S©MR ISSN

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 673–684 (2008) УДК 512.531.2
MSC 20M07

ПСЕВДОМНОГООБРАЗИЯ КОНЕЧНЫХ ПОЛУГРУПП, ОБЛАДАЮЩИЕ ПОЛНЫМ РАДИКАЛОМ

Т. Ю. ФИНК

Abstract. Pseudovarieties of finite semigroups having the complete radical are described.

Keywords: finite semigroup, complete radical, pseudovariety.

Л.М.Мартыновым в [1, 2] введены аналоги ряда фундаментальных понятий теории абелевых групп, в том числе полноты (делимости) и редуцированности для произвольных алгебр. Позднее в [3] была сформулирована основная проблематика, касающаяся изучения соответствующих аналогов понятий теории абелевых групп. В русле этой проблематики понятия полноты и редуцированности изучаются нами для конечных полугрупп [4, 5, 6, 7].

Очевидно, что абелева группа является полной в стандартном смысле тогда и только тогда, когда она не имеет гомоморфизмов на неединичные группы из атомов решетки многообразий абелевых групп. Поскольку решетка подмногообразий многообразия всех полугрупп является атомной, ясно, как определить понятие полной полугруппы в этом многообразии, а, следовательно, и понятие редуцированной полугруппы. А именно, полугруппа называется *полной*, если она не имеет гомоморфизмов на нетривиальные полугруппы, принадлежащие атомам решетки многообразий полугрупп. Полугруппа называется *редуцированной*, если она не имеет неодноэлементных полных подполугрупп. Следуя [8], будем говорить, что полугруппа S *обладает полным радикалом*, если на ней имеется некоторая конгруэнция ρ, классы которой, являющиеся подполугруппами, суть в точности максимальные полные подполугруппы данной полугруппы, и фактор-полугруппа S/ρ редуцирована. Основной целью настоящей работы является характеризация

Fink, T.Yu., Pseudovarieties of finite semigroups, having the complete radical.

Поступила 16 июня 2006 г., опубликована 8 декабря 2008 г.

псевдомногообразий конечных полугрупп, все полугруппы которых обладают полным радикалом.

Прежде чем сформулировать основной результат, приведем необходимые определения и обозначения. Условимся в дальнейшем под полугруппой понимать конечную полугруппу, если нет соответствующих оговорок. Напомним, что псевдомногообразием полугрупп называется класс полугрупп, замкнутый относительно взятия подполугрупп, гомоморфных образов и конечных прямых произведений. Среди псевдомногообразий особое место занимают эквациональные псевдомногообразия, то есть состоящие из всех конечных полугрупп некоторого многообразия полугрупп; понятно, что такие псевдомногообразия определяются (в классе всех конечных полугрупп) теми же системами тождеств, что и соответствующие многообразия. Условимся для системы полугрупповых тождеств σ через $\mathrm{psvar}\,\sigma$ обозначать эквациональное псевдомногообразие всех полугрупп, удовлетворяющих системе σ. Хорошо известно, что любое псевдомногообразие полугрупп содержит минимальное нетривиальное псевдомногообразие, в частности, решетка всех псевдомногообразий конечных полугрупп является атомной. Атомы этой решетки суть эквациональные псевдомногообразия, состоящие из всех конечных полугрупп соответствующих атомов решетки всех многообразий полугрупп. Напомним их список:

$\mathcal{A}_p = \mathrm{psvar}\{xy = yx,\ x^py = y\}$ – псевдомногообразие абелевых групп простой экспоненты p;

$\mathcal{L}_0 = \mathrm{psvar}\{xy = x\}$ – псевдомногообразие полугрупп левых нулей;

$\mathcal{R}_0 = \mathrm{psvar}\{xy = y\}$ – псевдомногообразие полугрупп правых нулей;

$\mathcal{Z} = \mathrm{psvar}\{xy = zu\}$ – псевдомногообразие полугрупп с нулевым умножением;

$\mathcal{S} = \mathrm{psvar}\{xy = yx,\ x^2 = x\}$ – псевдомногообразие полурешеток.

Нетрудно понять (см. также [4]), что конечная группа является полной тогда и только тогда, когда она совпадает со своим коммутантом, и является редуцированной, если и только если она разрешима. В каждой конечной группе G существует наибольшая полная подгруппа, которая нормальна в G.

Напомним, что полугруппа S называется *архимедовой*, если для любых $a,\ b \in S$ существует такое n, что b^n принадлежит главному двустороннему идеалу $J(a)$, порожденному элементом a. Хорошо известно описание конечных архимедовых полугрупп: любая конечная архимедова полугруппа является идеальным нильрасширением вполне простой полугруппы [9, с. 104].

В наших исследованиях особую роль играют полугруппы A_2 и B_2. Они могут быть заданы копредставлениями в классе всех полугрупп с нулем (см., например, [9, с. 70]):

$$A_2 = \langle a, b | aba = a, bab = b, a^2 = a, b^2 = 0\rangle,$$

$$B_2 = \langle a, b | aba = a, bab = b, a^2 = 0, b^2 = 0\rangle.$$

Введем в рассмотрение еще одну серию полугрупп. Пусть G – группа, H – ее собственная подгруппа и l – символ, не принадлежащий группе G. Обозначим через $G_l(H)$ множество $G \bigcup \{(gH,\ l) | g \in G\}$ и определим на нем умножение $\circ$, сохраняя умножение на G и полагая $x \circ (gH,\ l) = (xgH,\ l)$ и $(gH,\ l) \circ u = = (gH,\ l)$ для всех $g,\ x \in G$ и $u \in G_l(H)$. Очевидно, что множество $G_l(H)$ с операцией $\circ$ становится полугруппой. Назовем ее l-полугруппой над группой G с подгруппой H. Нетрудно проверить, что полугруппа $G_l(H)$ является цепью полугруппы левых нулей и группы G. Через $G_r(H)$ обозначим r-полугруппу, антиизоморфную полугруппе $G_l(H)$. Заметим, что различные варианты этой конструкции встречались в роли "запрещенных объектов" ранее в исследованиях по теории многообразий полугрупп (см., например, [10]). Но мы затрудняемся указать, где именно она появилась впервые. В остальном мы будем придерживаться стандартной теоретико-полугрупповой терминологии и обозначений, которые можно найти в [9].

Теорема. *Следующие три условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{X}$ – псевдомногообразие конечных полугрупп, обладающее полным радикалом;

2) $\mathcal{X}$ – псевдомногообразие конечных полугрупп, являющихся полурешетками архимедовых полугрупп, удовлетворяющих условию: для любых полугруппы S из $\mathcal{X}$, ее полной подгруппы G и элементов a и b из G и c из S таких, что элементы ac, bc, ca и cb принадлежат множеству GrS, имеют место равенства $S^1ca = S^1cb$ и $acS^1 = bcS^1$;

3) $\mathcal{X}$ – псевдомногообразие конечных полугрупп, которому не принадлежат полугруппы A_2, B_2 и полугруппы $G_l(H)$, $G_r(H)$ для любой полной группы G из $\mathcal{X}$ и любой ее собственной подгруппы H.

Доказательству теоремы предпошлем три леммы.

Лемма 1. *Конечная полугруппа, являющаяся полурешеткой групп, обладает полным радикалом.*

Доказательство. Пусть $S = \bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha$ – конечная полугруппа, являющаяся полурешеткой групп, $C_\alpha = C(G_\alpha)$ – наибольшая полная подгруппа группы G_α и $\varphi_\alpha\colon G_\alpha \to G_\alpha/C_\alpha$ $(\alpha \in Y)$ – естественный гомоморфизм. На полугруппе S определим отношение σ, полагая $a\sigma b$, если найдется такое $\alpha \in Y$, что $a,\ b \in G_\alpha$ и $\varphi_\alpha(a) = \varphi_\alpha(b)$. В дальнейшем элементы группы G_α будем обозначать a_α, b_α, и т. д. Очевидно, что σ является эквивалентностью.

Докажем правую стабильность отношения σ. Пусть $a_\alpha \sigma b_\alpha$, $g_\beta \in G_\beta$ и $\alpha\beta = \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in Y)$. Так как полная подгруппа C_α является нормальным делителем группы G_α, элементы a_α и b_α принадлежат одному смежному классу по нормальной подгруппе C_α. Пусть a_α, $b_\alpha \in x_\alpha C_\alpha$. Тогда $a_\alpha = x_\alpha c_\alpha$, $b_\alpha = x_\alpha c'_\alpha$ и элементы c_α и c'_α принадлежат полной группе C_α. Отображение $\psi_{\alpha,\gamma}(s_\alpha) = s_\alpha e_\gamma$, где $s_\alpha \in G_\alpha$, а e_γ – единица группы G_γ, является гомоморфизмом группы G_α в G_γ [12, с. 171]. Так как гомоморфный образ полной группы является полной группой [3], элементы $c_\alpha e_\gamma$ и $c'_\alpha e_\gamma$ принадлежат подгруппе C_γ группы G_γ. Следовательно, $\varphi_\gamma(c_\alpha e_\gamma) = \varphi_\gamma(c'_\alpha e_\gamma)$. Поскольку $a_\alpha g_\beta = a_\alpha e_\gamma g_\beta e_\gamma = x_\alpha c_\alpha e_\gamma g_\beta e_\gamma = x_\alpha e_\gamma c_\alpha e_\gamma g_\beta e_\gamma$, аналогично, $b_\alpha g_\beta = x_\alpha e_\gamma c'_\alpha e_\gamma g_\beta e_\gamma$, получаем, что

$$\varphi_\gamma(a_\alpha g_\beta) = \varphi_\gamma(x_\alpha e_\gamma c_\alpha e_\gamma g_\beta e_\gamma) = \varphi_\gamma(x_\alpha e_\gamma)\varphi_\gamma(c_\alpha e_\gamma)\varphi_\gamma(g_\beta e_\gamma) =$$
$$= \varphi_\gamma(x_\alpha e_\gamma)\varphi_\gamma(c'_\alpha e_\gamma)\varphi_\gamma(g_\beta e_\gamma) = \varphi_\gamma(x_\alpha e_\gamma c'_\alpha e_\gamma g_\beta e_\gamma) = \varphi_\gamma(b_\alpha g_\beta).$$

Таким образом, $a_\alpha g_\beta \sigma b_\alpha g_\beta$.

Аналогично доказывается стабильность слева. Следовательно, отношение σ является конгруэнцией на полугруппе S, и классами этой конгруэнции, являющимися подполугруппами, являются полные группы. В полугруппе

S/σ полных подгрупп нет, следовательно, S/σ – редуцированная полугруппа. Таким образом, конечная полугруппа, являющаяся полурешеткой групп, обладает полным радикалом.

Лемма 2. *Пусть S – конечная полугруппа, являющаяся полурешеткой архимедовых полугрупп. Полугруппа S обладает полным радикалом тогда и только тогда, когда для любой полной подгруппы G полугруппы S и любых элементов a и b из G и c из S таких, что элементы ac, bc, ca и cb принадлежат множеству GrS, имеют место равенства $S^1ca = S^1cb$ и $acS^1 = bcS^1$.*

Доказательство. Пусть $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ – конечная полугруппа, являющаяся полурешеткой архимедовых полугрупп.

Необходимость. Пусть полугруппа S обладает полным радикалом, то есть на полугруппе S имеется некоторая конгруэнция ρ, классы которой, являющиеся подполугруппами, суть в точности максимальные полные подполугруппы данной полугруппы, и фактор-полугруппа S/ρ редуцирована. Поскольку любая подполугруппа полурешетки архимедовых полугрупп сама является полурешеткой архимедовых полугрупп, то полурешетка архимедовых полугрупп будет полной только, если она является полной группой. Значит, любая максимальная полная подгруппа обязана быть классом конгруэнции ρ, и других классов конгруэнции ρ, являющихся подполугруппами, в полугруппе S нет. Заметим сначала, что групповые элементы x и y, находящиеся в отношении ρ, обязаны попадать в одну и ту же максимальную подгруппу полугруппы S и, следовательно, быть $\mathcal{H}$-эквивалентными. В самом деле, предположим, что $x \in G_e$, $y \in G_f$, где G_e, G_f – максимальные подгруппы полугруппы S с различными единицами e и f. Обозначим через m и n порядки элементов x и y соответственно. Поскольку ρ – конгруэнция на полугруппе S, из $x\rho y$ следует, что $x^{mn}\rho y^{mn}$, то есть $e\rho f$. Отсюда следует, что существует ρ-класс, который содержит два различных идемпотента e и f, а это противоречит тому, что ρ-классы, содержащие идемпотент, являются подгруппами.

Пусть элементы a и b принадлежат одной и той же полной подгруппе G полугруппы S. Тогда $a\rho b$. Поскольку ρ – конгруэнция на полугруппе S, для любого элемента c полугруппы S элементы ca и cb, а также элементы ac и bc, находятся в отношении ρ. Отсюда следует, что если элементы ca, cb, ac и bc принадлежат множеству GrS, то элементы ca и cb, а также элементы ac и bc, ввиду сделанного выше замечания, $\mathcal{H}$-эквивалентны. Следовательно, $ca\mathcal{L}cb$ и $ac\mathcal{R}bc$, то есть выполняются равенства $S^1ca = S^1cb$ и $acS^1 = bcS^1$.

Достаточность. Пусть для любой полной подгруппы G полугруппы S и любых элементов a и b из G и c из S таких, что элементы ac, bc, ca и cb принадлежат множеству GrS, имеют место равенства $S^1ca = S^1cb$ и $acS^1 = bcS^1$. Напомним, что любая полугруппа S_α, будучи архимедовой, является нильрасширением вполне простой подполугруппы B_α [9, с. 104]. Пусть G_α – ее структурная группа, $C_\alpha = C(G_\alpha)$ – наибольшая полная подгруппа группы G_α и $\varphi_\alpha : G_\alpha \to G_\alpha/C_\alpha$ – естественный гомоморфизм. По теореме Риса любая вполне простая полугруппа B_α изоморфна рисовской полугруппе матричного типа $\mathcal{M}(G_\alpha; I_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha)$ с сэндвич-матрицей P_α [10, с. 131]. Легко показать, что отображение $\psi_\alpha(x_\alpha; i_\alpha, j_\alpha) = (\varphi_\alpha(x_\alpha); i_\alpha, j_\alpha)$ является гомоморфизмом вполне простой подполугруппы B_α полугруппы S_α на вполне простую полугруппу

$\mathcal{M}(G_\alpha/C_\alpha; I_\alpha, \Lambda_\alpha, \overline{P_\alpha})$ с разрешимой структурной группой G_α/C_α над сэндвич-матрицей $\overline{P_\alpha}$, элементами которой являются гомоморфные образы элементов матрицы P_α при гомоморфизме φ_α.

На полугруппе S определим отношение η, полагая $a\eta b$ тогда и только тогда, когда или $a = b$, или существует $\alpha \in Y$ такое, что элементы a и b принадлежат подполугруппе B_α и $\psi_\alpha(a) = \psi_\alpha(b)$. На полугруппе S рассмотрим конгруэнцию η^*, порожденную отношением η. Докажем, что если u и v – групповые элементы полугруппы S и они находятся в отношении η^*, то эти элементы находятся и в отношении η. Хорошо известно, что $u\eta^* v$ в том и только в том случае, когда v можно получить из u конечной последовательностью элементарных η-переходов [12, с. 38].

Рассмотрим один элементарный η-переход. Пусть u – групповой элемент полугруппы S и $u = dac$, $v = dbc$ для некоторых a, $b \in S$ таких, что $a\eta b$ и d, $c \in S^1$. Докажем, что элемент v – тоже групповой элемент полугруппы S и $u\eta v$. В дальнейшем мы не будем делать различия между обозначениями a и a_α. При этом мы предполагаем, что индекс элемента a_α указывает на то, что элемент a принадлежит полугруппе S_α. Аналогично для других элементов и их индексов. Пусть a_α, $b_\alpha \in B_\alpha$ и $\psi_\alpha(a_\alpha) = \psi_\alpha(b_\alpha)$.

Рассмотрим частный случай, пусть $c_\mu \in B_\mu$ и $\alpha\mu = \mu$. Поскольку элементы a_α и b_α находятся в отношении η, то эти элементы принадлежат одному $\mathcal{H}$-классу – группе H, и элементы a_α и b_α обладают общей единицей e_α. Если G – наибольшая полная подгруппа группы H, то она нормальна в группе H. Пусть элементы a_α и b_α принадлежат смежному классу Gz_α группы H по нормальной подгруппе G. Тогда в группе G найдутся элементы x_α и y_α такие, что $a_\alpha = x_\alpha z_\alpha$ и $b_\alpha = y_\alpha z_\alpha$. Элементы x_α и y_α $\mathcal{H}$-эквивалентны. Значит, $x_\alpha \mathcal{L} y_\alpha$, и, следовательно, $x_\alpha z_\alpha c_\mu \mathcal{L} y_\alpha z_\alpha c_\mu$. В подполугруппе $S_\alpha \bigcup S_\mu$ полугруппа S_μ является идеалом, а B_μ – идеалом полугруппы S_μ, причем $B_\mu^2 = B_\mu$. Следовательно, B_μ является идеалом полугруппы $S_\alpha \bigcup S_\mu$ [12, с. 109]. А значит, элементы $x_\alpha z_\alpha c_\mu$ и $y_\alpha z_\alpha c_\mu$ принадлежат полугруппе B_μ. Поскольку элементы $x_\alpha z_\alpha c_\mu$ и $y_\alpha z_\alpha c_\mu$ групповые и элементы x_α и y_α из полной группы G, то по условию $x_\alpha z_\alpha c_\mu S^1 = y_\alpha z_\alpha c_\mu S^1$. Поэтому $x_\alpha z_\alpha c_\mu \mathcal{R} y_\alpha z_\alpha c_\mu$. Тогда $x_\alpha z_\alpha c_\mu \mathcal{H} y_\alpha z_\alpha c_\mu$. Отсюда следует, что элементы $x_\alpha z_\alpha c_\mu$ и $y_\alpha z_\alpha c_\mu$ принадлежат одной подгруппе полугруппы S_μ и, следовательно, обладают общей единицей g_μ. Докажем, что $\psi_\mu(g_\mu x_\alpha) = \psi_\mu(g_\mu y_\alpha)$.

Выше показано, что полугруппа B_μ является идеалом полугруппы $S_\alpha \bigcup S_\mu$. Следовательно, элемент $e_\alpha g_\mu$ принадлежит B_μ. Пусть $(e_\alpha g_\mu)^n = f_\mu$, где f_μ – идемпотент. Так как $e_\alpha(e_\alpha g_\mu)^n = (e_\alpha g_\mu)^n$, имеем $e_\alpha f_\mu = f_\mu$. Тогда $e_\alpha f_\mu e_\alpha = f_\mu e_\alpha$, $(f_\mu e_\alpha)^2 = f_\mu e_\alpha$ и $(f_\mu e_\alpha)e_\alpha = e_\alpha(f_\mu e_\alpha) = f_\mu e_\alpha$. $\mathcal{H}$-классы вполне простой подполугруппы B_μ с единицами f_μ и $f_\mu e_\alpha$ обозначим через H_f и H_{fe}, соответственно. Из условий леммы следует, что для любого элемента a_α из группы G и любого элемента c_μ из группы H_{fe} выполняются равенства $S^1 c_\mu a_\alpha = S^1 c_\mu e_\alpha$ и $a_\alpha c_\mu S^1 = e_\alpha c_\mu S^1$. Но

$$S^1 c_\mu e_\alpha = S^1 c_\mu (f_\mu e_\alpha) e_\alpha = S^1 c_\mu f_\mu e_\alpha = S^1 c_\mu,$$

$$e_\alpha c_\mu S^1 = e_\alpha (f_\mu e_\alpha) c_\mu S^1 = f_\mu e_\alpha c_\mu S^1 = c_\mu S^1.$$

То есть $S^1 c_\mu a_\alpha = S^1 c_\mu$ и $a_\alpha c_\mu S^1 = c_\mu S^1$. Так как элементы e_α и a_α $\mathcal{H}$-эквивалентны, имеем $e_\alpha \mathcal{L} a_\alpha$ и $e_\alpha \mathcal{R} a_\alpha$. Отсюда $S^1 e_\alpha = S^1 a_\alpha$ и $e_\alpha S^1 = a_\alpha S^1$. Тогда

$S^1e_\alpha c_\mu = S^1a_\alpha c_\mu$ и $c_\mu e_\alpha S^1 = c_\mu a_\alpha S^1$. Но

$$S^1e_\alpha c_\mu = S^1e_\alpha(f_\mu e_\alpha)c_\mu = S^1(f_\mu e_\alpha)c_\mu = S^1c_\mu,$$
$$c_\mu e_\alpha S^1 = c_\mu(f_\mu e_\alpha)e_\alpha S^1 = c_\mu(f_\mu e_\alpha)S^1 = c_\mu S^1.$$

Значит, $S^1c_\mu = S^1a_\alpha c_\mu$ и $c_\mu S^1 = c_\mu a_\alpha S^1$. Таким образом, $c_\mu\mathcal{L}a_\alpha c_\mu$, $c_\mu\mathcal{R}a_\alpha c_\mu$, $c_\mu\mathcal{L}c_\mu a_\alpha$, $c_\mu\mathcal{R}c_\mu a_\alpha$. Значит, для любого элемента c_μ из группы H_{fe} и любого a_α из группы G элементы c_μ, $c_\mu a_\alpha$, $a_\alpha c_\mu$ $\mathcal{H}$-эквивалентны. Отсюда следует, что подполугруппа $H_{fe}\bigcup G$ является полурешеткой групп. На полугруппе $H_{fe}\bigcup G$ рассмотрим конгруэнцию σ из леммы 1. Так как элементы x_α и y_α принадлежат полной группе G, они находятся в отношении σ. Следовательно, $x_\alpha(f_\mu e_\alpha)\sigma y_\alpha(f_\mu e_\alpha)$ и $(f_\mu e_\alpha)x_\alpha\sigma(f_\mu e_\alpha)y_\alpha$. Так как на группе H_{fe} ограничение гомоморфизма φ_μ совпадает с ограничением гомоморфизма ψ_μ, имеем

$$\psi_\mu(x_\alpha(f_\mu e_\alpha)) = \psi_\mu(y_\alpha(f_\mu e_\alpha)),\ \psi_\mu((f_\mu e_\alpha)x_\alpha) = \psi_\mu((f_\mu e_\alpha)y_\alpha).$$

Пусть $(g_\mu e_\alpha)^k$ – идемпотент, $g_\mu e_\alpha = (g_\mu e_\alpha)^{rk}g_\mu e_\alpha$ и $rk \geq n$, тогда

$$g_\mu e_\alpha = g_\mu(e_\alpha g_\mu)^{rk}e_\alpha = g_\mu(e_\alpha g_\mu)^{rk-n}(e_\alpha g_\mu)^n e_\alpha = g_\mu(e_\alpha g_\mu)^{rk-n}f_\mu e_\alpha.$$

Обозначим $g_\mu(e_\alpha g_\mu)^{rk-n} = m_\mu$, тогда $g_\mu e_\alpha = m_\mu f_\mu e_\alpha$, $g_\mu e_\alpha x_\alpha = m_\mu f_\mu e_\alpha x_\alpha$ и $g_\mu e_\alpha y_\alpha = m_\mu f_\mu e_\alpha y_\alpha$. Отсюда

$$\psi_\mu(g_\mu e_\alpha x_\alpha) = \psi_\mu(m_\mu f_\mu e_\alpha x_\alpha) = \psi_\mu(m_\mu)\psi_\mu(f_\mu e_\alpha x_\alpha) =$$
$$= \psi_\mu(m_\mu)\psi_\mu(f_\mu e_\alpha y_\alpha) = \psi_\mu(m_\mu f_\mu e_\alpha y_\alpha) = \psi_\mu(g_\mu e_\alpha y_\alpha),$$

Таким образом, $\psi_\mu(g_\mu x_\alpha) = \psi_\mu(g_\mu y_\alpha)$ для любых элементов x_α и y_α из полной группы G полугруппы S_α.

Отсюда следует, что если $\alpha\mu = \mu$, то для любого элемента c_μ из полугруппы B_μ

$$\psi_\mu(a_\alpha c_\mu) = \psi_\mu(x_\alpha z_\alpha c_\mu) = \psi_\mu(g_\mu x_\alpha z_\alpha c_\mu) = \psi_\mu(g_\mu x_\alpha)\psi_\mu(z_\alpha c_\mu) =$$
$$= \psi_\mu(g_\mu y_\alpha)\psi_\mu(z_\alpha c_\mu) = \psi_\mu(g_\mu y_\alpha z_\alpha c_\mu) = \psi_\mu(y_\alpha z_\alpha c_\mu) = \psi_\mu(b_\alpha c_\mu).$$

Таким образом, в этом случае $a_\alpha c_\mu\eta b_\alpha c_\mu$.

Пусть $c \in S_\xi$, $d \in S_\beta$ и $\alpha\beta\xi = \mu$ $(\alpha,\beta,\xi,\mu \in Y)$. Обозначим через e_μ произвольный идемпотент полугруппы B_μ. Напомним, что элементы a_α и b_α принадлежат одному $\mathcal{H}$-классу – группе H. Пусть элементы a_α и b_α принадлежат смежному классу Gz_α группы H по наибольшей полной подгруппе G. Тогда в группе G найдутся такие элементы k_α и l_α, что $a_\alpha = k_\alpha z_\alpha$ и $b_\alpha = l_\alpha z_\alpha$. Элементы $k_\alpha z_\alpha c_\xi e_\mu$ и $l_\alpha z_\alpha c_\xi e_\mu$ принадлежат полугруппе B_μ. Так как элементы k_α и l_α принадлежат полной группе G, а элементы $k_\alpha z_\alpha c_\xi e_\mu$ и $l_\alpha z_\alpha c_\xi e_\mu$ принадлежат множеству GrS, то по условию леммы имеет место равенство $k_\alpha z_\alpha c_\xi e_\mu S^1 = l_\alpha z_\alpha c_\xi e_\mu S^1$. Тогда $d_\beta k_\alpha z_\alpha c_\xi e_\mu S^1 = d_\beta l_\alpha z_\alpha c_\xi e_\mu S^1$, то есть $d_\beta a_\alpha c_\xi e_\mu S^1 = d_\beta b_\alpha c_\xi e_\mu S^1$. Пусть для элементов $d_\beta a_\alpha c_\xi$ и $d_\beta b_\alpha c_\xi$ из B_μ не выполняется равенство $d_\beta a_\alpha c_\xi S^1 = d_\beta b_\alpha c_\xi S^1$. Далее предположим сначала, что B_μ – минимальный идеал полугруппы S. Так как минимальный идеал полугруппы является объединением всех минимальных правых идеалов, которые попарно не пересекаются [9, с. 80], то $(d_\beta a_\alpha c_\xi S^1) \cap (d_\beta b_\alpha c_\xi S^1) = \oslash$. Поскольку $d_\beta a_\alpha c_\xi e_\mu S^1 \subseteq d_\beta a_\alpha c_\xi S^1$ и $d_\beta b_\alpha c_\xi e_\mu S^1 \subseteq d_\beta b_\alpha c_\xi S^1$, получаем противоречие. Следовательно, $d_\beta a_\alpha c_\xi S^1 = d_\beta b_\alpha c_\xi S^1$. Предположим теперь, что B_μ не является минимальным идеалом полугруппы S. Рассмотрим факторполугруппу Риса S/I, где $I = \bigcup_{i<\mu} S_i$. Поскольку классами рисовской конгруэнции является идеал I и одноэлементные подмножества из $S \setminus I$, то в полугруппе S/I имеет место равенство $d_\beta a_\alpha c_\xi e_\mu (S/I)^1 = d_\beta b_\alpha c_\xi e_\mu (S/I)^1$ и не выполняется равенство $d_\beta a_\alpha c_\xi (S/I)^1 = d_\beta b_\alpha c_\xi (S/I)^1$. Тогда элементы $d_\beta a_\alpha c_\xi$ и $d_\beta b_\alpha c_\xi$ принадлежат одному 0-минимальному идеалу полугруппы S/I. Но 0-минимальный идеал полугруппы является объединением всех 0-минимальных правых идеалов, любые два из которых не имеют общих ненулевых элементов, следовательно, $(d_\beta a_\alpha c_\xi (S/I)^1) \cap (d_\beta b_\alpha c_\xi (S/I)^1) = 0$. Поскольку $d_\beta a_\alpha c_\xi e_\mu (S/I)^1 \subseteq d_\beta a_\alpha c_\xi (S/I)^1$ и $d_\beta b_\alpha c_\xi e_\mu (S/I)^1 \subseteq d_\beta b_\alpha c_\xi (S/I)^1$, получаем противоречие. Таким образом, и в этом случае $d_\beta a_\alpha c_\xi S^1 = d_\beta b_\alpha c_\xi S^1$. Так как элементы k_α и l_α принадлежат полной группе G, а элементы $e_\mu d_\beta k_\alpha$ и $e_\mu d_\beta l_\alpha$ принадлежат множеству GrS, то по условию леммы имеет место равенство $S^1 e_\mu d_\beta k_\alpha = S^1 e_\mu d_\beta l_\alpha$. Тогда $S^1 e_\mu d_\beta k_\alpha z_\alpha c_\xi = S^1 e_\mu d_\beta l_\alpha z_\alpha c_\xi$. Отсюда следует, что $S^1 e_\mu d_\beta a_\alpha c_\xi = S^1 e_\mu d_\beta b_\alpha c_\xi$. Рассуждая двойственным образом, можно показать, что $S^1 d_\beta a_\alpha c_\xi = S^1 d_\beta b_\alpha c_\xi$. Таким образом, элементы $d_\beta a_\alpha c_\xi$ и $d_\beta b \alpha c_\xi$ $\mathcal{R}$-эквивалентны и $\mathcal{L}$-эквивалентны. Следовательно, эти элементы $\mathcal{H}$-эквивалентны, и значит, они обладают общей единицей ε_μ. Понятно, что и в полугруппе S элементы $d_\beta a_\alpha c_\xi$ и $d_\beta b_\alpha c_\xi$ имеют общую единицу ε_μ. Так как $c_\xi \varepsilon_\mu \in B_\mu$, в силу частного случая $\psi_\mu(a_\alpha c_\xi \varepsilon_\mu) = \psi_\mu(b_\alpha c_\xi \varepsilon_\mu)$. Тогда

$$\psi_\mu(d_\beta a_\alpha c_\xi) = \psi_\mu(\varepsilon_\mu d_\beta a_\alpha c_\xi \varepsilon_\mu) = \psi_\mu(\varepsilon_\mu d_\beta)\psi_\mu(a_\alpha c_\xi \varepsilon_\mu) =$$
$$= \psi_\mu(\varepsilon_\mu d_\beta)\psi_\mu(b_\alpha c_\xi \varepsilon_\mu) = \psi_\mu(\varepsilon_\mu d_\beta b_\alpha c_\xi \varepsilon_\mu) = \psi_\mu(d_\beta b_\alpha c_\xi)$$

Таким образом, $d_\beta a_\alpha c_\xi \eta d_\beta b_\alpha c_\xi$.

Двойственные утверждения доказываются аналогично. Таким образом, если элементы da и db, или ac и bc, находятся в отношении η, а элементы dac и dbc групповые, то элементы dac и dbc также находятся в отношении η. Следовательно, при одном элементарном η-переходе элементы u и v находятся в отношении η. Из транзитивности отношения η следует, что если u и v – групповые элементы полугруппы S и они находятся в отношении η^*, то элементы u и v находятся и в отношении η. Если полугруппа является полурешеткой архимедовых полугрупп, то полными полугруппами могут быть только полные группы. Поскольку в полугруппе S/η^* полных подгрупп нет, S/η^* – редуцированная полугруппа. Следовательно, полугруппа S обладает полным радикалом.

Лемма 3. *Пусть S – конечная полугруппа, являющаяся полурешеткой архимедовых полугрупп. Если среди факторов полугруппы S нет полугрупп $G_l(H)$ и $G_r(H)$, где G – любая полная подгруппа полугруппы S, H – собственная подгруппа группы G, то для любого элемента c полугруппы S и любых элементов a и b, принадлежащих одной и той же полной подгруппе G полугруппы S, таких, что элементы ac, bc, ca и cb принадлежат множеству GrS, имеют место равенства $S^1ca = S^1cb$ и $acS^1 = bcS^1$.*

Доказательство. Пусть $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ – конечная полугруппа, являющаяся полурешеткой архимедовых полугрупп. Предположим, что для некоторых элементов a, b и c, удовлетворяющих условию леммы, имеет место $acS^1 \neq bcS^1$. Пусть e – единица группы G и d – элемент группы G такой, что $b = da$. Тогда $acS^1 = e(ac)S^1 \neq bcS^1 = d(ac)S^1$. Пусть ε – единица группы, являющейся $\mathcal{H}$-классом полугруппы S, содержащим элемент ac. Тогда $acS^1 = \varepsilon S^1$. Таким образом, в полугруппе S существуют идемпотент ε и элементы e и d полной группы G такие, что $e\varepsilon S^1 \neq d\varepsilon S^1$. Рассмотрим подполугруппу $Q = \langle G \cup \varepsilon \rangle$. Пусть элементы группы G

принадлежат полугруппе S_β, а элемент $e\varepsilon$ – полугруппе S_α. Тогда $\varepsilon \in S_\alpha$. Действительно, пусть ρ – конгруэнция на полугруппе S, соответствующая разложению полугруппы S в полурешетку архимедовых полугрупп $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$. Поскольку элементы ε и ac $\mathcal{H}$-эквивалентны, они $\mathcal{D}$-эквивалентны и, следовательно, $\varepsilon\rho ac$. Отсюда $e\varepsilon\rho eac$, то есть $e\varepsilon\rho ac$. В силу транзитивности отношения ρ элементы $e\varepsilon$ и ε находятся в отношении ρ. Значит, $\varepsilon \in S_\alpha$. Тогда $\alpha\beta = \alpha$, причем $\alpha \neq \beta$, ибо в противном случае полугруппа Q является подполугруппой вполне простой и, следовательно, для любых e, ε и d справедливо равенство $e\varepsilon S^1 = d\varepsilon S^1$. Следовательно, полугруппа Q является подполугруппой полурешетки архимедовой полугруппы S_α и группы G. Полугруппа S_α есть нильрасширение вполне простой полугруппы B_α [9, c. 104]. Поскольку полугруппа S_α является двусторонним идеалом полурешетки полугруппы S_α и группы G, а подполугруппа B_α – таким идеалом полугруппы S_α, что $B_\alpha^2 = B_\alpha$, значит, подполугруппа B_α является идеалом полурешетки полугруппы S_α и группы G [12, c. 109]. Отсюда следует, что полугруппа Q есть полурешетка вполне простой подполугруппы B'_α полугруппы B_α и полной группы G. Из неравенства $e\varepsilon S^1 \neq d\varepsilon S^1$ вытекает, что полугруппа B'_α нетривиальна. Предположим, что $e\varepsilon Q^1 = d\varepsilon Q^1$. Тогда в полугруппе Q существуют k и l такие, что $e\varepsilon k = d\varepsilon$ и $d\varepsilon l = e\varepsilon$. Очевидно, что $kS^1 \subseteq S^1$ и $lS^1 \subseteq S^1$. Отсюда $(e\varepsilon)kS^1 \subseteq e\varepsilon S^1$ и $(d\varepsilon)dS^1 \subseteq S^1$. Таким образом, $e\varepsilon S^1 = d\varepsilon S^1$. Из полученного противоречия следует, что $e\varepsilon Q^1 \neq d\varepsilon Q^1$. Через σ обозначим отношение эквивалентности на полугруппе Q, классы которого суть минимальные правые идеалы полугруппы Q и одноэлементные подмножества из G. Отношение σ – конгруэнция на полугруппе Q. Действительно, пусть элементы a и b находятся в отношении σ. Тогда $aQ = bQ$. Для любого элемента c полугруппы Q справедливо $caQ = cbQ$. Таким образом, $ca\sigma cb$. Пусть элементы a и b принадлежат правому идеалу R полугруппы Q. Тогда $ac \in R$ и $bc \in R$. Отсюда $acQ \subseteq RQ \subseteq R$ и $bcQ \subseteq RQ \subseteq R$. Следовательно, $ac\sigma bc$. Факторполугруппа $\overline{Q} = Q/\sigma$ является идеальным расширением нетривиальной полугруппы левых нулей L с помощью группы G^0. Следовательно, для любого элемента f из L и любого элемента g группы G справедливы равенства $fg = f$. Пусть $\overline{e}\,\overline{\varepsilon} = \overline{d}\,\overline{\varepsilon}$. Тогда $\overline{e\varepsilon} = \overline{d\varepsilon}$. Это означает, что элементы $e\varepsilon$ и $d\varepsilon$ принадлежат одному минимальному правому идеалу полугруппы Q. Но это противоречит неравенству $e\varepsilon Q^1 \neq d\varepsilon Q^1$. Следовательно, $\overline{e}\ \overline{\varepsilon} \neq \overline{d}\ \overline{\varepsilon}$. Далее образы элементов из Q при естественном гомоморфизме $\varphi : Q \to \overline{Q}$ договоримся для упрощения записи обозначать так же, как их прообразы. (Это особенно естественно для элементов из группы G, которые не "склеиваются" гомоморфизмом φ. Не различая же в записи ε и $\varphi(\varepsilon)$, мы учитываем, что элемент ε - идемпотент.

Далее возможны два случая: 1) $e\varepsilon = \varepsilon$ и 2) $e\varepsilon \neq \varepsilon$.

Рассмотрим первый случай. Обозначим через H множество $\{h \in G | h\varepsilon = \varepsilon\}$. Поскольку $e\varepsilon = \varepsilon$, это множество не пусто. Множество H являются собственной подгруппой группы G. Действительно, пусть $h_1 \in H$ и $h_2 \in H$. Тогда $h_1\varepsilon = \varepsilon$ и $h_2\varepsilon = \varepsilon$. Отсюда $h_1h_2\varepsilon = h_1\varepsilon = \varepsilon$. Следовательно, $h_1h_2 \in H$. Поскольку $e\varepsilon \neq d\varepsilon$, то H – собственная подгруппа группы G. Докажем, что полугруппа $\overline{Q}$ изоморфна полугруппе $G_l(H)$ над полной группой G с подгруппой H. Зададим отображение ψ полугруппы $G_l(H)$ на полугруппу $\overline{Q}$, полагая, $\psi((gH,\ l)) = g\varepsilon$, $\psi(g) = g$ для любого элемента g группы G. В силу равенств

$$\psi(g_1 \circ g_2) = g_1g_2 = \psi(g_1)\psi(g_2),$$

$$\psi((g_1H,\ l)\circ g_2)=\psi((g_1H,\ l))=g_1\varepsilon=g_1(\varepsilon g_2)=(g_1\varepsilon)g_2=\psi((g_1H,\ l)\psi(g_2),$$
$$\psi((g_1H,\ l)\circ(g_2H,\ l))=\psi((g_1H,\ l))=g_1\varepsilon=g_1(\varepsilon g_2\varepsilon)=$$
$$=(g_1\varepsilon)(g_2\varepsilon)=\psi((g_1H,\ l))\psi((g_2H,\ l)),$$
$$\psi(g_1\circ(g_2H,\ l))=\psi(g_1g_2H,\ l)=(g_1g_2)\varepsilon=g_1(g_2\varepsilon)=\psi(g_1)\psi(g_2H,\ l),$$
отображение ψ является гомоморфизмом. Очевидно, что ψ – сюръективный гомоморфизм. Пусть $\psi((g_1H,\ l))=\psi((g_2H,\ l))$. Тогда $g_1\varepsilon=g_2\varepsilon$. Отсюда для любого элемента h из группы H имеем $hg_1^{-1}g_1\varepsilon=hg_1^{-1}g_2\varepsilon$. Следовательно, $\varepsilon=hg_1^{-1}g_2\varepsilon$. Поскольку H – группа, $\varepsilon=h^{-1}\varepsilon=h^{-1}hg_1^{-1}g_2\varepsilon$ или $\varepsilon=g_1^{-1}g_2\varepsilon$. Значит, элемент $g_1^{-1}g_2$ принадлежит группе H. Следовательно, $g_1H=g_2H$. Отсюда следует, что $(g_1H,\ l)=(g_2H,\ l)$. Значит, ψ – инъективный гомоморфизм. Таким образом, среди факторов полугруппы S имеется полугруппа $G_l(H)$ над полной группой G с подгруппой H.

Рассмотрим второй случай. Предположим, что $e\varepsilon=f$, где f - некоторый элемент идеала L полугруппы $\overline{Q}$. Тогда $ef=e\varepsilon=f$. Полагая, что для некоторого элемента g группы G и некоторого элемента l идеала L выполняется равенство $gl=\varepsilon$, получим, что $egl=e\varepsilon$ или $gl=\varepsilon=f$. Таким образом, если $e\varepsilon\neq\varepsilon$, то для любого идемпотента l из L идемпотент ε не принадлежит множеству Gl. Тогда множество $\overline{Q}\setminus\varepsilon$ является подполугруппой полугруппы $\overline{Q}$. В полугруппе $\overline{Q}$ для любого элемента g группы G справедливо равенство $ge\varepsilon=gf$. Значит, если $e\varepsilon\neq d\varepsilon$, то $ef\neq df$.

Далее можно показать, что и в этом случае среди факторов полугруппы $\overline{Q}\setminus\varepsilon$, а значит, и полугруппы S имеется полугруппа $G_l(H)$ над полной группой G с подгруппой H. Для этого достаточно в доказательстве при рассмотрении полугруппы $\overline{Q}\setminus\varepsilon$ заменить идемпотент ε на идемпотент f.

Двойственным образом можно показать, что если в полугруппе S для элементов a, b и c, удовлетворяющих условию леммы, не выполняется равенство $S^1ca=S^1cb$, то среди факторов полугруппы S есть полугруппа $G_r(H)$ над полной группой G с подгруппой H.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, напомним определение полугруппы B_4. Она является полугруппой матричных единиц, ее ненулевые элементы будем обозначать e_{ij}, где $i\in\{1,2,3,4\}$, $j\in\{1,2,3,4\}$. На множестве $\{e_{ij}\}\bigcup 0$ операция умножения задается следующим образом: $e_{ij}\cdot e_{kl}=e_{il}$, если $j=k$; и $e_{ij}\cdot e_{kl}=0$, если $j\neq k$; $0\cdot e_{ij}=e_{ij}\cdot 0=0\cdot 0=0$.

Доказательство теоремы. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\mathcal{V}$ – псевдомногообразие конечных полугрупп, обладающее полным радикалом. Предположим, что псевдомногообразию $\mathcal{V}$ принадлежит полугруппа B_2. Нетрудно проверить, что 0-прямой квадрат полугруппы B_2 изоморфен полугруппе B_4. Следовательно, псевдомногообразию $\mathcal{V}$ принадлежит и полугруппа B_4. Тогда этому псевдомногообразию принадлежит прямое произведение полугруппы B_4 и двухэлементной полурешетки $S=\{0,1\}$. В полугруппе $B_4\times S$ рассмотрим подполугруппу

$$K=\{(e_{11},1),(e_{12},1),(e_{21},1),(e_{22},1),(0,1),(0,0),(e_{41},0),(e_{42},0)\}.$$

В полугруппе K две полные подполугруппы – одноэлементная подполугруппа (0, 0) и подполугруппа $L=\{(e_{11},1),(e_{12},1),(e_{21},1),(e_{22},1),(0,1)\}$, изоморфная полугруппе B_2. Так как $(e_{41},0)\cdot L=\{(0,0),(e_{41},0),(e_{42},0)\}$, но не существует полной подполугруппы полугруппы K, которой бы принадлежали элементы

$(0,0)$, $(e_{41},0)$, $(e_{42},0)$, то на полугруппе K не существует конгруэнции, классы которой являющееся подполугруппами, были бы максимальными полными подполугруппами данной полугруппы. То есть полугруппа K не обладает полным радикалом. Таким образом, псевдомногообразию $\mathcal{V}$ не может принадлежать полугруппа B_2. Так как полугруппа B_2 изоморфна рисовскому фактору прямого произведения $A_2 \times A_2$ [9, с. 71], псевдомногообразию $\mathcal{V}$ не могут принадлежать полугруппы B_2 и A_2, а также полугруппы, среди факторов которых есть эти подполугруппы. Следовательно, любая полугруппа псевдомногообразия $\mathcal{V}$ является полурешеткой архимедовых полугрупп [9, с. 144]. По лемме 2 любая полугруппа псевдомногообразия $\mathcal{V}$ должна удовлетворять условию 2) теоремы.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из леммы 2.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\mathcal{V}$ – псевдомногообразие конечных полугрупп, обладающее полным радикалом. При доказательстве импликации 1) $\Rightarrow$ 2) установлено, что $\mathcal{V}$ – псевдомногообразие конечных полугрупп, являющихся полурешетками архимедовых полугрупп. Это эквивалентно тому, что среди факторов полугрупп псевдомногообразия $\mathcal{V}$ нет полугрупп B_2 и A_2 [9, с. 144]. Предположим, что полугруппа $G_l(H)$ над полной группой G с подгруппой H обладает полным радикалом, то есть на полугруппе $G_l(H)$ имеется конгруэнция ρ, классы которой являющиеся подполугруппами, суть в точности максимальные полные подполугруппы данной полугруппы. В доказательстве леммы 2 отмечено, что любая максимальная полная подгруппа полурешетки архимедовых полугрупп обязана быть классом конгруэнции ρ и других классов конгруэнции ρ, являющихся подполугруппами, в конечной полугруппе, являющейся полурешеткой архимедовых полугрупп, нет. Поскольку полугруппа $G_l(H)$ является цепью полугруппы левых нулей и полной группы G, классами конгруэнции ρ на полугруппе $G_l(H)$ могут быть только идемпотенты и группа G. Пусть g_1 и g_2 – элементы подгруппы G полугруппы $G_l(H)$, принадлежащие различным левым смежным классам группы G по подгрупе H, и $(g_3H,\ l)$ – произвольный элемент полугруппы $G_l(H)$. В полугруппе $G_l(H)$ имеем, что $g_1 \circ (g_3H,\ l) = (g_1g_3H,\ l)$, $g_2 \circ (g_3H,\ l) = (g_2g_3H,\ l)$ и $(g_1g_3H,\ l) \neq (g_2g_3H,\ l)$. Таким образом, элементы g_1 и g_2 находятся в отношении ρ, а элементы $g_1 \circ (g_3H,\ l)$ и $g_2 \circ (g_3H,\ l)$ принадлежат разным классам конгруэнции ρ. Из полученного противоречия вытекает, что полугруппа $G_l(H)$ над полной группой G с подгруппой H не обладает полным радикалом. Аналогичным образом можно показать, что полугруппа $G_r(H)$ над полной группой G с подгруппой H также не обладает полным радикалом. Следовательно, псевдомногообразию $\mathcal{V}$ не могут принадлежать полугруппы, среди факторов которых есть полугруппы $G_l(H)$ и $G_r(H)$ над полной группой G с подгруппой H.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\mathcal{V}$ – псевдомногообразие конечных полугрупп, которому не принадлежат полугруппы A_2, B_2, $G_l(H)$ и $G_r(H)$ над полной группой G с подгруппой H. Тогда любая полугруппа псевдомногообразия $\mathcal{V}$ является полурешеткой архимедовых полугрупп и дальнейшее доказательство вытекает из леммы 3.

Отметим три следствия доказанной теоремы. Предварительно напомним определение одной серии полугрупп (см., например, [11]). Для любого натурального числа n положим

$$LZ(n) = \langle g, f | g^{n+1} = g, g^n f = fg = f^2 = f \rangle$$

Полугруппа $LZ(n)$ состоит из $2n$ элементов и является полурешеткой двух полугрупп – циклической группы n-го порядка и n-элементной полугруппы левых нулей. Полугруппу, двойственную к полугруппе $LZ(n)$, обозначают через $RZ(n)$.

Следствие 1. *Конечная полугруппа, являющаяся связкой унипотентных полугрупп, обладает полным радикалом.*

Доказательство. Пусть S – конечная полугруппа, являющаяся связкой унипотентных полугрупп. Среди факторов конечной полугруппы, являющейся связкой унипотентных полугрупп, нет полугрупп $LZ(n)$ и $RZ(n)$ при любом n [11, с. 166]. Но среди факторов полугрупп $G_l(H)$ и $G_r(H)$ над полной группой G с подгруппой H есть полугруппы виды $LZ(n)$ и $RZ(n)$,соответственно. Следовательно, среди факторов полугруппы S, нет полугрупп $G_l(H)$ и $G_r(H)$ над полной группой G с подгруппой H. В силу лемм 3 и 2 конечная полугруппа, являющаяся связкой унипотентных полугрупп, обладает полным радикалом.

Частным случаем следствия 1 является

Следствие 2. *Конечная полугруппа, являющаяся связкой групп, обладает полным радикалом.*

Напомним, что полугруппу называют *комбинаторной*, если любая ее подгруппа тривиальна.

Следствие 3. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{V}$ – псевдомногообразие конечных комбинаторных полугрупп, обладающих полным радикалом;

2) $\mathcal{V}$ – псевдомногообразие конечных полугрупп, являющихся полурешетками нильрасширений прямоугольных полугрупп;

3) $\mathcal{V}$ – редуцированное псевдомногообразие конечных комбинаторных полугрупп.

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 1) следует из основной теоремы и тривиальности групп в псевдомногообразии $\mathcal{V}$.

Импликации 2) $\Rightarrow$ 3) и 3) $\Rightarrow$ 2) следует из утверждения 2 из [5] и тривиальности групп в псевдомногообразии $\mathcal{V}$.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Л.М.Мартынову за руководство работой и помощь при работе над статьей, а также рецензенту за идею получения характеризации рассматриваемых в работе псевдомногообразий на языке "запрещенных полугрупп" и полезные замечания по оформлению статьи.

Список литературы

[1] Martynov L. M., *Pirmary and reduced varieties of semigroups*, International conference “Semigroups and their applications including semigroup rings”, St – Petersburg, Russia, 19-30 June, 1995, Abstracts, P. 38.

[2] Martynov L. M., *On notions of completeness, solvability, primarity. Reducibility and purity for arbitrary algebras*, International conference of Modern Algebra and Applications. Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, Schedule and Abstracts. May 14-18, 1996, 79–80.

[3] Мартынов Л. М., *О понятиях полноты, примарности, редуцированности и чистоты для произвольных алгебр*, Универсальная алгебра и ее приложения: Труды межд. Семинара. Волгоград: Перемена, 2000, 179–190.

[4] Финк Т. Ю., *Конечные полные полугруппы*, Естественные науки и экология: Ежегодник. Вып. 4: Межвузовский сборник научных трудов. Омск: Издательство ОмГПУ, 1999, 8–14.

[5] Финк Т. Ю., *Вложимость и минимальная полнота конечных полугрупп*, Математика и информатика: наука и образование. Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. Вып. 1. Омск: Издательство ОмГПУ, 2001, 20–25.

[6] Финк Т. Ю., *Конечные полугруппы с наибольшими полными подполугруппами*, Математика и информатика: наука и образование. Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. Вып. 2. Омск: Издательство ОмГПУ, 2002, 28–34.

[7] Финк Т. Ю., *Расщепляемые псевдомногообразия конечных полугрупп*, Вестник ОмГУ, 4 (2005), 33–35.

[8] Мартынов Л. М., *Об одном радикале алгебр со свойством трансвербальности по минимальным многообразиям*, Вестник ОмГУ, 2 (2004), 19–21.

[9] Шеврин Л. Н., *Полугруппы*, Гл. IV в кн. “Общая алгебра” под ред. Л.А. Скорнякова Т., **II** (1991), 11–191.

[10] Pastijn F., Volkov M., *Minimal Noncryptic e-Varieties of regular semigroups*, J. Algebra, **184**: 3 (1996), 881–896.

[11] Шеврин Л. Н., *К теории эпигрупп. II*, Матем. сб., **185**: 9 (1994), 153–177.

[12] Клиффорд А., Престон Г., *Алгебраическая теория полугрупп*, М: Мир, **1**, 1962.

Татьяна Юрьевна Финк
Омский Государственный Педагогический Университет,
наб. Тухачевского 14,
644099, Омск, Россия
E-mail address: tatyanafink@yandex.ru