S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 691–698 (2008) УДК 512.552.7

MSC 16S34

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ МЕТАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП ФРОБЕНИУСА

Е. О. ШУМАКОВА

Abstract. We prove the formula which allow us to compute ranks of the groups of central units in integral group rings for Frobenius metacyclic groups.

Keywords: Frobenius group, metacyclic group, central units, integral group rings.

1. Введение

Классической темой исследований по алгебре является изучение групповых колец, в частности их групп единиц. В 1940 году была опубликована статья Хигмана 'The units of group rings', результаты которой определили дальнейшее развитие теории единиц групповых колец.

Усилиями Р.Ж. Алеева и его учеников (смотри [2], [3], [10]) были исследованы группы центральных единиц для некоторых неразрешимых групп, таких как, A_5, A_6, $PSL(2,q)$ и т.д. С другой стороны, в работе [5] рассматриваются группы центральных единиц конечных нильпотентных групп. Таким образом, группы центральных единиц разрешимых ненильпотентных групп не подвергались тщательному изучению.

В данной работе получена формулу для вычисления ранга группы центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса.

Shumakova, E.O., Central units in integral group rings for Frobenius metacyclic groups.

Поступила 26 сентября 2008 г., опубликована 26 декабря 2008 г.

2. Определения и предварительные результаты

Пусть n — натуральное число. Тогда: $\tau(n)$ — число всех натуральных делителей n, $[n]$ — целая часть n, $\varphi(n)$ — теоретико-числовая функция Эйлера, $\rho(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ — четно,} \\ 1, & n \text{ — нечетно.} \end{cases}$

Пусть G — конечная группа. Тогда: $\mathbb{Z}G$ — целочисленное групповое кольцо группы G, $U(Z(\mathbb{Z}G))$ — группа центральных единиц группового кольца $\mathbb{Z}G$.

Нам потребуется следующая

Теорема 1 (Теорема 3 [1]). *Любая единица конечного порядка из $Z(\mathbb{Z}G)$ тривиальна, то есть имеет вид $\pm z$, где z — центральный элемент группы G.*

Будем использовать определения $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ классов из работ [6] и [4]:

Определение 1. *Элементы $a, b \in G$ называются $\mathbb{Q}$-сопряженными, если существует такой $x \in G$, что $x^{-1}bx = a^s$, $(s, |G|) = 1$.*

Определение 2. $\mathbb{Q}$-*класс* $\{a^G\}_Q = \bigcup\limits_{s=1 (s,|G|)=1}^{|a|-1} \{(a^s)^G\}$.

Определение 3. *Элементы $a, b \in G$ называются $\mathbb{R}$-сопряженными, если существует такой $x \in G$, что $x^{-1}bx = a^{\pm 1}$.*

Определение 4. $\mathbb{R}$-*класс* $\{a^G\}_R = \{a^G\} \cup \{(a^{-1})^G\}$.

Обозначим число $\mathbb{Q}$-классов n_Q, а $\mathbb{R}$-классов n_R.

Ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца (по формуле Ферраза [4]) равен

$$\mathrm{r}(U(Z(\mathbb{Z}G))) = n_R - n_Q.$$

Определение 5. *Метациклической называется группа G, содержащая циклический нормальный делитель A такой, что фактор-группа G/A циклична* [9, § 47].

Пусть G_{mn} — метациклическая группа, порожденная двумя элементами a и b с определяющими соотношениями:

$$a^m = 1,\ b^n = 1,\ a^{-1}ba = b^q,\ q^n \equiv 1 \pmod m.$$

Пусть $\{l_s \mid s = 1, \dots, \tau(m)\}$ — все делители числа m, упорядоченные по возрастанию, и δ_s — показатель q по модулю l_s, $s = 2, \dots, \tau(m)$.

Лемма 1. *Пусть $G_{mn} = \langle a, b \mid b^m = a^n = 1,\ a^{-1}ba = b^q \rangle$ — метациклическая группа. Тогда $q^n \equiv 1 \pmod{l_s}$, $s = 2, \dots, \tau(m)$*

Доказательство. Утверждение следует из предложений 4.2.1 и 4.2.3 [7, глава 4, § 2]. □

Пусть $\{k_t \mid t = 1, \dots, \tau(n)\}$ — все делители числа n, упорядоченные по возрастанию, и

$$\theta_t = \begin{cases} \text{НОК}\left\{ l_s \mid \delta_s = \frac{n}{k_t} \right\}, & \text{если } \frac{n}{k_t} \in \{\delta_s \mid s = 2, \dots, \tau(m)\}, \\ 1, & \text{если } \frac{n}{k_t} \notin \{\delta_s \mid s = 2, \dots, \tau(m)\}, \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть* $G_{mn} = \langle a, b \mid b^m = a^n = 1,\ a^{-1}ba = b^q \rangle$ *— метациклическая группа. Тогда для всех* t *таких, что* $\frac{n}{k_t} \in \{\delta_s \mid s = 2, \dots, \tau(m)\}$ *выполняется*

$$q^{n/k_t} \equiv 1 \pmod{\theta_t}.$$

Доказательство. Утверждение очевидно следует из обозначения θ_t и предложений 4.2.1 и 4.2.3 [7, глава 4, § 2]. Более того, по смыслу θ_t выполняется $q^{n/k_t} \equiv 1 + \theta_t z \pmod{m}$, где НОК$(m, z) = 1$. □

Пусть

$$\mathcal{N} = \sum_{t=2}^{\tau(n)} \theta_t \varphi(k_t),$$

$$\mathcal{M} = \sum_{s=2}^{\tau(m)} \frac{1}{\delta_s} \varphi(l_s),$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \sum \frac{1}{\delta_s} \varphi(l_s), \text{ для всех } s \text{ таких, что } q^{\delta_s/2} \equiv -1 \pmod{l_s}, \\ 0, \text{ если нет } s \text{ таких, что } q^{\delta_s/2} \equiv -1 \pmod{l_s}. \end{cases}$$

Определение 6. *Групой Фробениуса* F *называется транзитивная группа подстановок, в которой только 1 фиксирует более одного символа, а подгруппа* H *фиксирующая один символ нетривиальна и называется дополнением группы Фробениуса* F*. Подмножество группы* F *состоящее из 1 и элементов, не фиксирующих ни одного символа образует нормальную подгруппу* K*, называемую ядром группы Фробениуса* $F = K \rightthreetimes H$*.*

Теорема 2 ([8, § 22, следствие 1])**.** *Пусть группа* G *содержит собственную подгруппу* H *такую, что*

(1) $N_G(H) = H$;
(2) $H \cap H^x = 1$ *при* $x \in G \setminus H$.

Тогда группа G *имеет нормальную подгруппу* K *такую, что* $G = K \rightthreetimes H$*. В частности, группа* G*, удовлетворяющая этим условиям, является группой Фробениуса с ядром* K *и дополнением* H*. Кроме того,* N *и* H *— холловы подгруппы в* G*,* $|H|$ *делит* $|N| - 1$*,* H *содержит не более одной инволюции и* N *нильпотентна.*

Пусть $F_{mn} = \langle b \rangle_m \rightthreetimes \langle a \rangle_n$ — метациклическая группа Фробениуса порядка mn с ядром $\langle b \rangle$ порядка m и дополнением $\langle a \rangle$ порядка n.

3. Группы центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса

Лемма 3. *Число* $\mathbb{R}$*-классов метациклической группы* $G_{mn} = \langle a, b \mid b^m = a^n = 1,\ a^{-1}ba = b^q \rangle$*, равно*

$$n_R = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{M} + \mathcal{N} + 1 - \rho(m)\right), & \text{если } n \text{ — нечетно}, \\ 2 + \frac{1}{2}(\mathcal{N} - \rho(\theta_2) + \mathcal{M} + \mathcal{R} + 1 - \rho(m)), & \text{если } n \text{ — четно}, \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{s=2}^{\tau(m)}\dfrac{1}{\delta_s}\varphi(l_s)+\sum\limits_{t=2}^{\tau(n)}\theta_t\varphi(k_t)+1-\rho(m)\right), & \textit{если } n \textit{ — нечетно},\\ 2+\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{t=2}^{\tau(n)}\theta_t\varphi(k_t)-\rho(\theta_2)+\sum\limits_{s=2}^{\tau(m)}\dfrac{1}{\delta_s}\varphi(l_s)+\sum\limits_{q^{\delta_s/2}\equiv -1\pmod{l_s}}\dfrac{1}{\delta_s}\varphi(l_s)+1-\rho(m)\right), & \\ & \textit{если } n \textit{ — четно}. \end{cases}$$

Доказательство. Построим классы сопряженных элементов группы G_{mn}. Рассмотрим полную систему вычетов по модулю m: $\{0,1,\dots,m-1\}$ и распределим на $\tau(m)$ множеств $M_s=\{j_{si}\mid \text{НОД}(j_{si},m)=\frac{m}{l_s}\}$, $s=1,\dots,\tau(m)$, то есть $M_1=\{0\}$, $\dots$, $M_{\tau(m)}=\{j_{\tau(m)i}\mid \text{НОД}(j_{\tau(m)i},m)=1\}$. Тогда $|M_s|=\varphi(l_s)$.

① Рассмотрим классы сопряженных элементов вида

$$(b^{j_{si}})^{G_{mn}}=\{b^{j_{si}},b^{qj_{si}},b^{q^2j_{si}},\dots\},\ \text{где } j_{si}\in M_s.$$

Ясно, что для $s=1$, $b^m=1$ и $C_0=\{e\}$. Заметим, что

$$b^{j_{si}q^x}=b^{j_{si}}\Leftrightarrow j_{si}q^x\equiv j_{si}\pmod m\Rightarrow q^x\equiv 1\pmod{l_s},\ \text{где } l_s=\frac{m}{\text{НОД}(j_{si},m)}.$$

Тогда $x=\delta_s$. Таким образом, для каждого s ровно $\varphi(l_s)$ элементов распределяются в классы по δ_s элементов. Всего получаем $1+\sum\limits_{s=2}^{\tau(m)}\frac{1}{\delta_s}\varphi(l_s)=1+\mathcal{M}$ классов.

Далее отметим, что

$$b^{j_{si}q^x}=b^{-j_{si}}\Leftrightarrow j_{si}q^x\equiv -j_{si}\pmod m,\ \text{тогда}$$
$$q^x\equiv -1\pmod{l_s},\ \text{где } l_s=\frac{m}{\text{НОД}(j_{si},m)}.$$

Так как при четном m есть делитель $l_2=2$, то $\delta_2=1$ и $q\equiv -1\equiv 1\pmod{l_2}$. Тогда $b^{-\frac{m}{2}}\in(b^{\frac{m}{2}})^{G_{mn}}$. Далее $l_s\neq 2$.

При нечетном n число δ_s так же нечетно и сравнение решений не имеет. Тогда $b^{-j_{si}}\notin(b^{j_{si}})^{G_{mn}}$, для всех $s=2,\dots,\tau(m)$, $i=1,\dots,\varphi(l_s)$. Таких классов $\mathcal{M}-1+\rho(m)$.

При четном n если δ_s четно и $q^{\delta_s/2}\equiv -1\pmod{l_s}$, то $x=\delta_s/2$. Тогда $b^{-j_{si}}\in(b^{j_{si}})^{G_{mn}}$. Таких классов $\mathcal{R}=\sum\frac{1}{\delta_s}\varphi(l_s)$ (сумма по всем s таким, что $q^{\delta_s/2}\equiv -1\pmod{l_s}$). Если же δ_s нечетно или $q^{\delta_s/2}\not\equiv -1\pmod{l_s}$, то сравнение решений не имеет и $b^{-j_{si}}\notin(b^{j_{si}})^{G_{mn}}$. Таких классов $\mathcal{M}-1+\rho(m)-\mathcal{R}$.

② Рассмотрим классы сопряженных элементов вида

$$(a^rb^i)^{G_{mn}}=\{a^rb^i,a^rb^{1-q^r+i},a^rb^{2(1-q^r)+i},\dots\},$$

где $r\in\{1,\dots,n-1\}$, $i\in\{0,\dots,m-1\}$.

Здесь выполняется

$$b^{(1-q^r)x+i}=b^i\Leftrightarrow(1-q^r)x\equiv 0\pmod m.$$

По лемме 2 для каждого r такого, что $\text{НОД}(r,n)=\frac{n}{k_t}\in\{\delta_s\mid s=2,\dots,\tau(m)\}$ получаем $\text{НОД}(1-q^r,m)=\theta_t$. Значит $x=\frac{m}{\theta_t}$. То есть m элементов распределяются на θ_t классов по $\frac{m}{\theta_t}$ элементов. Всего получаем $\sum_{\frac{n}{k_t}\in\{\delta_s\}}\theta_t\varphi(k_t)$ классов.

Для остальных r таких, что НОД$(r,n)=\frac{n}{k_t}\notin\{\delta_s\mid s=2,\dots,\tau(m)\}$ в классе $(a^r)^{G_{mn}}$ содержится ровно m элементов. Таких классов $\sum_{\frac{n}{k_t}\notin\{\delta_s\}}\varphi(k_t)$.

Таким образом, для $r=1,\dots,n-1$ получаем

$$\sum_{\frac{n}{k_t}\in\{\delta_s\}}\theta_t\varphi(k_t)+\sum_{\frac{n}{k_t}\notin\{\delta_s\}}\varphi(k_t)=\sum_{t=2}^{\tau(n)}\theta_t\varphi(k_t)=\mathcal{N}\text{ классов.}$$

Далее отметим, что $a^{-r}b^{-iq^r}=(a^rb^i)^{-1}$ и

$$a^rb^{x(1-q^r)+i}=a^{-r}b^{-iq^r}\Leftrightarrow a^{2r}b^{x(1-q^r)+i}=b^{-iq^r}\Leftrightarrow\begin{cases}a^{2r}=1,\\ b^{x(1-q^r)+i}=b^{-iq^r}.\end{cases}$$

Здесь при $r\neq n/2$ решений нет. Тогда $(a^rb^i)^{-1}\notin(a^rb^i)^{G_{mn}}$ для всех $r\neq n/2$. При нечетном n это все $\mathcal{N}$ классов, при четном n таких классов $\mathcal{N}-\theta_2$.

Пусть n четно и $r=n/2$, тогда $a^{2r}=1$. В классе $(a^{n/2})^{G_{mn}}$ выполняется

$$\left(a^{n/2}b^{x(1-q^{n/2})}\right)^{-1}=a^{n/2}b^{-x(1-q^{n/2})q^{n/2}}=a^{n/2}b^{x(1-q^{n/2})}.$$

Рассмотрим классы $(a^{n/2}b^i)^{G_{mn}}$, где $a^{n/2}b^i\notin(a^{n/2})^{G_{mn}}$. Таких классов θ_2-1 и $q^{n/2}\equiv1\pmod{\theta_2}$. Показатели степеней b^i в одном классе сравнимы по модулю θ_2. Выберем среди них наименьший положительный k по модулю m, тогда $k<\theta_2$. Найдем решение сравнения

$$-kq^{n/2}\equiv x(1-q^{n/2})+k\pmod m,\ x<\frac{m}{\theta_2}.$$

Поскольку по лемме 2 следует, что $q^{n/2}\equiv1+\theta_2z\pmod m$, где НОК$(m,z)=1$, то получим

$$-k(1+\theta_2z)\equiv x(-\theta_2z)+k\pmod m\Leftrightarrow\theta_2zx\equiv\theta_2zk+2k\pmod m.$$

Решение существует если θ_2 делит $2k$. Тогда $\theta_2=2k$ и

$$zx\equiv z\frac{\theta_2}{2}+1\pmod m\Leftrightarrow x\equiv\frac{\theta_2}{2}+z'\pmod m,$$

где $zz'\equiv1\pmod m$.

Таким образом, для четного θ_2 только если $i\equiv\frac{\theta_2}{2}\pmod m$, то $(a^{n/2}b^i)^{-1}\in(a^{n/2}b^i)^{G_{mn}}$. В остальных случаях $(a^{n/2}b^i)^{-1}\notin(a^{n/2}b^i)^{G_{mn}}$. Таких классов

$$\theta_2-2+\rho(\theta_2)=\begin{cases}\theta_2-2,&\text{если }\theta_2\text{ — четно,}\\ \theta_2-1,&\text{если }\theta_2\text{ — нечетно.}\end{cases}$$

Итак из пунктов ① и ② получим

$$n_R=\begin{cases}1+1-\rho(m)+\frac12\left(\mathcal{M}-1+\rho(m)\right)+\frac12\mathcal{N}=1+\frac12\left(\mathcal{M}+1-\rho(m)+\mathcal{N}\right),\\ \hfill\text{если }n\text{ — нечетно,}\\ 1+1-\rho(m)+\mathcal{R}+\frac12(\mathcal{M}-1+\rho(m)-\mathcal{R})+\frac12(\mathcal{N}-\theta_2)+1+1-\rho(\theta_2)\\ \quad+\dfrac{\theta_2-2+\rho(\theta_2)}{2}=2+\frac12(\mathcal{M}+1-\rho(m)+\mathcal{R}+\mathcal{N}-\rho(\theta_2)),\\ \hfill\text{если }n\text{ — четно.}\end{cases}$$

Лемма доказана. □

Теорема 3. *Группа центральных единиц целочисленного группового кольца метациклической группы Фробениуса $F_{mn} = \langle b\rangle_m \leftthreetimes \langle a\rangle_n$, имеет вид*

$$U(Z(\mathbb{Z}F_{mn})) = \langle -1\rangle \times V,$$

где V есть прямое произведение циклических групп бесконечного порядка и ее ранг равен

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(U(Z(\mathbb{Z}F_{mn}))) &= \left(1 + \left[\frac{n}{2}\right] - \frac{n}{2}\right)\frac{m-1}{n} + \left[\frac{n}{2}\right] + 2 - \tau(m) - \tau(n)\\ &= \begin{cases} \dfrac{m-1}{n} + \dfrac{n}{2} + 2 - \tau(m) - \tau(n), \text{ для четного } n,\\ \dfrac{m-1}{2n} + \dfrac{n-1}{2} + 2 - \tau(m) - \tau(n), \text{ для нечетного } n.\end{cases}\end{aligned}$$

Доказательство. По теореме 1 группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы F_{mn} имеет вид

$$U(Z(\mathbb{Z}F_{mn})) = \langle -1\rangle \times V,$$

где V — прямое произведение бесконечных циклических групп. По формуле Ферраза [4] ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы F равен $n_R - n_Q$.

Для метациклической группы Фробениуса $F_{mn} = \langle b\rangle_m \leftthreetimes \langle a\rangle_n$ из теоремы 2 следует, что m — нечетное число; все δ_s равны n при $s = 2, \dots, \tau(m)$; все θ_t равны 1 при $t = 2, \dots, \tau(n)$ и $q^{n/2} \equiv -1 \pmod m$. Тогда $\rho(\theta_2) = 1$, $\rho(m) = 1$,

$$\mathcal{N} = \sum_{t=2}^{\tau(n)} \theta_t \varphi(k_t) = n - 1, \quad \mathcal{M} = \mathcal{R} = \sum_{s=2}^{\tau(m)} \frac{1}{\delta_s}\varphi(l_s) = \frac{m-1}{n}.$$

По лемме 3 число $\mathbb{R}$-классов равно

$$n_R = \begin{cases} 2 + \frac{1}{2}(\mathcal{M} + \mathcal{R} + \mathcal{N} - \rho(\theta_2) + 1 - \rho(m)) = 1 + \dfrac{m-1}{n} + \dfrac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четно},\\ 1 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{M} + \mathcal{N} + 1 - \rho(m)\right) = 1 + \dfrac{m-1}{2n} + \dfrac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Число $\mathbb{Q}$-классов по теореме Бермана-Витта [9, § 42] равно числу простых компонент алгебры $\mathbb{Q}F_{mn}$ и числу несопряженных циклических подгрупп группы F_{mn}, тогда $n_Q = \tau(n) + \tau(m) - 1$.

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned}&\mathrm{r}(U(Z(\mathbb{Z}F_{mn}))) = n_R - n_Q\\ &\qquad = \begin{cases} 2 + \dfrac{m-1}{n} + \dfrac{n}{2} - \tau(n) - \tau(m), & \text{для четного } n,\\ 2 + \dfrac{m-1}{2n} + \dfrac{n-1}{2} - \tau(n) - \tau(m), & \text{для нечетного } n.\end{cases}\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца метациклической группы Фробениуса $F = \langle b\rangle_m \leftthreetimes \langle a\rangle_n$ с простым m равен*

$$\mathrm{r}(U(Z(\mathbb{Z}F))) = \left(1 + \left[\frac{n}{2}\right] - \frac{n}{2}\right)\frac{m-1}{n} + \left[\frac{n}{2}\right] - \tau(n)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{m-1}{n} + \dfrac{n}{2} - \tau(n), \text{ для четного } n, \\ \dfrac{m-1}{2n} + \dfrac{n-1}{2} - \tau(n), \text{ для нечетного } n. \end{cases}$$

Доказательство. В случае простого m имеем $\tau(m) = 2$ и далее все получаем по теореме 3. □

Следствие 2. *Группа центральных единиц целочисленного группового кольца метациклической группы Фробениуса $F = \langle b\rangle_m \leftthreetimes \langle a\rangle_n$ с простым m тривиальна только в случаях: $m = 3, n = 2$; $m = 5, n = 4$; $m = 7, n = 6$ и $m = 7, n = 3$.*

Доказательство. Выясним, когда $r = \left(1 + \left[\frac{n}{2}\right] - \frac{n}{2}\right) \frac{m-1}{n} + \left[\frac{n}{2}\right] - \tau(n) = 0$.

Пусть $n = 2^k l$, где $k \geqslant 1$ и НОД$(l, 2) = 1$, тогда

$$r = \frac{m-1}{n} + \frac{n}{2} - \tau(n) = \frac{m-1}{2^k l} + 2^k \frac{l}{2} - (k+1)\tau(l).$$

Так как $\tau(l) < \frac{l}{2}$, при $l \neq 1; 3$ и $k + 1 \leqslant 2^k$, то $r > 0$ при $l \neq 1; 3$.

Если $l = 1$, то $r = 2^{k-1} + \frac{m-1}{2^k} - k - 1 > 0$ при $k \geqslant 3$.
В случае $l = 1,\ k = 1$ получим $r = 1 + \frac{m-1}{2} - 2 = \frac{m-3}{2} > 0$ при $m > 3$ и $r = 0$ при $m = 3, n = 2$.
В случае $l = 1,\ k = 2$ получим $r = 2 + \frac{m-1}{4} - 3 = \frac{m-5}{4} > 0$ при $m > 5$ и $r = 0$ при $m = 5, n = 4$.

Если $l = 3$, то $r = 2^{k-1}3 + \frac{m-1}{2^k 3} - 2(k+1) > 0$ при $k \geqslant 3$.
В случае $l = 3, k = 1$ получим $r = 3 + \frac{m-1}{6} - 4 = \frac{m-7}{6} > 0$ при $m > 7$ и $r = 0$ при $m = 7, n = 6$.
В случае $l = 3, k = 2$ получим $r = 6 + \frac{m-1}{12} - 6 = \frac{m-1}{12} > 0$.

Пусть $n = 2k + 1$, тогда

$$r = \frac{m-1}{2n} + \frac{n-1}{2} - \tau(n) = \frac{m-1}{2(2k+1)} + k - \tau(2k+1)$$

При $2k + 1 \neq 1; 3$ получим $r > 0$ (так как $\tau(2k+1) < \frac{2k-1}{2} < k$).

Если $n = 3$, то $r = 1 + \frac{m-1}{6} - 2 = \frac{m-7}{6} > 0$ при $m > 7$ и $r = 0$ при $m = 7, n = 3$.
Следствие доказано. □

Следствие 3. *Ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца метациклической группы Фробениуса $F = \langle b\rangle_m \leftthreetimes \langle a\rangle_n$ с простым m равен 1 только в случаях: $m = 5, n = 2$; $m = 11, n = 5$; $m = 13, n = 3$; $m = 13, n = 6$ и $m = 13, n = 12$.*

Доказательство. Выясним, когда $r = \left(1 + \left[\frac{n}{2}\right] - \frac{n}{2}\right) \frac{m-1}{n} + \left[\frac{n}{2}\right] - \tau(n) = 1$.

Пусть $n = 2^k l$, где $k \geqslant 1$ и НОД$(l, 2) = 1$, тогда

$$r = \frac{m-1}{n} + \frac{n}{2} - \tau(n) = \frac{m-1}{2^k l} + 2^k \frac{l}{2} - (k+1)\tau(l).$$

Так как $\frac{l}{2} > \tau(l)$, при $l > 3$; $\frac{m-1}{2^k l} \geqslant 1$ и $2^k \geqslant k + 1$, то $r > 1$ при $l \neq 1; 3$.

Если $l = 1$, то $r = 2^{k-1} + \frac{m-1}{2^k} - k - 1 > 1$ при $k \geqslant 3$.
В случае $l = 1, k = 1$ получим $r = 1 + \frac{m-1}{2} - 2 = \frac{m-3}{2} > 1$ при $m > 5$ и $r = 1$ при $m = 5, n = 2$.
В случае $l = 1, k = 2$ получим $r = 2 + \frac{m-1}{4} - 3 = \frac{m-5}{4} > 1$ при $m > 9$ и $r = 1$ при $m = 9$ — не является простым числом.

Если $l=3$, то $r = 2^{k-1}3 + \frac{m-1}{2^k 3} - 2(k+1) > 1$ при $k \geqslant 3$.
В случае $l=3, k=1$ получим $r = 3 + \frac{m-1}{6} - 4 = \frac{m-7}{6} > 1$ при $m > 13$ и $r = 1$ при $m = 13, n = 6$.
В случае $l=3, k=2$ получим $r = 6 + \frac{m-1}{12} - 6 = \frac{m-1}{12} > 1$ при $m > 13$ и $r = 1$ при $m = 13, n = 12$.

Пусть $n = 2k+1$, тогда

$$r = \frac{m-1}{2n} + \frac{n-1}{2} - \tau(n).$$

Так как $\frac{l-1}{2} > \tau(l)$, при $l > 5$ и $\frac{m-1}{2n} \geqslant 1$, то получаем $r > 1$ при $n > 5$.

Если $n = 3$, то $r = 1 + \frac{m-1}{6} - 2 = \frac{m-7}{6} > 1$ при $m > 13$ и $r = 1$ при $m = 13, n = 3$.
Если $n = 5$, то $r = 2 + \frac{m-1}{10} - 2 = \frac{m-1}{10} > 1$ при $m > 11$ и $r = 1$ при $m = 11, n = 5$.
Следствие доказано. □

Список литературы

[1] R. Ž. Aleev, *Higman's central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers*, Intern. J. of Algebra and Comp., **4**: 3 (1994), 309–358.

[2] Р.Ж. Алеев, *Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп: дис. ... доктора физ-мат. наук*, Чел. гос. ун-т., Челябинск, 2000.

[3] Р.Ж. Алеев, О.В. Митина, *Теорема разложения и ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец групп $PGL_2(q)$, где q нечетно*, Сиб. электронные мат. известия, **5** (2008), 652–672.

[4] R.A. Ferraz, *Simple component and central units in group rings*, Jornal of Algebra, **279**: 1 (2004), 191–203.

[5] E. Jespers, M.M. Parmenter, S.K. Sehgal, *Central units of integral group rings of nilpotent groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**: 4 (1996), 1007–1012.

[6] J. Ritter, S.K. Sehgal, *Trivial units in RG*, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, **105A**: 1 (2005), 25–39.

[7] К. Айерлэнд, М. Роузен, *Классическое введение в современную теорию чисел*, Мир, Москва, 1987.

[8] В.А. Белоногов, А.Н. Фомин, *Матричные представления в теории конечных групп*, Наука, Москва, 1976.

[9] Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, Наука, Москва, 1969.

[10] О.В. Митина, *Уранения Пелля и центральные единицы целочисленных групповых колец групп $PSL_2(q)$, где q нечетно*, Труды ИММ УрО РАН, **14**: 4 (2008), 135–142.

Екатерина Олеговна Шумакова
ЧГПУ
пр. Ленина, 69
Челябинск, Россия
E-mail address: shumkaterina@rambler.ru