S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 8–13 (2008) УДК 512.54
MSC 20B05

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ В.Д. МАЗУРОВА

В. А. АНТОНОВ, С. Г. ЧЕКАНОВ

Abstract. A conjecture by V.D. Mazurov states that if, in a 2-Frobenius group $G = P\lambda(\langle x\rangle\lambda\langle y\rangle)$ of type (p, q, r), the subgroup $C_P(y)$ is of exponent p then $Exp(P) = p$. In [1] this conjecture is proved for 2-Frobenius groups of type $(3, 5, 2)$. In this paper a counterexample to Mazurov's conjecture is constructed.

Пусть p, q и r — различные простые числа. Группу $G = P\lambda(\langle x\rangle\lambda\langle y\rangle)$, в которой P является p-группой, $|x| = q$, $|y| = r$, и каждая из подгрупп $P\lambda\langle x\rangle$ и $\langle x\rangle\lambda\langle y\rangle$ является группой Фробениуса, назовем двойной группой Фробениуса типа (p, q, r).

В.Д. Мазуров высказал следующую гипотезу: если в двойной группе Фробениуса типа (p, q, r) подгруппа $C_P(y)$ имеет период p, то и вся P является группой периода p. В работе [1] авторами была доказана справедливость этой гипотезы в случае двойных групп Фробениуса типа $(3, 5, 2)$. Отметим, что из этого результата следует неразрешимость группы, изоспектральной (т.е. имеющей то же множество порядков элементов) группе $S_4(3)$.

В самом деле, Пусть G — разрешимая группа, изоспектральная группе $S_4(3)$. Как показано в [2], в этом случае G является двойной группой Фробениуса. Так как спектр группы $S_4(3)$ совпадает с множеством

$$\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12\}$$

(см. [3]), то $G = (P\lambda\langle x\rangle)\lambda\langle y\rangle$, где P является 3-группой, $|x| = 5$ и $|y| = 4$. Но тогда подгруппа $H = (P\lambda\langle x\rangle)\lambda\langle y^2\rangle$ — двойная группа Фробениуса типа $(3, 5, 2)$. Так как $C_P(y^2)$ имеет период 3, то в силу [1] должно выполнятся равенство $\mathrm{Exp}(P) = 3$, что противоречит наличию в группе P элементов порядка 9.

Antonov V. A., Chekanov S. G. On the Mazurov conjecture.

Поступила 23 октября 2007 г., опубликована 29 января 2008 г.

В тезисах [4] ошибочно была анонсирована справедливость гипотезы В.Д. Мазурова для двойных групп Фробениуса типа $(2,7,3)$. В результате исправления допущенной ошибки построен приведенный ниже контрпример к гипотезе В.Д. Мазурова.

В [1, утверждение 3] было показано, что если B — инвариантная в двойной группе Фробениуса G подгруппа из P, то $C_{P/B}(y) = (C_P(y)\cdot B)/B$. Это означает, что если период $C_P(y)$ равен p, то и период $C_{P/B}(y))$ тоже равен p. Поэтому при исследовании двойных групп Фробениуса с условием $\mathrm{Exp}(C_P(y)) = p$ можно использовать индукцию по порядку группы G. Отметим еще, что так как любая подгруппа порядка qr из дополнительного множителя группы Фробениуса является циклической группой, то в двойной группе Фробениуса элемент y действует на группе P не регулярно.

Если элемент x действует неприводимо на подгруппе A из P, то его можно рассматривать как элемент кольца эндоморфизмов группы A или, что тоже самое, как линейный оператор пространства A. Как правило, в этом случае будем определять действие элемента x на циклическом базисе пространства A.

Лемма 1. *Пусть G — двойная группа Фробениуса типа (p,q,r). Тогда любая минимальная инвариантная в группе G подгруппа из P является минимальной x-допустимой подгруппой.*

Доказательство. Пусть A — минимальная инвариантная в G подгруппа группы P, а B — минимальная x-допустимая подгруппа из A. И пусть n - показатель числа p по модулю q. Предположим, что $A > B$, т.е. $B^y \neq B$. Если $x^y = x^k$, то из $B^y = B^{xy} = (B^y)^{x^k}$ следует, что подгруппа B^y тоже x-допустима. Из x-допустимости $B\cap B^y$ и минимальности B следует, что $B\cap B^y = 1$. Аналогично из x-допустимости подгруппы $(B\times B^y)\cap B^{y^2}$ следует, что либо $A = B\times B^y$, либо $A = B\times B^y \times B^{y^2}$. Из этих рассуждений следует, что $A = \prod\limits_{i=1}^{l} B^{y^{i-1}}$, где $2 \le l \le n$.

Из [5, теорема 2.3.11] следует, что r делит n. Так как $x^y = x^k$, то $k^r \equiv 1(q)$. В то же время, $(p^{n/r})^r \equiv 1(q)$. Но тогда $k \equiv p^{n/r}(q)$. Заменяя, если это необходимо, элемент y на y^t, где $tn/r \equiv 1(q)$, в дальнейшем можно считать, что $k = p$.

Обозначим через X_i матрицу оператора x пространства $B^{y^{i-1}}$ в некотором базисе. Тогда в соответствующем базисе пространства A действие элементов x и y задается матрицами

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{l-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & X_l \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & Y_l \\ Y_1 & 0 & \cdots & 0 & Y_{l+1} \\ 0 & Y_2 & \cdots & 0 & Y_{l+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_{l-1} & Y_{2l-1} \end{pmatrix}.$$

Из равенства $x^y = x^p$ следует, что $YX = X^pY$. Но тогда для $i = 1,\ldots,(l-1)$ выполняются равенства $Y_iX_i = X_{i+1}^pY_i$. Так как подобные матрицы имеют одинаковые минимальные многочлены, а минимальные многочлены матриц X_i и X_i^p совпадают, то минимальные многочлены элемента x на каждом из подпространств $B^{y^{i-1}}$ одинаковы. Но тогда для любого $a \in A$ подгруппа $H =$

$\langle a, a^x, \ldots, a^{x^{n-1}} \rangle$ x-инвариантна. Выберем в качестве a неединичный элемент из $C_A(y)$. Тогда из

$$(a^{x^i})^y = a^{x^i y} = a^{yx^{pi}} = (a^y)^{x^{pi}} = a^{x^{pi}} \in H$$

следует, что $H \lhd G$. В силу минимальности A получаем $A = H$.

Лемма 2. *Если двойная группа Фробениуса $G = P\lambda(\langle x\rangle\lambda\langle y\rangle)$ типа $(2, q, r)$ является минимальным контрпримером к гипотезе В.Д.Мазурова, то либо фактор-группа $P/Z(P)$ является минимальной инвариантной в $G/Z(P)$ подгруппой, либо $P = H_1 \cdot H_2$, подгруппы H_1 и H_2 элементарные абелевы и каждая из фактор-групп $H_i/Z(P)$ является минимальной инвариантной подгруппой группы $G/Z(P)$.*

Доказательство. Если группа P абелева и $\Omega(P)$ — нижний слой группы P, то по условию $C_P(y) \le \Omega(P)$. Но тогда $C_{P/\Omega(P)}(y) = 1$, что невозможно. Поэтому группа P неабелева. Обозначим через $H/Z(P)$ минимальную инвариантную в $G/Z(P)$ подгруппу из $P/Z(P)$. Предположим, что $H \ne P$. Из минимальности G следует, что H и $P/Z(P)$ являются группами периода 2. В частности они абелевы. По теореме Машке группа $P/Z(P)$ разлагается в прямое произведение минимальных инвариантных в $G/Z(P)$ подгрупп. Так как группа P неабелева, то в этом разложении найдутся два таких множителя $H_1/Z(P)$ и $H_2/Z(P)$, что $[H_1, H_2] \ne 1$. Но тогда из минимальности G следует, что $P = H_1 \cdot H_2$.

Построение контрпримера .

Пусть $G = P\lambda(\langle x\rangle\lambda\langle y\rangle)$ — двойная группа Фробениуса типа $(2, 7, 3)$, являющаяся минимальным контрпримером к гипотезе В.Д. Мазурова. Предположим сначала, что $P/Z(P)$ является минимальной нормальной подгруппой группы $G/Z(P)$. Из леммы 1 следует, что в этом случае $|P/Z(P)| = 8$.

Условимся через $\overline{a}$ обозначать смежный класс $aZ(P) \in P/Z(P)$. Пусть $\overline{a}_1$— неединичный элемент из $C_{P/Z(P)}(y)$. Положим $\overline{a}_2 = \overline{a}_1^x$ и $\overline{a}_3 = \overline{a}_2^x$. Так как

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1),$$

то можно считать, что для элемента $x \in$End$(P/Z(P))$ выполняется равенство $x^3 + x + 1 = 0$. Поэтому $\overline{a}_3^x = \overline{a}_1^{x^3} = \overline{a}_1^{x+1} = \overline{a}_1\overline{a}_2$.

Пусть $[a_1, a_2] = z_1$. Если $z_1 = 1$, то, действуя на равенство $[a_1, a_2] = 1$ элементом x, получаем $[a_2, a_3] = 1$. Но тогда $a_2 \in Z(P)$, что невозможно. Поэтому $z_1 \ne 1$. Положим $z_2 = z_1^x$ и $z_3 = z_2^x$. Тогда $z_2 = [a_1, a_2]^x = [a_2, a_3]$, и $z_3 = [a_2, a_3]^x = [a_1, a_3][a_2, a_3]$, т.е. $[a_1, a_3] = z_2z_3$. Кроме того, $z_3^x = [a_2, a_1a_2][a_3, a_1a_2] = z_1z_3$.

Обозначим через a_1 представитель класса $\overline{a}_1$. Из равенства $C_{P/B}(y) = (C_P(y) \cdot B)/B$ следует, что можно считать $a_1 \in C(y)$. В частности, $|a_1| = 2$. Пусть $a_2 = a_1^x$ и $a_3 = a_2^x$. Тогда $a_2^2 = a_3^2 = 1$ и $a_3^x = a_1a_2z$ для некоторого $z \in Z(P)$. Действуя на равенство $a_1^{x^3} = a_1a_2z$ степенями x, последовательно получаем

$$a_1^{x^4} = a_2a_3z^x, \quad a_1^{x^5} = a_3a_1a_2z^{1+x^2}, \quad a_1^{x^6} = a_1a_3z^{1+x+x^3},$$

$$a_1 = a_1^{x^7} = a_1z_1z^{1+x+x^2+x^4}.$$

Поэтому $z^{1+x+x^2+x^4} = z_1$. Действуя на это равенство эндоморфизмом x^3+x+1, и учитывая, что

$$(1+x+x^2+x^4)(x^3+x+1) = x^7+1 = 0,$$

получаем $z_1^{x^3+x+1} = 1$. Но тогда $z_1z_3 = z_1^{x^3} = z_1^{x+1} = z_1z_2$, что невозможно.

Рассмотрим теперь случай, когда $P = H_1 \cdot H_2$.

Так как H_1 и H_2 — элементарные абелевы группы, то по теореме Машке $H_i = Z(P) \times A_i$, для некоторых $\langle x, y\rangle$-допустимых подгрупп A_1 и A_2. Как уже отмечалось, элемент y действует на каждой из подгрупп A_i не регулярно. Пусть

$$A_1 = \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \quad \text{и} \quad A_2 = \langle b_1, b_2, b_3\rangle,$$

где $a_1, b_1 \in C(y)$, $a_{i+1} = a_i^x$, $b_{i+1} = b_i^x$ для $i = 1, 2$. Как и выше считаем, что $a_3^x = a_1a_2$, т.е. действие элемента x на A_1 в базисе $\{a_1, a_2, a_3\}$ задается матрицей

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что действие элемента y в этом базисе определяется матрицей Y. Так как $xy = yx^2$, то должно выполнятся равенство $YX = X^2Y$. Отсюда и из $a_1^y = a_1$ несложно получить, что

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е.$a_2^y = a_3$ и $a_3^y = a_2a_3$.

Так как $C_P(y)$ абелев, то $[a_1, b_1] = 1$. Но тогда

$$[a_2, b_2] = [a_1, b_1]^x = 1, \quad \text{и} \quad [a_3, b_3] = [a_1, b_1]^{x^2} = 1,$$

Предположим, что $b_3^x = b_1b_2$, т.е. действие элементов x и y на группе A_2 в базисе $\{b_1, b_2, b_3\}$ определяется теми же матрицами X и Y. Тогда из $[a_3, b_3]^x = [a_1a_2, b_1b_2] = 1$ следует, что $[a_1, b_2] = [a_2, b_1]$. Действуя на это равенство элементами x и x^2, получаем $[a_2, b_3] = [a_3, b_2]$ и $[a_3, b_1] = [a_1, b_3]$. Положим $z_1 = [a_1, b_2]$. Если $z_1 = 1$, то $z_1^y = [a_1, b_3] = 1$, т.е. $a_1 \in Z(P)$, что невозможно. Поэтому $z_1 \neq 1$. Пусть

$$z_2 = z_1^x = [a_2, b_3], \quad z_3 = z_2^x = [a_3, b_1b_2] = z_2[a_3, b_1].$$

Тогда $[a_3, b_1] = z_2z_3$, и $z_3^x = [a_1a_2, b_2b_3] = z_1z_2z_3z_2 = z_1z_3$. Кроме того,

$$z_1^y = [a_1, b_3] = z_2z_3, \quad z_2^y = [a_3, b_2b_3] = z_2,$$
$$z_3^y = [a_3, b_1b_2]^y = [a_2a_3, b_1b_3] = z_1z_3.$$

Таким образом, контрпримером к гипотезе является группа

$$G = [(\langle z_1\rangle \times \langle z_2\rangle \times \langle z_3\rangle \times \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle)\lambda(\langle b_1\rangle \times \langle b_2\rangle \times \langle b_3\rangle)]\lambda(\langle x\rangle\lambda\langle y\rangle),$$
$$z_i^2 = a_i^2 = b_i^2 = 1 \text{ для } i = 1, 2, 3, \quad x^7 = y^3 = 1, \ x^y = x^2,$$
$$z_1^x = z_2, \ z_2^x = z_3, \ z_3^x = z_1z_3, \ z_1^y = z_2z_3, \ z_2^y = z_2, \ z_3^y = z_1z_3,$$
$$a_1^x = a_2, \ a_2^x = a_3, \ a_3^x = a_1a_2, \ a_1^y = a_1, \ a_2^y = a_3, \ a_3^y = a_2a_3,$$
$$b_1^x = b_2, \ b_2^x = b_3, \ b_3^x = b_1b_2, \ b_1^y = b_1, \ b_2^y = b_3, \ b_3^y = b_2b_3,$$
$$[z_i, a_j] = [z_i, b_j] = [a_i, b_i] = 1 \ \text{ для всех } i, j = 1, 2, 3,$$
$$[a_1, b_2] = [a_2, b_1] = z_1, \ [a_2, b_3] = [a_3, b_2] = z_2, \ [a_3, b_1] = [a_1, b_3] = z_2z_3.$$

В этой группе $C_P(y) = \langle z_2\rangle \times \langle a_1\rangle \times \langle b_1\rangle$ имеет период 2, а период P равен 4.

Проверка корректности. Для проверки корректности построения группы G применим метод коммутаторных матриц. Для удобства перейдем в группах $Z(P)$ и $P/Z(P)$ к аддитивной форме записи. Напомним, что коммутаторные матрицы группы P это такие матрицы $T_k = (t_{ijk})$, $i, j, k = 1, 2, 3$, что $[a_i, b_j] = \sum\limits_{k=1}^{3} z_k^{t_{ijk}}$. В нашем случае

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для любых $a \in A = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ и $b \in B = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ выполняется равенство $[a, b] = \sum\limits_{k=1}^{3} [a]' T_k [b] z_k$, где $[a]$ и $[b]$ — координаты векторов a и b в соответствующих базисах, а штрих означает транспонирование.

Действие элементов x и y на A и B определяется матрицами

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а на $Z(P)$ матрицами

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что $YX = X^2Y$ и $Y_1X_1 = X_1^2Y_1$, т.е. $x^y = x^2$.

Действуя на равенство $[a, b] = \sum\limits_{k=1}^{3} [a]' T_k [b] z_k$ элементами x и y, получаем

$$[a, b]^x = \sum_{k=1}^{3} [a]' T_k [b] z_k^x, \quad [a, b]^y = \sum_{k=1}^{3} [a]' T_k [b] z_k^y.$$

С другой стороны,

$$[a^x, b^x] = \sum_{k=1}^{3} [a]' X' T_k X [b] z_k, \quad \text{и} \quad [a^y, b^y] = \sum_{k=1}^{3} [a]' Y' T_k Y [b] z_k.$$

Приравнивая коэффициенты при z_k, получаем, что

$$(X'T_1X, X'T_2X, X'T_3X) = (T_1, T_2, T_3)X_1'$$

и

$$(Y'T_1Y, Y'T_2Y, Y'T_3Y) = (T_1, T_2, T_3)Y_1',$$

т.е.

$$X'T_1X = T_3, \quad X'T_2X = T_1, \quad X'T_3X = T_2 + T_3,$$
$$Y'T_1Y = T_3, \quad Y'T_2Y = T_1 + T_2, \quad Y'T_3Y = T_1 + T_3.$$

Простая проверка показывает, что все эти равенства выполняются.

Замечание. При построении контрпримера важную роль играло то, что группа периода два 2 обязательно абелева. В связи с этим естественно возникает вопрос о справедливости гипотезы В.Д. Мазурова в случае $p \neq 2$. В частности при $r = 2$. Отметим, что в [1] показано, что если G — контрпример типа $(p, q, 2)$, то группа P не является регулярной p-группой. В частности, ступень нильпотентности группы P не меньше p.

Список литературы

[1] Антонов В.А., Чеканов С.Г., *О двойных группах Фробениуса*, Труды инст. мат. и мех. УрО РАН, **13**:1 (2007),1–8.

[2] Алеева М.Р., *О конечных простых группах с множеством порядков элементов как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса*, Математические заметки, **73**:3 (2003), 323–339.

[3] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A., *An atlas of finite groups* , Oxford,Clarendon Press, 1985.

[4] Антонов В.А., Чеканов С.Г., *О двойных группах Фробениуса, 2*, Междун. конф. "Алгебра и ее приложения". Тезисы докл., Красноярск, 2007, С. 10.

[5] Huppert B., *Endliche Gruppen, 1*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1967

Антонов В.А., Чеканов С.Г.
Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина 80,
454080, Челябинск, Россия
E-mail address: `ava@susu.ac.ru, chekanovs@yandex.ru`