g) + 8$. Для смежных вершин $a, c \in \Omega$ и действия g на $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(c)$ получим, что 20 делит $4 - \alpha_1(g) - 8$. Теперь для некоторых целых q, t, u имеем $28t + 20 = 24q + 16 = 20u + 16$, поэтому $6q = 5u$ и 5 делит q. Так как $\alpha_1(g)$ делится на 19, то $q > 35$, противоречие с тем, что $\alpha_1(g) > 784$.

Пусть теперь $p = 5$. Тогда $[a] \cap [b]$ содержит 4 орбиты. Далее, $|[a] - [b]| = 96$, поэтому $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$ содержат по одной вершине, фиксируемой g. Если эти вершины смежны, то μ-подграф b с вершиной из окрестности a содержит 3-коклику, противоречие. Итак, Ω — это два изолированных ребра. По целочисленности $\chi_1(g)$ получим, что 28 делит $16 - \alpha_1(g)$. Для вершины a и действия g на $\Gamma_2(a)$ получим, что 24 делит $8 - \alpha_1(g) + 8$. Для смежных вершин $a, c \in \Omega$ и действия g на $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(c)$ получим, что 20 делит $8 - \alpha_1(g) + 12$. Теперь для некоторых целых q, t, u имеем $28t + 16 = 24q + 16 = 20u$. Отсюда $t = 6q'$, $q = 7q'$ и $20u = 168q' + 16$ для некоторого целого q'. Далее, параметр q' имеет вид $3 + 5q''$ для некоторого целого q''. Отсюда $\alpha_1(g) \geq 520$. Так как значение $\alpha_1(g)$ для действия g на Γ совпадает со значением $\alpha_1(g)$ для действия g на $\Delta = \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(c)$, то Δ содержит $520/5 = 104$ пятиугольных орбит. Напомним, что подграф $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(c)$ сильно регулярен с параметрами

$(552, 76, 0, 12)$. Теперь для ребра b, d из $\Omega - \{a, c\}$ подграф $\Delta(b) \cup \Delta(d)$ содержит только кокликовые орбиты, поэтому число пятиугольных орбит не больше $(552 - 2 - 150)/5 = 80$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если Ω содержит несмежные вершины, то p не больше* 5.

Доказательство. Пусть $p > 5$. По лемме 5 подграф Ω содержит 3-коклику $\{a, b, c\}$. Тогда $[a] \cap [b] \cap [c]$ является g-допустимой 4-кокликой, поэтому $[a] \cap [b] \cap [c] \subset \Omega$. Так как p действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b] - \Omega$, то $p \leq 13$. Положим $|\Omega(a) \cap \Omega(b)| = \beta$.

Если $p = 13$, то $\beta = 7$, противоречие с леммой 5.

Пусть $p = 11$. Тогда $[a] \cap [b]$ содержит 9 вершин из Ω для любых двух несмежных вершин $a, b \in \Omega$. Поэтому Ω является сильно регулярным графом степени k' без треугольников с $\mu = 9$. По теореме 8.7 [1] получим $k' = 9(s + 1) + s^2 \geq 39$, причем $k - k'$ делится на 11, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $\beta = 6$ или 13. Пусть $\beta = 13$. Тогда по лемме 5 имеем $|\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)| = 143$. В этом случае число 2-путей со средней вершиной в $\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$ и концами в $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ равно $6 \cdot 143 = 858$. Пусть n_1 — число пар $\{c, d\}$ из $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ таких, что $\Omega(c) \cap \Omega(d)$ содержит 6 вершин, n_2 — число пар $\{c, d\}$ таких, что $\Omega(c) \cap \Omega(d)$ содержит 13 вершин. Тогда $n_1 + n_2 = 78$, $4n_1 + 11n_2 = 858$. Отсюда $n_2 = 78$ и Ω — сильно регулярный граф степени k' без треугольников с $\mu = 13$. По теореме 8.7 [1] получим $k' = 13(s+1) + s^2 \geq 64$, причем $k - k'$ делится на 7. Отсюда $k' = 81$. Противоречие с тем, что $k'(k' - 1)$ не делится на μ.

Пусть $\beta = 6$. Тогда Ω — сильно регулярный граф степени k' без треугольников с $\mu = 6$. По теореме 8.7 [1] получим $k' = 6(s + 1) + s^2 \geq 22$, причем $k - k'$ делится на 7. Отсюда $k' = 46$ и $k'(k' - 1)/\mu = 345$. Поэтому $|\Omega| = 1 + 46 + 345 = 392$. С другой стороны, $|\Omega_{ab}| = 6 \cdot 5 \cdot 4/12 = 10$, противоречие.

Лемма 7. *Если Ω содержит несмежные вершины, то $p = 2$.*

Доказательство. По лемме 6 имеем $p \leq 5$. Пусть $p = 5$. Покажем, что Ω является кокликой.

Пусть a, b — две несмежные вершины из Ω и $|\Omega(a) \cap \Omega(b)| = \beta > 0$. Тогда β делится на 5 и ввиду леммы 5 имеем $\beta \neq 15$ (в этом случае $|\Omega_{ab}|$ — не целое число) и $\beta \neq 20$. Допустим, что Ω содержит более одной связной компоненты. Если Ω содержит 3-коклику, то g не может действовать на пересечении окрестностей вершин этой коклики, противоречие. Если Ω не содержит 3-коклики, получим противоречие с леммой 5. Итак, Ω — связный граф.

В случае $\beta = 5$ по лемме 5 получим $|\Omega_{ab}| = 5$ и, следовательно, пересечение окрестностей любых двух вершин из $[a] \cap [b] \cap \Omega$ содержит точно 3 вершины в Ω_{ab}. По связности, Ω — сильно регулярный граф без треугольников с $\mu = 5$. Далее, степень вершины из Ω_{ab} не больше $4 + 1 + 1 = 6$. Значит, либо Ω — двудольный граф с одной долей порядка 5, что невозможно по построению, либо сильно регулярный граф степени 6. В этом случае $|\Omega| = 1 + 6 + 6 = 13$, противоречие с тем, что $|\Omega_{ab}| + 2 + |[a] \cap [b] \cap \Omega| + 2 = 14$.

Если $\beta = 10$, то ввиду рассуждений предыдущего абзаца Ω является сильно регулярным графом с $\mu = 10$, в котором любая 3-коклика лежит в окрестности 4-коклики, противоречие.

Итак, Ω является ω-кокликой. Заметим, что для любых трех вершин $a, b, c \in \Omega$ подграф $[a] \cap [b] \cap [c]$ фиксируется g, поэтому $\omega = 2$, противоречие с леммой 5. Лемма и теорема доказаны.

Автор выражает признательность за ценные рекомендации своему научному руководителю чл.-корр. РАН А.А. Махневу.

Список литературы

[1] Cameron P., Van Lint J., *Designs, Graphs, Codes and their Links*, London Math. Soc. Student Texts 22, 1981. Cambr. Univ. Press. 240 pp.

[2] Гаврилюк А.Л., Махнев А.А., *О графах Крейна без треугольников*, Доклады РАН, матем., **403**: 6 (2005), 727–730.

[3] Махнев А.А., Носов В.В., *Об автоморфизмах сильно регулярных графов Крейна без треугольников*, Алгебра и логика, **44**: 3 (2005), 335–354.

[4] Cameron P., *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts 45, 1999. Cambr. Univ. Press. 220 pp.

[5] Van Dam E., Haemers W.H., *Graphs with constant μ and $\bar{\mu}$*, Discrete Math. 1998, v. 162, 293–307.

Александр Львович Гаврилюк
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620000, Екатеринбург, Россия
E-mail address: ax-g@mail.ru