S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 685–690 (2008) УДК 519.17
MSC 05C

О ПЛАНАРНЫХ ГРАФАХ БЕЗ ПРЕДПИСАННОЙ 3-РАСКРАСКИ

В. А. ТАШКИНОВ

Abstract. We construct a planar graph without 4- and 5-cycles and without intersecting triangles that has 366 vertices and no list 3-coloring from a set of 4 colors.

Keywords: planar graph, list coloring, 3-choosability.

1. Введение

Пусть G — обыкновенный граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Предположим, что каждой вершине $v \in V(G)$ поставлено в соответствие множество $L(v)$ натуральных чисел, называемое предписанием для данной вершины. Предписанной раскраской графа G называется сопоставление каждой вершине $v \in V(G)$ цвета $c_v \in L(v)$ так, чтобы $c_x \neq c_y$ для любой пары смежных вершин $x, y \in V(G)$. Если при этом $| \cup_{v \in V(G)} L(v)| = k$, будем называть такую раскраску предписанной раскраской в k цветов. Наконец, если при любом выборе предписаний для вершин графа G, удовлетворяющем условию $|L(v)| \geq \lambda$ для любой вершины $v \in V(G)$, граф G имеет предписанную раскраску, то сам граф G называется предписанно λ-раскрашиваемым, а его предписанные раскраски называются предписанными λ-раскрасками.

Tashkinov, V. A., On planar graphs without list 3-coloring.

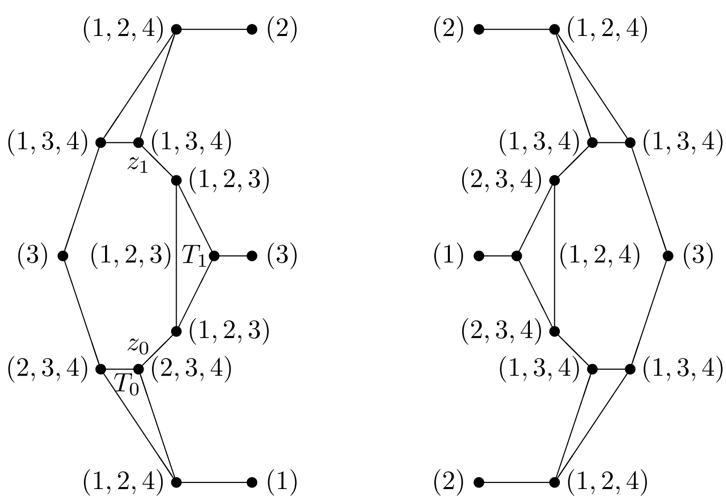
Работа поддержана РФФИ (гранты 06-01-00694 и 08-01-00673).

Поступила 14 августа 2008 г., опубликована 16 декабря 2008 г.

После опубликования Грёцшем [5] теоремы о 3-раскрашиваемости (т.е. о раскрашиваемости в 3 цвета) плоских графов без треугольников исследования в этой области сосредоточились на выяснении условий, при которых 3-раскрашиваемость плоских графов гарантируется даже при наличии треугольников. В настоящее время эти исследования сосредоточены преимущественно вокруг двух гипотез: во-первых, в 1976 году Стейнберг предположил, что всякий планарный граф без циклов длины 4 и 5 является 3-раскрашиваемым (см. [6]). Во-вторых, в 2003 году Бородин и Распо [1] предположили, что всякий планарный граф без циклов длины 5, не имеющий пересекающихся треугольников, также является 3-раскрашиваемым. Так в [2, 13] независимо было доказано, что всякий планарный граф без циклов длины 5, в котором треугольники удалены друг от друга на расстояние не менее 3, является 3-раскрашиваемым.

После введения В. Г. Визингом [3] понятия предписанной раскраски обыкновенных графов начались исследования предписанной 3-раскрашиваемости плоских графов. В частности, в [9, 4, 11] были построены примеры плоских графов без треугольников, не имеющих предписанной 3-раскраски. Последний из известных нам примеров [11] содержит 97 вершин и не имеет предписанной 3-раскраски в 5 цветов. В связи с этим в [4] была сформулирована проблема: всякий ли плоский граф без треугольников является предписанно 3-раскрашиваемым в 4 цвета?

Параллельно, сначала в [10, 7] были построены примеры плоских графов без циклов длины 4 и 5, не имеющих предписанной 3-раскраски, а затем в [8, 12] были построены примеры плоских графов с непересекающимися треугольниками и без циклов длины 4 и 5, также не имеющих предписанной 3-раскраски. Последний из них [12] содержит 380 вершин и не имеет предписанной 3-раскраски в 5 цветов. В данной работе строится пример плоского графа на 366 вершинах, который не содержит циклов длины 4 и 5, не имеет пересекающихся треугольников и не является предписанно 3-раскрашиваемым даже в 4 цвета.



а) Граф H'. б) Граф H''.

Рис. 1.

2. Основной результат

Пусть $H'_{\alpha,\beta}$ и $H''_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \{3,4\}$ — графы, изображенные на рис. 2 и рис. 3 соответственно. Легко видеть, что каждый из них не содержит циклов длины 4 и 5 и не имеет пересекающихся треугольников. Кроме того, вершины с одноэлементными предписаниями, которые мы в дальнейшем будем называть полюсами, в каждом из них удалены друг от друга на расстояние 3.

Лемма 1. *Графы H' и H'', изображенные на рис.* 1*, не имеют предписанной раскраски.*

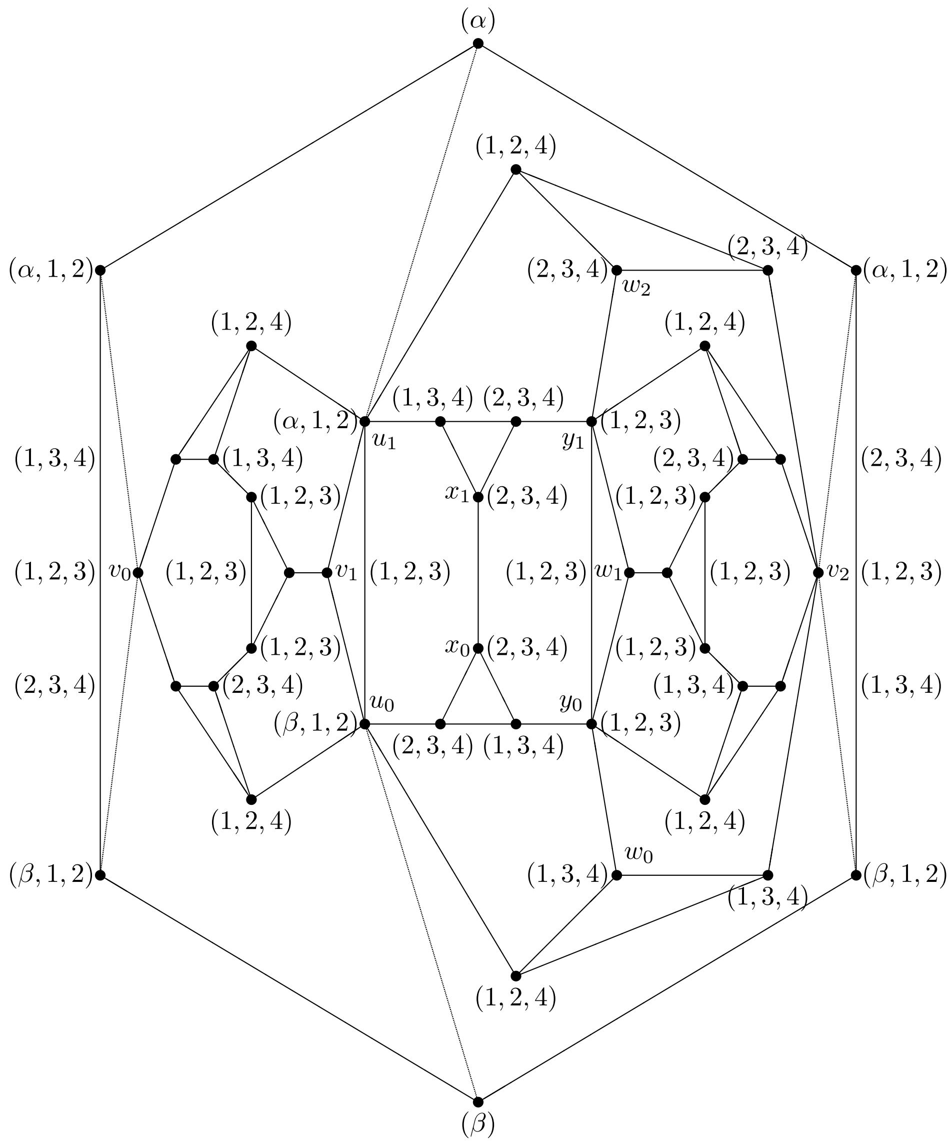


Рис. 2. Граф $H'_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \{3,4\}$.

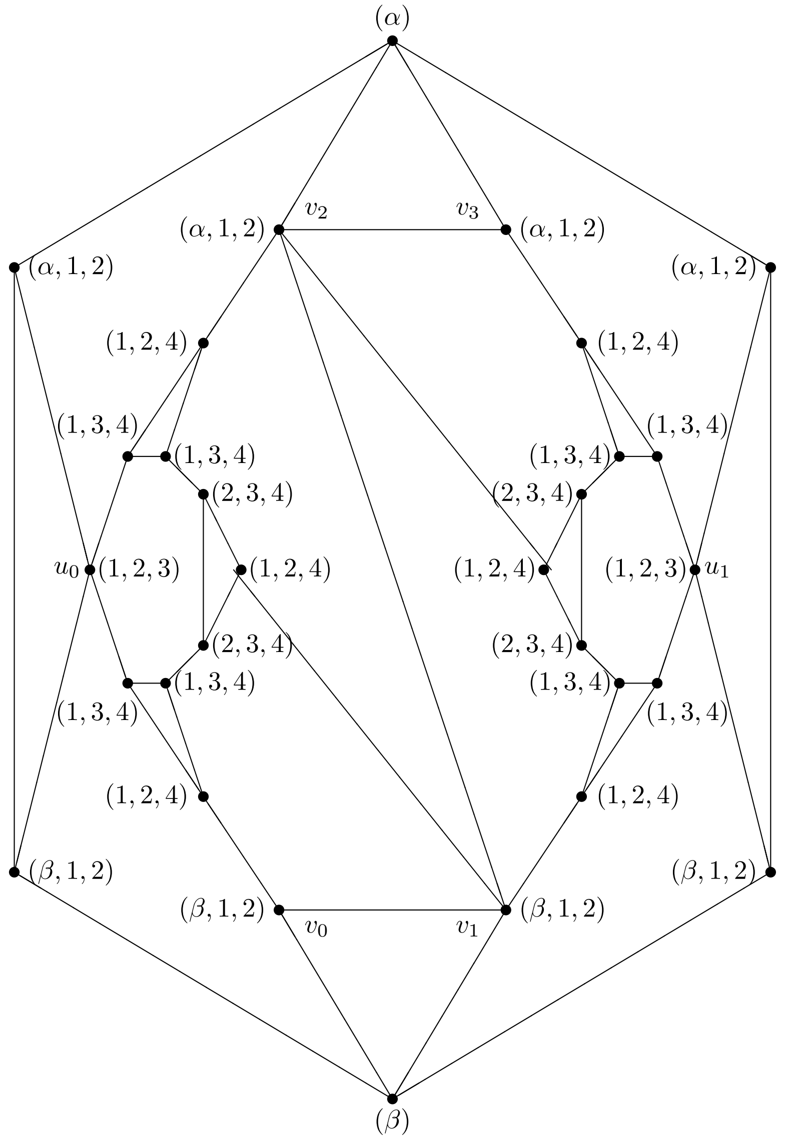


Рис. 3. Graph $H''_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \{3, 4\}$.

Доказательство. Рассмотрим, например, граф H'. Для графа H'' рассуждения совершенно аналогичны. Предположим, что предписанная раскраска есть. Каждый из четырех полюсов может быть раскрашен единственным образом. Но тогда для каждой из двух вершин треугольника T_0, смежных с полюсами, возможной остается одна и та же пара цветов, – 2 и 4, ни одним из которых не может быть раскрашена третья вершина z_0 треугольника T_0.

Таким образом, вершина z_0 может быть раскрашена только цветом 3. Аналогично, вершина z_1 тоже может быть раскрашена только цветом 3. Но тогда для всех трех вершин треугольника T_1 возможными остаются только два цвета: 1 и 2, т. е. этот треугольник правильно раскрашен быть не может. $\square$

Лемма 2. *Графы $H'_{\alpha,\beta}$ и $H''_{\alpha,\beta}$, изображенные на рисунках 2 и 3 соответственно, не имеют предписанной раскраски.*

Доказательство. Рассмотрим сначала граф $H'_{\alpha,\beta}$. Предположим, что он может быть предписанно раскрашен. Т. к. полюса могут быть раскрашены единственным образом, то каждая из вершин u_0 и u_1 должна быть раскрашена одним из цветов 1 или 2. Поэтому вершина v_1 должна быть раскрашена цветом 3. Аналогично, цветом 3 должны быть окрашены вершины v_0 и v_2.

Заметим теперь, что вершина u_1 не может быть окрашена цветом 2, т. к. в противном случае вершина u_0 должна была бы быть окрашена цветом 1. В этом случае по лемме 1 не может быть правильно раскрашен четырехполюсник с полюсами v_0, u_1, v_1 и u_0. (Ср. с рис. 1а).)

Таким образом, вершины u_1 и u_0 должны быть окрашены цветами 1 и 2 соответственно. Но тогда обе вершины w_0 и w_2 должны быть окрашены цветом 3. Это означает, что вершина w_1 тоже должна быть окрашена цветом 3, а каждая из вершин y_0 и y_1 должна быть окрашена одним из цветов 1 или 2. Если вершина y_1 окрашена цветом 1, то вершина y_0 окрашена цветом 2. В этом случае по лемме 1 не может быть правильно раскрашен четырехполюсник с полюсами v_2, y_0, w_1 и y_1. Если же вершина y_1 окрашена цветом 2, то вершина y_0 должна быть окрашена цветом 1. В этом случае смежные вершины x_0 и x_1 должны быть обе окрашены одним и тем же цветом 2, т. е. и в этом случае правильная раскраска невозможна.

Рассмотрим теперь граф $H''_{\alpha,\beta}$. Если предположить возможность существования предписанной раскраски этого графа, то вершины w_0 и w_1 должны получить цвет 3, а вершины v_0, v_1, v_2 и v_3 должны быть поочередно окрашены цветами 1 и 2.

Если вершина v_3 окрашена цветом 2, то вершины v_2 и v_1 должны быть окрашены цветами 1 и 2 соответственно. В этом случае по лемме 1 не может быть правильно окрашен четырехполюсник с полюсами w_1, v_1, v_2 и v_3. (Ср. с рис. 1б).)

Если же цветом 2 окрашена вершина v_2, то цветами 1 и 2 соответственно должны быть окрашены вершины v_1 и v_0. В этом случае по лемме 1 не может быть правильно окрашен четырехполюсник с полюсами w_0, v_2, v_1 и v_0. □

Итак, при $\alpha, \beta \in \{3, 4\}$ мы получаем по 4 экземпляра различных графов $H'_{\alpha,\beta}$ и $H''_{\alpha,\beta}$. Дважды применяя циклическую перестановку цветов 2, 3 и 4 в предписаниях для вершин графов $H'_{\alpha,\beta}$ и $H''_{\alpha,\beta}$, мы получим еще по 8 экземпляров графов $H'_{\alpha,\beta}$ и $H''_{\alpha,\beta}$. Рассматривая их вместе с исходными, заметим, что графы вида $H'_{i,i}$ и $H''_{i,i}$, $i = 2, 3, 4$, встречаются по два раза. Удалив произвольно "лишние"дубликаты графов $H'_{i,i}$ и $H''_{i,i}$, $i = 2, 3, 4$, получим 9 пар графов $H'_{\alpha,\beta}$ и $H''_{\alpha,\beta}$ для всевозможных значений $\alpha, \beta \in \{2, 3, 4\}$.

В наборе $H'_{2,2}, H'_{2,3}, \ldots, H'_{4,4}$ заменим произвольно выбранный граф $H'_{i,j}$, $i, j \in \{2, 3, 4\}$, графом $H''_{i,j}$. Пусть, например, $i = j = 2$. Отождествим все "северные"полюса всех графов из нашего набора $H''_{2,2}, H'_{2,3}, \ldots, H'_{4,4}$ в вершину A, а все "южные— в вершину B. Сопоставим вершинам A и B по предписанию $(2, 3, 4)$. Получившийся в результате этой процедуры граф на 366 вершинах обозначим через G. Ясно, что граф G планарен, не содержит циклов длины 4 и 5 (поскольку расстояние между полюсами исходных блоков равнялось 3), не имеет пересекающихся треугольников (поскольку только в $H''_{2,2}$ — первом из исходных блоков имелись треугольники, содержащие полюса), и что для составления предписаний для всех вершин этого графа было использовано всего 4 цвета. Наконец, граф G не имеет предписанной раскраски, поскольку как бы ни были выбраны из соответствующих предписаний цвета вершин A и B найдется блок, который не может быть предписанно раскрашен.

Список литературы

[1] O. V. Borodin and A. Raspaud, *A Sufficient Condition for Planar Graphs to be 3-Colorable*, J. of Combin. Theory B **88** (2003), 17–27.

[2] O. V. Borodin and A. N. Glebov, *Достаточное условие* 3*-раскрашиваемости плоских графов*, Дискрет. анализ и исслед. операций, **11**: 1 (2004), 13–29.

[3] В. Г. Визинг, *Раскраска вершин графа в предписанные цвета*, Методы дискретного анализа в теории кодов и схем, **29** (1976), 3–10.

[4] A. N. Glebov, A. V. Kostochka, V. A. Tashkinov, *Smaller planar triangle-free graphs that are not* 3*-list-colorable*, Discrete Math., **290** (2005), 269–274.

[5] B. Grötzsch, *Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel*, Wiss. Zeitschrift der Universität Halle, Math.-Natur. Reihe, **8** (1958), 109–119.

[6] T. R. Jensen and B. Toft, Graph coloring problems, Wiley Interscience (1995).

[7] M. Montassier, *A note on the not* 3*-choosability of some families of planar graphs*, Information Processing Letters, **99** (2006), 68–71.

[8] M. Montassier, A. Raspaud, W. Wang, *Bordeaux* 3*-color conjecture and* 3*-choosability*, Discrete Math., **306** (2006), 573–579.

[9] M. Voigt, *A not* 3*-choosable planar graph without* 3*-cycles*, Discrete Math., **146** (1995), 325–328.

[10] M. Voigt, *List coloring of planar graphs*, Discrete Math., **120** (1993), 215–219.

[11] M. Voigt, Частное сообщение.

[12] D.-Q. Wang, Y.-P. Wen, K.-L. Wang, *A smaller planar graph without* 4*-,* 5*-cycles and intersecting triangles that is not* 3*-choosable*, Information Processing Letters, **108** (2008), 87–89.

[13] B.Xu. *A 3-color theorem on plane graph without* 5*-circuits*, Acta Mathematica Sinica, **23** (2007), 1059–1062.

Владимир Александрович Ташкинов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: valet@math.nsc.ru