S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 699–707 (2008) УДК 510.67
MSC 03C45

СТАБИЛЬНЫЕ ТЕОРИИ ФРЕШЕ-СТЕПЕНЕЙ

Е. А. ПАЛЮТИН

Abstract. Elementary theories of Frechet-powers A^F of structures A are investigated. We put a special emphasis on the study of such theories under the condition of stability as well as on constructions of their models containing a given sets X which are minimal in the sense that, the dimensions of independent sets represented in X do not increase. The basis results of the paper are the characterization of forking (Theorem 2) and a theorem on preservation of dimension in λ–positive envelopes (Theorem 3).

Keywords: model theory, elementary theories, stability.

1. Введение

В работе изучаются элементарные теории Фреше-степени A^F произвольной структуры A. Основное внимание при изучении этих теорий делается на условие стабильности, а также на конструкции моделей , содержащих данное множество X, являющихся минимальными в том смысле, что в них не увеличиваются размерности независимых множеств, представленные в X. Основными результатами работы является характеризация ответвляемости (теорема 2) и теорема о сохранении размерности в λ-позитивных оболочках (теорема 3).

Интерес к этой тематике связан с построением общей классификационной теории Фреше-замкнутых классов. Эта теория обобщает классификационную теорию моделей модулей (см. [5]), а также классификационную теорию моделей хорновых классов (см. [8]) В частности, теорема 3 позволяет размерностно интерпретировать произвольные графы (см.[4]) в так назаваемых некоммутативных теориях (см. определение в [6, 7]).

Palyutin, E.A., Stable theories of Frechet-powers.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект НШ-344.2008.1.

Поступила 23 декабря 2008 г., опубликована 28 декабря 2008 г.

2. Основные определения и соглашения.

Как обычно, все рассматриваемые теоретико-модельные понятия будут относиться к некоторой фиксированнной в контексте рассмотрения полной теории T языка L и C будет ее монстр-моделью, т.е. достаточно насыщенной моделью этой теории и содержащей в качестве элементарных подструктур все рассматриваемые T-модели. К этой модели будут относиться также элементы, кортежи, множества и т.п. Понятие истинности формул также будет относиться к этой структуре C, хотя структура C при этом обычно указываться не будет. В дальнейшем под формулой будем понимать формулу языка L. Мощность множества предложений языка L будем обозначать через $|L|$.

Жирными буквами конца латинского алфавита $\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{z}$ обозначаются кортежи переменных, а его начала $\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{e}$ — кортежи элементов из структуры C. Для множества R и кортежа $\mathbf{s}$ вместо $\mathbf{s} \in R^n$ пишем просто $\mathbf{s} \in R$.

Запись $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ означает, что все свободные переменные этой формулы принадлежат кортежу $\mathbf{x}$, а параметры принадлежат кортежу $\mathbf{a}$. Запись $\Phi(\mathbf{x})$ означает, что все свободные переменные этой формулы принадлежат кортежу $\mathbf{x}$, однако не содержит информации о параметрах. Если параметры формулы Φ принадлежат множеству A, мы говорим, что формула $\Phi(\mathbf{x})$ является формулой над A.

Под *типом* понимается произвольное совместное множество формул с параметрами из монстр-модели C. Для типа t запись $t(\mathbf{x}; A)$ означает, что тип t состоит из формул вида $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$, где $\mathbf{a} \in A$. Знак $\vdash$ обозначает выводимость в исчислении предикатов. Вместо $(T \cup t) \vdash \Phi$ пишем просто $t \vdash \Phi$. Говорим, что тип t *порождается подтипом* $q \subseteq t$, если выполнено $q \vdash t$.

Для формулы $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ через $\Phi(C; \mathbf{a})$ обозначаем множество $\{\mathbf{b} \mid C \models \Phi(\mathbf{b}; \mathbf{a})\}$. Для типа $t(\mathbf{x}; A)$ через $t(C; A)$ обозначаем множество реализаций типа $t(\mathbf{x}; A)$ в C.

Будем говорить, что *множество* $X \subseteq C$ *делит множество* Y*,* если $(X \cap Y) \neq \varnothing$ и $(Y \setminus X) \neq \varnothing$. Это понятие мы будем применять к формулам $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ и типам $t(\mathbf{x}; A)$, имея в виду множества $\Phi(C; \mathbf{a})$ и $t(C; A)$.

Определение. Для формул Φ и Ψ формулу $(\exists \mathbf{x}\Phi \wedge \forall \mathbf{x}(\Phi \to \Psi))$ будем называть результатом *P-операции,* примененной к формулам Φ и Ψ. (См. определение h-формулы из [2].)

Определение. Формула Φ языка L называется *P-формулой,* если она принадлежит наименьшему классу, содержащему все атомарные формулы и замкнутому относительно конъюнкции и P-операции. Формулы, эквивалентные в исчислении предикатов P-формулам, также будем называть P-формулами. В дальнейшем P-формулы будем называть также *базисными формулами.*

Заметим, что для P-формулы Φ формулы $\exists x\Phi$ и $\forall x\Phi$ эквивалентны соответственно P-формулам $(\exists x\Phi \wedge \forall x(\Phi \to \Phi))$ и $(\exists x\Phi \wedge \forall x(x = x \to \Phi))$. Поэтому можно считать, что класс P-формул замкнут относительно навешивания кванторов.

Пусть $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ — базисная формула $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$ и длины кортежей $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{y}$ совпадают. Тогда множества $\Phi(C; \mathbf{a})$ и $\Phi(C; \mathbf{a})$ называются *базисными копиями.*

Определение. (a) Формула $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ называется *нормальной для* $\mathbf{x}$, если для любых $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in C$ множества $\Phi(C; \mathbf{b})$ и $\Phi(C; \mathbf{c})$ либо совпадают, либо не пересекаются.

(b) Теория T называется *P-нормальной* (*базисно нормальной*), если для любых базисных копий X, Y выполнено $X = Y$ или $X \cap Y = \varnothing$.

Определение. Теория T называется *P-неприводимой* (*базисно неприводимой*), если для любого конечного множества P-формул $\Phi_0(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \ldots, \Phi_n(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ и любого кортежа элементов $\mathbf{a} \in C$ из включения

$$\Phi_0(C; \mathbf{a}) \subseteq \bigcup\{\Phi_1(C; \mathbf{a}), \ldots, \Phi_n(C, \mathbf{a})\}$$

следует включение

$$\Phi_0(C; \mathbf{a}) \subseteq \Phi_i(C; \mathbf{a})$$

для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ясно, что по компактности в предыдущем определении можно убрать условие конечности.

Определение. (a) Множество кортежей D называется *P-множеством* (*над* A), а также *базисным или позитивным* (*над* A) , если $D = \Phi(C)$ для некоторой базисной формулы $\Phi(\mathbf{x})$ (над A).

(b) Эквивалентность на C^n, определенная с помощью базисной формулы $\Phi(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2)$ над $\varnothing$, называется *базисной эквиваленностью* . При этом формулу $\Phi(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2)$ будем также называть базисной эквивалентностью.

Если $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ - базисная формула над $\varnothing$, то через $\mathbf{x}\Phi$ обозначаем формулу

$$\exists \mathbf{y}(\Phi(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}) \wedge \Phi(\mathbf{x}^2, \mathbf{y})).$$

Если теория T базисно нормальна, то формула $(\mathbf{x}\Phi)(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ определяет в C эквивалентность, областью определения которой является множество $\exists \mathbf{y}\Phi(C, \mathbf{y})$, а ее классами будут все непустые множества вида $\Phi(C, \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — набор элементов из C. Отсюда вытекает, что любое непустое базисное множество X является классом некоторой базисной эквивалентности α.

Определение. (a) Множество t, состоящее из базисных формул над A со свободными переменными из кортежа $\mathbf{x}$ и их отрицаний, называется *базисным типом над* A *от* $\mathbf{x}$.

(b) Если t — тип, то через t^+ обозначается множество всех базисных формул, выводимых из типа t, и называется *позитивной частью типа* t . Через t^- будет обозначаться множество всех отрицаний базисных формул, выводимых из типа t.

(c) Совместный тип t от переменных $\mathbf{x}$ называется *базисно полным над* A *от* $\mathbf{x}$, если имеет место $t \vdash \Phi$ или $t \vdash \neg\Phi$ для любой базисной формулы $\Phi(\mathbf{x})$ над A. Базисно полный над A от $\mathbf{x}$ базисный тип t, замкнутый относительно выводимости базисных формул над A от $\mathbf{x}$ и их отрицаний, называется *максимальным базисным* типом над A от $\mathbf{x}$. Ясно, что максимальность базисного типа t означает, что среди совместных базисных типов над A от $\mathbf{x}$ нет собственного расширения типа t.

(d) Если для базисного типа t над A от переменных $\mathbf{x}$ существует тип $q \subseteq t^-$ мощности меньше λ и выполнено $(q \cup t^+) \vdash t$, то тип t называется *λ-позитивным типом над* A *от переменных* $\mathbf{x}$. При этом тип q будем называть *λ-основой* (*над* A *от* $\mathbf{x}$) λ-позитивного типа t (над A от $\mathbf{x}$). Если $\lambda = 1$, то λ-позитивный тип t называется *позитивным типом.* Максимальный λ-позитивный базисный тип называется *λ-максимальным.*

(e) *Базисным типом кортежа* $\mathbf{a}$ *над множеством* A называется множество всех базисных формул над A и их отрицаний, истинных на кортеже $\mathbf{x}$.

(f) Кортеж $\mathbf{a}$ длины n называется *λ-позитивно изолированным над множеством* A, если его базисный тип t над A является λ-позитивным. При этом будем говорить, что тип t *λ-изолирует* кортеж $\mathbf{a}$.

Замечание 1. Из принципа максимума (леммы Цорна) и теоремы компактности вытекает, что если базисный тип p над A от переменных $\mathbf{x}$ порождается своим подтипом $q \subseteq p$, то существует максимальный базисный тип r над A от $\mathbf{x}$, который порождается подтипом $q \cup r^+$ и $p \subseteq r$. Отсюда получаем, что для любого λ-позитивного типа p над A от переменных $\mathbf{x}$ существует максимальный базисный тип над A от $\mathbf{x}$, содержащий тип p и являющийся λ-позитивным над A от $\mathbf{x}$.

3. λ-оболочки

В дальнейшем кардинал λ будет обозначать бесконечный кардинал, не меньший мощности $|L|$.

Определение. 1) Последовательность $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < \mu \rangle$, где μ — некоторый ординал, называется *λ-позитивной конструкцией над A,* если для любого $\alpha < \mu$ элемент a_α λ-позитивно изолирован над множеством $S_\alpha = (A \cup \{a_\beta \mid \beta < \alpha\})$. При этом последовательность S называется *λ-позитивной конструкцией над A множества*

$$B = \bigcup \{S_\alpha \mid \alpha < \mu\}.$$

2) Множество B называется *λ-позитивно конструируемым* (или просто *λ-конструируемым*) *над A*, если существует λ-позитивная конструкция $\langle a_\alpha \mid \alpha < \varkappa \rangle$ над A, для которой $B = (\{a_\alpha \mid \alpha < \varkappa\} \cup A)$.

Предложение 1. *Пусть теория T P-нормальна и t — позитивный тип. Тогда тип t эквивалентен своему ограничению $t \upharpoonright B$ на некоторое множество B мощности $\leqslant |L|$.*

Доказательство. Так как мы рассматриваем только совместные типы, то, в силу P-нормальности, все базисные формулы вида $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a}), \mathbf{a} \in A$, входящие в тип t для конкретной базисной формулы $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, являются эквивалентными. □

Определение. Множество A называется *λ-компактным* , если любой λ-позитивный тип над A реализуется в A.

Предложение 2. *Если A — λ^+-насыщенная модель, то A λ-компактна.*

Доказательство. Следует из предложения 1. □

Определение. Пусть $A \subseteq B$. Множество B называется *λ-позитивной оболочкой* множества A, если B λ-компактно и B является λ-конструируемым над A.

Предложение 3. *Если множество B является максимальным* (*по включению в* C) λ-конструируемым над A, то B λ-компактно.

Доказательство. Пусть $t(x)$ — произвольный λ-позитивный тип над B. По замечанию 1 существует максимальный λ-позитивный тип $p(x)$ над B, расширяющий тип $t(x)$. Пусть элемент a реализует тип $p(x)$. Из максимальности B вытекает $a \in B$. □

Предложение 4. *Если B — λ^+-насыщенная модель, $A \subseteq B$, то существует множество $D \subseteq B$, являющееся λ-позитивной оболочкой множества A.*

Доказательство. Ясно, что в качестве D можно взять максимальное λ-конструируемое над A подмножество множества B.

4. Элиминация кванторов в теории Фреше-степеней

Предложение 5. *Пусть T — теория языка L, для которой множество P-формул неприводимо. Тогда T допускает элиминацию кванторов до P-формул т.е. каждая формула языка L эквивалентна булевой комбинации P-формул.*

Доказательство. Так как класс P-формул замкнут относительно конъюнкции, то достаточно показать, что для любых P-формул $\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n$ формула $\exists\mathbf{x}(\Phi \wedge \neg\Psi_0 \wedge \dots \wedge \neg\Psi_n)$ эквивалентна в T булевой комбинации P-формул. Из неприводимости следует, что эта формула эквивалентна конъюнкции формул $\exists\mathbf{x}(\Phi \wedge \neg\Psi_i)$, $i \in \{0, \dots, n\}$. Ясно, что формула $\exists\mathbf{x}(\Phi \wedge \neg\Psi_i)$ будет эквивалентна формуле $\neg\Theta \wedge \exists\mathbf{x}\Phi$, где $\Theta = (\exists\mathbf{x}\Phi \wedge \forall\mathbf{x}(\Phi \to \Psi_i))$. □

Как известно, *фильтром Фреше* на бесконечном множестве I называется семейство $F_I = \{X \mid I \setminus X \text{конечно}\}$. *Фреше-степенью структуры* A называется приведенная степень $A^\omega \diagup F_\omega$, где ω — множество натуральных чисел.

Предложение 6. *Пусть K — произвольный класс структур языка L. Тогда в теории $T = \mathrm{Th}\{A^F \mid A \in K\}$ Фреше-степеней структур класса K множество P-формул неприводимо.*

Доказательство. Свойство неприводимости множества P-формул записывается бесконечным множеством предложений, поэтому достаточно показать, что в структуре A^F любое покрытие P-множества X P-множествами $Y_0, \dots, Y_n$ не является собственным, т.е. найдется такой $i \in \{0, \dots, n\}$, что $X \subseteq Y_i$. Пусть $X = \Phi(A^F; \mathbf{f}/F)$, $Y_i = \Psi_i(A^F; \mathbf{f}/F)$. Предположим, что для любого $i \in \{0, \dots, n\}$ включение $X \subseteq Y_i$ не имеет места. Тогда $X \neq \varnothing$, следовательно, условие $X \subseteq Y_i$ записывается P-формулой. Так как P-формулы фильтруются по любому фильтру, то множество $U = \{j \in \omega \mid \Phi(A; \mathbf{f}(j)) \neq \varnothing\}$ имеет конечное дополнение в ω и для любого $i \in \{0, \dots, n\}$ множества

$$Z_i = \{j \in \omega \mid j \in U, \Phi(A; \mathbf{f}(j) \nsubseteq \Psi_i(A; \mathbf{f}(j))\}$$

бесконечны. Возьмем бесконечные множества $Z_0^*, \dots, Z_n^*$ со свойствами $Z_i^* \subseteq Z_i$ и $(Z_i^* \cap Z_j^*) = \varnothing$ для $i \neq j$. Возьмем функцию $\mathbf{g} : \omega \to A^k$ со следующими свойствами: для любого $j \in U$ выполнено $A \models (\Phi(\mathbf{g}(j); \mathbf{f}(j))$ и для любого $i \in \{0, \dots, n\}$ и $j \in Z_i^*$ выполнено $A \models \neg\Psi_i(\mathbf{g}(j); \mathbf{f}(j))$. Таким образом, мы имеем $\mathbf{g}/F \in X$ и $\mathbf{g}/F \notin Y_i$. □

Определение. Если в теории T каждая формула эквивалентна булевой комбинации P-формул, то теорию T будем называть P-теорией.

Предложение 7. *Пусть B — λ^+-насыщенная модель некоторой P-теории T, $A \subseteq B$. Тогда λ-позитивная оболочка A^* множества A в B является элементарной подмоделью структуры B.*

Доказательство. По известному критерию элементарной эквивалентности и элиминации кванторов в теории T до P-формул требуется показать, что для любых P-формул $\Phi(x; \mathbf{y}), \Psi_1(x; \mathbf{y}), \dots, \Psi_n(x; \mathbf{y})$ и любого кортежа $\mathbf{a} \in A^*$ из истинности формулы

$$\exists x(\Phi(x; \mathbf{b}) \wedge \neg\Psi_1(x; \mathbf{b}) \wedge \dots \wedge \neg\Psi_n(x; \mathbf{b}))$$

в B следует истинность в B формулы

$$(\Phi(a; \mathbf{b}) \wedge \neg\Psi_1(a; \mathbf{b}) \wedge \dots \wedge \neg\Psi_n(a; \mathbf{b}))$$

для некоторого элемента $a \in A^*$. По замечанию 1 существует максимальный λ-позитивный тип $t(x)$ над $(\mathbf{a} \cup \mathbf{b})$, содержащий множество

$$\{\Phi(x; \mathbf{b}), \neg\Psi_1(x; \mathbf{b}), \cdots, \neg\Psi_n(x; \mathbf{b})\}.$$

По определению λ-позитивной оболочки найдется элемент $a \in A^*$, реализующий тип $t(x)$. □

Определение. Пусть T — полная теория, M — ее модель. Тогда теория $\mathrm{Th}(M^F)$ называется P-компаньоном теории T и обозначается через T^P.

Это определение корректно, т.е. не зависит от выбора модели M, поскольку операция взятия Фреше-степени сохраняет элементарную эквивалентность.

Из ранее доказанного следует, что P-компаньон любой теории является P-теорией.

Следующая теорема по-существу известна (см. [2] и [8]).

Теорема 1. *Для P-компаньона T^P любой теории T следующие условия эквивалентны.*

(1) *теория T стабильна;*

(2) *теория T P-нормальна.*

5. Ответвляемость в теории Фреше-степеней

В этом параграфе мы предполагаем, что T — полная, P-нормальная, P-неприводимая P-теория. В частности, T — стабильная теория некоторой Фреше-степени A^F.

Напомним, что означает ответвляемость типа (см. [1]).

Это понятие определяется через понятие делимости формулы $\alpha(\mathbf{x};\mathbf{a})$ над множеством A. А именно, формула $\alpha(\mathbf{x};\mathbf{a})$ *делится над множеством A,* если существуют $k \in \omega, k \neq 0$, и множество $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \omega\}$, состоящее из кортежей, элементарно эквивалентных над A кортежу $\mathbf{a}$, и для любых $i_1 < \dots < i_k$ выполнено

$$(\alpha(C;\mathbf{a}_{i_1}) \cap \dots \cap \alpha(C;\mathbf{a}_{i_k})) = \varnothing.$$

Ясно, что если формула $\alpha(\mathbf{x};\mathbf{a})$ делится над множеством A и выполняется $\beta(\mathbf{x};\mathbf{a}) \vdash \alpha(\mathbf{x};\mathbf{a})$, то формула $\beta(\mathbf{x};\mathbf{a})$ делится над A.

Тип $t(\mathbf{x})$ над множеством B *ответвляется над $A \subseteq B$,* если существуют формулы $\alpha_1(\mathbf{x};\mathbf{a}_1),\dots,\alpha_n(\mathbf{x};\mathbf{a}_n)$, делящиеся над A, и имеет место

$$t(\mathbf{x}) \vdash (\alpha_1(\mathbf{x};\mathbf{a}_1) \vee \dots \vee \alpha_n(C;\mathbf{a}_n)).$$

Отметим, что кортежи $\mathbf{a}_i$ в предыдущем определении в общем случае не обязаны принадлежать множеству B, поэтому даже при полном типе $t(\mathbf{x})$ число n нельзя заменить на 1. Сейчас мы покажем, что в нашем случае это сделать можно.

Предложение 8. *Если для P-формул $\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{a}),\dots,\Phi_n(\mathbf{x};\mathbf{a})$ и некоторого полного типа $t(\mathbf{x})$ над некоторым множеством B выполнено*

$$t(\mathbf{x}) \vdash (\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{a}) \vee \dots \vee \Phi_k(\mathbf{x};\mathbf{a})),$$

то имеет место

$$t^+(\mathbf{x}) \vdash \Phi_j(\mathbf{x},\mathbf{a})$$

для некоторого $j \in \{1,\dots,n\}$.

Доказательство. Из полноты типа $t(\mathbf{x})$ и предложения 5 следует, что для некоторых P-формул $\Psi_0(\mathbf{x},\mathbf{b}),\Psi_1(\mathbf{x};\mathbf{b}),\dots,\Psi_n(\mathbf{x};\mathbf{b})$ выполнено

$$\alpha(\mathbf{x}) \vdash (\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{a}) \vee \dots \vee \Phi_k(\mathbf{x};\mathbf{a})),$$

где $\alpha(\mathbf{x}) \in t(\mathbf{x})$ и

$$\alpha(\mathbf{x}) = (\Psi_0(\mathbf{x},\mathbf{b}) \wedge \neg\Psi_1(\mathbf{x};\mathbf{b}) \wedge \dots \neg\Psi_n(\mathbf{x};\mathbf{b})).$$

Тогда выполняется включение

$$\Psi_0(C,\mathbf{b}) \subseteq (\Psi_1(C;\mathbf{b}) \cup \dots \cup \Psi_n(C;\mathbf{b}) \cup \Phi_1(C,\mathbf{a}) \cup \dots \cup \Phi_k(C;\mathbf{a})).$$

Из P-неприводимости это влечет либо включение $\Psi_0(C,\mathbf{b}) \subseteq \Psi_i(C;\mathbf{b})$ либо $\Psi_0(C,\mathbf{b}) \subseteq \Phi_j(C;\mathbf{a})$. Первое включение невозможно, так как тип $t(\mathbf{x})$ совместен и $\alpha(\mathbf{x}) \in t(\mathbf{x})$. Таким образом, в силу того, что $\Psi_0(C,\mathbf{b}) \in t^+(\mathbf{x})$, мы имеем $t^+(\mathbf{x}) \vdash \Phi_j(\mathbf{x},\mathbf{a})$. □

Лемма 1. *Пусть для P-формул $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{a}),\Psi_1(\mathbf{x};\mathbf{a}),\dots,\Psi_n(\mathbf{x};\mathbf{a})$ формула*

$$\Phi(\mathbf{x};\mathbf{a}) = (\Phi_0(\mathbf{x},\mathbf{a}) \wedge \neg\Psi_1(\mathbf{x};\mathbf{a}) \wedge \dots \neg\Psi_n(\mathbf{x};\mathbf{a}))$$

выполнима и делится над A. Тогда P-формула $\Phi_0(\mathbf{x},\mathbf{a})$ делится над A.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \omega\}$ — множество кортежей из определения делимости формулы $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{a})$ над множеством A. Если среди множеств $\{\Phi_0(C;\mathbf{a}_i) \mid i \in \omega\}$ имеется бесконечное подмножество S попарно различных, то по P-нормальности S состоит из попарно непересекающихся множеств. Следовательно, формула $\Phi_0(\mathbf{x},\mathbf{a})$ делится над A. В противном случае, можно считать, что все множества $\Phi_0(\mathbf{x},\mathbf{a}_i), i \in \omega$, совпадают. Тогда из равенства

$$(\Phi(C;\mathbf{a}_{i_1}) \cap \dots \cap \Phi(C;\mathbf{a}_{i_k})) = \varnothing$$

вытекает включение

$$\Phi_0(C;\mathbf{a}_{i_1}) \subseteq \bigcup\{\Psi_j(C;\mathbf{a}_l) \mid j \in \{1,\dots n\}, l \in \{i_1,\dots,i_k\}\}.$$

По P-неприводимости найдутся такие $j \in \{1,\dots n\}$ и $l \in \{i_1,\dots,i_k\}$, что выполняется включение

$$\Phi_0(C;\mathbf{a}_{i_1}) \subseteq \Psi_j(C;\mathbf{a}_l).$$

Так как мы имеем равенство $\Phi_0(C;\mathbf{a}_{i_1}) = \Phi_0(C;\mathbf{a}_l)$, то выполняется включение

$$\Phi_0(C;\mathbf{a}_l) \subseteq \Psi_j(C;\mathbf{a}_l).$$

Так как $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_l$ элементарно эквивалентны, то это противоречит выполнимости формулы $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{a})$. □

Теорема 2. *Пусть T — стабильная теория некоторой Фреше-степени,* $\mathbf{a}$ — *некоторый кортеж, $A \subseteq B \subseteq C$. Следующие условия равносильны:*

(1) *тип $tp(\mathbf{a};B)$ ответвляется над множеством A;*

(2) $tp^+(\mathbf{a};A) \nvdash tp^+(\mathbf{a};B)$*;*

(3) *тип $tp(\mathbf{a};A)$ делится типом $tp^+(\mathbf{a};B)$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть тип $tp(\mathbf{a};B)$ ответвляется над A. В силу предложения 5, замечания после определения делимости и леммы 1, можно считать, что формулы $\alpha_1(\mathbf{x};\mathbf{a}_1),\dots,\alpha_n(\mathbf{x};\mathbf{a}_n)$ из определения ответвляемости являются P-формулами и $n = 1$. Таким образом, $tp^+(\mathbf{a};B) \vdash \Phi(\mathbf{x};\mathbf{d})$ для P-формулы $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{d})$, делящейся над A. Возьмем P-формулу $\Psi(\mathbf{x};\mathbf{b}) \in tp^+(\mathbf{a};B)$, для которой выполняется $\Psi(\mathbf{x};\mathbf{b}) \vdash \Phi(\mathbf{x};\mathbf{d})$. Ясно, что формула $\Psi(\mathbf{x};\mathbf{b})$ будет делить позитивный тип $tp^+(\mathbf{a};A)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть для некоторой P-формулы $\Psi(\mathbf{x};\mathbf{b}) \in tp^+(\mathbf{a};B)$ мы имеем $tp^+(\mathbf{a};A) \nvdash \Psi(\mathbf{x};\mathbf{b})$. Покажем, что P-формула $\Psi(\mathbf{x};\mathbf{b})$ делит тип $tp(\mathbf{a};A)$. Если это не так, то мы имеем $tp(\mathbf{a};A) \vdash \Psi(\mathbf{x};\mathbf{b})$. Это означает, что позитивный тип $tp^+(\mathbf{a};A)$ покрывается P-множествами $\Psi(C;\mathbf{b})$ и $\Gamma(C;\mathbf{d})$, где $\neg\Gamma(C;\mathbf{d}) \in tp(\mathbf{a};A)$. По компактности, P-неприводимрсти и условию

$$tp^+(C;A) \nsubseteq \Psi(C;\mathbf{b})$$

мы имеем включение

$$tp^+(C;A) \subseteq \Gamma(C;\mathbf{d}),$$

где $\neg\Gamma(C;\mathbf{d}) \in tp(\mathbf{a};A)$. Это противоречит условию $\models \neg\Gamma(\mathbf{a};\mathbf{d})$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть тип $tp(\mathbf{a};A)$ делится типом $tp^+(\mathbf{a};B)$. Значит, существует такая P-формула $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{b}) \in tp^+(\mathbf{a};B)$, что $tp(\mathbf{a};A) \nvdash \Phi(\mathbf{x};\mathbf{b})$. Заменим формулу $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{b})$ на эквивалентную ей формулу $\gamma(\mathbf{x};\mathbf{a})$, где γ — P-эквивалентность, равная формуле $\mathbf{x}\Phi$. Так как P-формула $\gamma(\mathbf{x};\mathbf{x})$ принадлежит позитиному типу $tp^+(\mathbf{a};A)$, то из P-неприводимости следует, что индекс эквивалентности γ в множестве $tp(C;A)$ бесконечен. Возьмем в множестве $tp(C;A)$ попарно не γ-эквивалентные кортежи $\mathbf{a}_i$, $i \in \omega$. Ясно, что эти кортежи будут элементарно эквивалентными над A, следовательно, формула $\gamma(\mathbf{x};\mathbf{a})$ делится над A. В силу условия $tp(\mathbf{a};B) \vdash \gamma(\mathbf{x};\mathbf{a})$ тип $tp(\mathbf{a};B)$ ответвляется над множеством A. □

6. Сохранение размерности в λ-оболочках

В этом параграфе, как и в предыдущем, мы предполагаем, что T — полная, P-нормальная, P-неприводимая P-теория. В частности, T — стабильная теория некоторой Фреше-степени A^F.

Определение. Будем говорить, что множество A независимо в типе $t(\mathbf{x})$, если $A \subseteq t(C)$ и для любого кортежа $\mathbf{a} \in A$, базисной формулы $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{a})$ и любого элемента $b \in A$, не принадлежащего кортежу $\mathbf{a}$, из условия $b \in \Phi(C;\mathbf{a})$ следует $t(C) \subseteq \Phi(C;\mathbf{a})$.

Теорема 3. *Пусть B — λ-позитивно конструируемая над $(D \cup A)$ модель теории T, $|A| \geqslant \lambda$, $t(x)$ — тип над $(D \cup A)$, A — множество, независимое в типе $t(x)$. Пусть выполняется следующее условие:*

(*) если некоторая P-формула $\Phi(x)$ над $(D \cup A)$ делит тип $t(x)$, то существует формула $\Psi(x)$ над A, которая делит тип $t(x)$ и для которой выполняется $t(x) \vdash (\Phi(x) \to \Psi(x))$.

Тогда множество A является максимальным независимым в типе $t(x)$ подмножеством множества $t(B)$.

Доказательство. Пусть $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < \mu \rangle$ — λ-позитивная конструкция над $(D \cup A)$ для структуры B.

Индукцией по $\alpha < \mu$ покажем, что имеет место утверждение $(*)_\alpha$, которое получается из условия (*) заменой D на $(D \cup S_\alpha)$.

При $\alpha = 0$ — это условие (*). Пусть для всех $\beta < \alpha$ утверждение $(*)_\beta$ имеет место. Для предельного α индукционный шаг очевиден. Будем считать что ординал $\alpha - 1$ существует. Пусть P-формула $\Phi(x, \mathbf{d}; a_{\alpha-1})$ делит тип $t(x)$, где $\Phi(x, \mathbf{y}; z)$ — формула без параметров и $\mathbf{d} \in (S_{\alpha-1})$. Рассмотрим λ-позитивный тип $q(z)$, изолирующий элемент $a_{\alpha-1}$.

Случай 1: для некоторого $a \in A$ имеет место $a \in \Phi(C, \mathbf{d}; a_{\alpha-1})$.

В этом случае в качестве $\Psi(x)$ можно взять формулу $(x\Phi)(x, a)$.

В дальнейшем будем предполаеать, что случай 1 не имеет места. Так как тип $q(z)$ полон над $S_{\alpha-1}$ и $A \subseteq S_{\alpha-1}$, то для любой реализации b типа $q(z)$ мы имеем

$$(\Phi(C, \mathbf{d}; b) \cap A) = \varnothing.$$

Случай 2: существует некоторая P-формула $\Theta(z) \in q^+(z)$, для которой множество X делит тип $t(x)$, где

$$X = \bigcup \{\Phi(C, \mathbf{d}; b) \mid b \in \Theta(C)\}.$$

Множество X определяется P-формулой над $S_{\alpha-1}$, и по индукционному предположению найдется такая P-формула $\Xi(x)$ над A, которая делит тип $t(x)$ и для которой выполняется включение

$$(t(C) \cap X) \subseteq \Xi(C).$$

Из включение $\Phi(C, \mathbf{d}; a_{\alpha-1}) \subseteq X$, мы получаем утверждение $(*)_\alpha$.

Случай 3: отрицание случаев 1 и 2.

Возьмем множество P-формул Q над $S_{\alpha-1}$, имеющее мощность $\varkappa < \lambda$, такое, что тип q порождается множеством $(q^+ \cup \{\neg\Theta \mid \Theta \in Q\})$. По условию случая 3 мы имеем включение

$$A \subseteq \bigcup \{\Phi(C, \mathbf{d}; b) \mid b \in \Theta(C), \Theta(z) \in Q\},$$

а также, для каждого $a \in A$ выполненяется включение

$$(q^+(C) \cap \Phi(a, \mathbf{d}; C)) \subseteq \bigcup \{\Theta(C) \mid \Theta(z) \in Q\}.$$

По компактности и неприводимости для некоторых P-формул $\Delta(z) \in q^+(C)$ и $\Theta(z) \in Q$ выполнено условие

$$(\Delta(C) \cap \Phi(a, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta(C).$$

В силу условий на мощности $|A| \geqslant \lambda$ и $|Q| < \lambda$, найдется такая формула $\Theta_0 \in Q$, что для некоторых P-формул $\Delta_1(z), \Delta_2(z) \in q^+(C)$ и различных $a_1, a_2 \in A$ выполнены включения

$$(\Delta_i(C) \cap \Phi(a_i, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta_0(C), i \in \{1, 2\}.$$

Тогда для $\Delta_0(z) = (\Delta_1(z) \wedge \Delta_2(z))$ выполняется включение

$$(\Delta_0(C) \cap \Phi(a_i, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta_0(C), i \in \{1, 2\}.$$

Так как такое включение записывается с помощью P-формулы $\Gamma(x)$, то P-эквивалентность $x\Gamma$ будет делить тип $t(x)$ и один из ее классов будет содержать более одного элемента из множества A. В силу теоремы 2, это противоречит независимости множества A в типе $t(x)$.

Теперь докажем утверждение теоремы, используя утверждения $(*)_\alpha$ для всех $\alpha < \mu$. Предположим утверждение теоремы ложно, т.е. для некоторого $\alpha < \mu$ элемент a_α реализует тип $t(x)$, $a_\alpha \notin A$ и множество $(A \cup \{a_\alpha\})$ независимо в типе $t(x)$. Пусть λ-позитивный тип $q(x)$ λ-изолирует элемент a_α над множеством S_α.

Случай 1: позитивный тип $q^+(x)$ делит тип $t(x)$.

По компактности получаем, что некоторая P-формула $\Phi(x) \in q^+(x)$ делит тип $t(x)$. По утверждению $(*)_\alpha$ найдется P-формула $\Psi(x)$ над A, которая делит тип $t(x)$ и выполнено условие $t(x) \vdash (\Phi(x) \to \Psi(x))$. Это противоречит условиям $\models \Phi(a_\alpha)$ и независимости $(A \cup \{a_\alpha\})$.

Случай 2: отрицание случая 1.

Так как тип $q(x)$ является λ-позитивным, $a_\alpha \notin A$, то множество A покрывается семейством P-множеств мощности $< \lambda$, каждый из которых делит тип $t(x)$. Следовательно, одно из множеств этого семейства содержит более одного элемента из множества A. Это противоречит независимости множества A в типе $t(x)$. □

Список литературы:

[1] S.Shelah, *Classification theory and the number of non-isomorphic models*, Amsterdam: North-Holland, 1978.

[2] Е.А.Палютин, *Категоричные хорновы классы. 1*, Алгебра и логика, **19**: 5 (1980), 582–614.

[3] Е.А.Палютин, *Примитивно связные теории*, Алгебра и логика, **39**: 2 (2000), 145–169.

[4] Е.А.Палютин, *Элиминация кванторов в Фреше-замкнутых классах без интерпретации графов*, Труды Международной научной конференции "Современные проблемы математики, информатики и управления" г. Алматы, 2008, 469–469.

[5] M.Ziegler, *Model theory of modules*, Ann. Pure and Appl. Logic, **26** (1984), 149–213.

[6] Е.А.Палютин, *Элиминация кванторов для коммутативных теорий*, Доклады РАН, **363**: 3 (1998), 301–303.

[7] Palyutin E.A., *Commutative theories*, The Bulletin of Symb. Log., **5**: 1 (1999), 65–66.

[8] Palyutin E.A., Starchenko S.S., *Horn theories with non-maximal spectrum*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 195 (1999), 225–284.

Евгений Андреевич Палютин
Институт математики им. С.Л.Соболева,
проспект Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: palyutin@math.nsc.ru