S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 652–672 (2008) УДК 512.552.7
MSC 16S34

ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ И РАНГИ ГРУПП ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ГРУПП $PGL_2(q)$, q НЕЧЕТНО

Р. Ж. АЛЕЕВ, О. В. МИТИНА

Abstract. We study central unit groups of integer group rings of groups $PGL_2(q)$, q odd, prove the decomposition theorem, and find the ranks of those groups.

Keywords: group characters, central units, group rings.

1. Введение

Исследования по теории групп единиц целочисленных групповых колец конечных групп имеют достаточно большую историю, начатую в 1940 г. знаменитой работой Хигмана [9]. Важной информацией о группах единиц таких колец являются их центры, которые совпадают с группами центральных единиц (обратимых элементов центров групповых колец). В работах [7, 8] получено описание группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PSL_2(5) \cong A_5$. Также в [7] описана группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PSL_2(9) \cong A_6$.

В [1] были исследованы группы центральных единиц целочисленных групповых колец групп $PSL_2(q)$, где q нечетно. В частности, оказалось, что такие группы раскладываются в прямое произведение подгрупп, которые устроены проще, чем вся группа [1, теор. 1, 2]. В данной работе получена теорема разложения групп центральных единиц целочисленных групповых колец групп $PGL_2(q)$ при нечетном q в прямое произведение подгрупп (теорема 1), вычислены ранги этих подгрупп (леммы 16 и 17). В теореме 2 доказана формула для нахождения рангов таких групп центральных единиц.

Aleev, R.Zh., Mitina, O.V., The decomposition theorem and ranks of central unit groups of integer group rings of groups $PGL_2(q)$, q odd.

Поступила 10 ноября 2008 г., опубликована 8 декабря 2008 г.

В теореме 3 найдена группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PGL_2(7)$.

2. Предварительные сведения

2.1. **Таблицы характеров групп $PGL_2(q)$, q нечетно.** Вид таблиц характеров групп $PGL_2(q)$, q нечетно, разнится для случаев $q \equiv 1 \pmod 4$ и $q \equiv 3 \pmod 4$. Однако, в этих таблицах много общего и можно предложить общий вид таблиц характеров групп $PGL_2(q)$, q нечетно, как в [4, стр. 12].

Обозначения. *Пусть*

1) $G = PGL_2(q)$, *q нечетно и является степенью простого нечетного числа p, $|G| = q(q^2-1)$, число классов сопряженности совпадает с числом неприводимых комплексных характеров и равно $q+2$;*
2) $\varepsilon = (-1)^{(q-1)/2}$ *и поэтому* $q \equiv \varepsilon \pmod 4$*;*
3) c *— элемент группы G порядка p;*
4) a *— элемент группы G порядка $q-\varepsilon$;*
5) b *— элемент группы G порядка $q+\varepsilon$;*
6) $a_2 = a^{(q-\varepsilon)/2}$ *— инволюция, представитель единственного класса сопряженных в $PSL_2(q)$ инволюций,*
7) $b_2 = b^{(q+\varepsilon)/2}$ *— инволюция, представитель единственного класса сопряженных инволюций вне $PSL_2(q)$.*

Тогда таблица характеров группы G может быть задана таблицей 1 или более удобной для нас таблицей 2.

Таблица 1. Таблица характеров группы $PGL_2(q)$, q нечетно

g	1	c	a^l	a_2	b^m	b_2
$\lvert C_G(g)\rvert$	$\lvert G\rvert$	q	$q-\varepsilon$	$2(q-\varepsilon)$	$q+\varepsilon$	$2(q+\varepsilon)$
$\lvert g^G\rvert$	1	q^2-1	$q(q+\varepsilon)$	$q\frac{q+\varepsilon}{2}$	$q(q-\varepsilon)$	$q\frac{q-\varepsilon}{2}$
1_G	1	1	1	1	1	1
ψ	1	1	$(-1)^l$	1	$(-1)^m$	-1
φ_1	q	0	ε	ε	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$
φ_2	q	0	$(-1)^l\varepsilon$	ε	$-(-1)^m\varepsilon$	ε
χ_i	$q+\varepsilon$	ε	$2\varepsilon\cos\frac{2il\pi}{q-\varepsilon}$	$2\varepsilon(-1)^i$	0	0
θ_j	$q-\varepsilon$	$-\varepsilon$	0	0	$-2\varepsilon\cos\frac{2jm\pi}{q+\varepsilon}$	$-2\varepsilon(-1)^j$

Замечание 1. Дадим необходимые пояснения к этим таблицам.

1. Укажем пределы изменения чисел l, m, i и j.
   (a) $1 \leqslant l, i \leqslant \dfrac{q-\varepsilon}{2} - 1$.
   (b) $1 \leqslant m, j \leqslant \dfrac{q+\varepsilon}{2} - 1$.
2. Пусть $\rho = \cos\dfrac{2\pi}{q-\varepsilon} + \sqrt{-1}\sin\dfrac{2\pi}{q-\varepsilon}$ — первообразный корень из 1 степени $q-\varepsilon$. Тогда
$$2\cos\frac{2il\pi}{q-\varepsilon} = \rho^{-il} + \rho^{il}.$$

ТАБЛИЦА 2. Таблица характеров группы $PGL_2(q)$, q нечетно

g	1	c	a_2	b_2	a^l	b^m
$\lvert C_G(g)\rvert$	$\lvert G\rvert$	q	$2(q-\varepsilon)$	$2(q+\varepsilon)$	$q-\varepsilon$	$q+\varepsilon$
$\lvert g^G\rvert$	1	q^2-1	$q\frac{q+\varepsilon}{2}$	$q\frac{q-\varepsilon}{2}$	$q(q+\varepsilon)$	$q(q-\varepsilon)$
1_G	1	1	1	1	1	1
ψ	1	1	1	-1	$(-1)^l$	$(-1)^m$
φ_1	q	0	ε	$-\varepsilon$	ε	$-\varepsilon$
φ_2	q	0	ε	ε	$(-1)^l\varepsilon$	$-(-1)^m\varepsilon$
χ_i	$q+\varepsilon$	ε	$2\varepsilon(-1)^i$	0	$2\varepsilon\cos\frac{2il\pi}{q-\varepsilon}$	0
θ_j	$q-\varepsilon$	$-\varepsilon$	0	$-2\varepsilon(-1)^j$	0	$-2\varepsilon\cos\frac{2jm\pi}{q+\varepsilon}$

3. Пусть $\sigma = \cos\dfrac{2\pi}{q+\varepsilon} + \sqrt{-1}\sin\dfrac{2\pi}{q+\varepsilon}$ — первообразный корень из 1 степени $q+\varepsilon$. Тогда

$$2\cos\frac{2jm\pi}{q+\varepsilon} = \sigma^{-jm} + \sigma^{jm}.$$

Замечание 2. Отдельно рассмотрим случаи $q=3$ и $q=5$.

$q=3$. В этом случае $\varepsilon=-1$, $\frac{q-\varepsilon}{2}-1 = \dfrac{3+1}{2}-1 = 1$ и $\frac{q+\varepsilon}{2}-1 = \dfrac{3-1}{2}-1 = 0$. Поэтому будут отсутствовать элементы b^m и характеры θ_j. Таблица характеров изображена в таблице 3. Известно, что $PGL_2(3)$ изоморфна S_4. Таблица 3 совпадает с таблицами характеров группы S_4 в [6, Гл. V, § 32, Пример 3, стр. 217] и [3, Приложение 1, Таблица 5, стр. 355].

ТАБЛИЦА 3. Таблица характеров группы $PGL_2(3)$

g	1	c	a_2	b_2	a
$\lvert C_G(g)\rvert$	$\lvert G\rvert$	3	8	4	4
$\lvert g^G\rvert$	1	8	3	6	6
1_G	1	1	1	1	1
ψ	1	1	-1	1	-1
φ_1	3	0	-1	-1	1
φ_2	3	0	1	1	-1
χ	2	-1	2	0	0

$q=5$. В этом случае $\varepsilon=1$, $\frac{q-\varepsilon}{2}-1 = \dfrac{5-1}{2}-1 = 1$ и $\frac{q+\varepsilon}{2}-1 = \dfrac{5+1}{2}-1 = 2$. Таблица характеров изображена в таблице 4. Отметим, что $PGL_2(5)$ изоморфна S_5, таблица 4 совпадает с таблицей характеров группы S_5 в [3, Приложение 1, Таблица 8, стр. 356].

$q \geqslant 7$. В этом случае

$$\frac{q-\varepsilon}{2} - 1 \geqslant \frac{7-1}{2} - 1 = 2 \text{ и } \frac{q+\varepsilon}{2} - 1 \geqslant \frac{7-1}{2} - 1 = 2.$$

Таблица характеров имеет общий вид как в таблице 2.

Таблица 4. Таблица характеров группы $PGL_2(5)$

g	1	c	a_2	b_2	a	b	b^2
$\lvert C_G(g)\rvert$	$\lvert G\rvert$	5	8	12	4	6	6
$\lvert g^G\rvert$	1	24	15	10	30	20	20
1_G	1	1	1	1	1	1	1
ψ	1	1	1	-1	-1	-1	-1
φ_1	5	0	1	-1	1	-1	-1
φ_2	5	0	1	1	-1	1	-1
χ	6	1	-2	0	0	0	0
θ_1	4	-1	0	2	0	1	1
θ_2	4	-1	0	-2	0	1	-1

2.2. Два базиса центра комплексной групповой алгебры.

Обозначения. *Обозначим через* $\mathrm{X}(G)$ *множество представителей классов сопряженности, через* $\mathrm{Irr}(G)$ *множество всех неприводимых комплексных характеров.*

$$\mathrm{X}(G) = \left\{1, c, a_2, b_2, \left\{a^l \mid l = 1, \dots, \tfrac{q-\varepsilon}{2} - 1\right\}, \left\{b^m \mid m = 1, \dots, \tfrac{q+\varepsilon}{2} - 1\right\}\right\},$$

$$\mathrm{Irr}(G) = \left\{1_G, \psi, \varphi_1, \varphi_2, \left\{\chi_i \mid i = 1, \dots, \tfrac{q-\varepsilon}{2} - 1\right\}, \left\{\theta_j \mid j = 1, \dots, \tfrac{q+\varepsilon}{2} - 1\right\}\right\}.$$

Зафиксируем два упорядоченных базиса центра комплексной групповой алгебры $\mathbb{C}G$. Базис из классовых сумм

$$Y(G) = \left(y(1), y(c), y(a_2), y(b_2), \left\{y(a^l)\right\}_{l=1}^{\frac{q-\varepsilon}{2}-1}), \left\{y(b^m)\right\}_{m=1}^{\frac{q+\varepsilon}{2}-1}\right),$$

где $y(x)$ — классовая сумма для класса x^G. Базис из минимальных центральных идемпотентов

$$E(G) = \left(e(1_G), e(\psi), e(\varphi_1), e(\varphi_2), \{e(\chi_i)\}_{i=1}^{\frac{q-\varepsilon}{2}-1}, \{e(\theta_j)\}_{j=1}^{\frac{q+\varepsilon}{2}-1}\right),$$

где $e(\chi)$ — минимальный центральный идемпотент, соответствующий характеру χ.

Из [6, § 33, (33.9) и (33.11)] для любых $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $x \in \mathrm{X}(G)$

$$e(\chi) = \frac{\deg\chi}{|G|} \sum_{x \in \mathrm{X}(G)} \overline{\chi(x)} y(x) \quad \text{и} \quad y(x) = |x^G| \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(x)}{\deg\chi} e(\chi), \tag{1}$$

где $\deg\chi$ — степень характера χ.

Лемма 1. *Пусть* $T(G)$ *и* $S(G)$ *— матрицы перехода от базиса* $Y(G)$ *к базису* $E(G)$ *и от* $E(G)$ *к* $Y(G)$ *соответственно, т. е.*

$$\left(y(1), ..., y\left(b^{\frac{q+\varepsilon}{2}-1}\right)\right) = \left(e(1_G), ..., e\left(\theta_{\frac{q+\varepsilon}{2}-1}\right)\right) \cdot T(G),$$

$$\left(e(1_G), ..., e\left(\theta_{\frac{q+\varepsilon}{2}-1}\right)\right) = \cdot \left(y(1), ..., y\left(b^{\frac{q+\varepsilon}{2}-1}\right)\right) \cdot S(G).$$

Тогда $T(G) =$

$$
=\frac{1}{|G|}\left(\begin{array}{cccc|c|c}
1 & 1 & q^2 & q^2 & (q{+}\varepsilon)^2 & (q{-}\varepsilon)^2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon(q{+}\varepsilon) & -\varepsilon(q{-}\varepsilon) \\
1 & 1 & q\varepsilon & q\varepsilon & 2(-1)^i\varepsilon(q{+}\varepsilon) & 0 \\
1 & -1 & -q\varepsilon & q\varepsilon & 0 & -2(-1)^j\varepsilon(q{-}\varepsilon) \\
\hline
1 & (-1)^l & q\varepsilon & (-1)^l q\varepsilon & 2\varepsilon(q{+}\varepsilon)\cos\frac{2il\pi}{q-\varepsilon} & 0 \\
\hline
1 & (-1)^m & -q\varepsilon & -(-1)^m q\varepsilon & 0 & -2\varepsilon(q{-}\varepsilon)\cos\frac{2jm\pi}{q+\varepsilon}
\end{array}\right),
$$

$$
S(G)=\left(\begin{array}{cccc|c|c}
1 & q^2{-}1 & q^{\frac{q+\varepsilon}{2}} & q^{\frac{q-\varepsilon}{2}} & q(q{+}\varepsilon) & q(q{-}\varepsilon) \\
1 & q^2{-}1 & q^{\frac{q+\varepsilon}{2}} & -q^{\frac{q-\varepsilon}{2}} & (-1)^l q(q{+}\varepsilon) & (-1)^m q(q{-}\varepsilon) \\
1 & 0 & \frac{q+\varepsilon}{2}\varepsilon & -\frac{q-\varepsilon}{2}\varepsilon & (q{+}\varepsilon)\varepsilon & -\varepsilon(q{-}\varepsilon) \\
1 & 0 & \frac{q+\varepsilon}{2}\varepsilon & \frac{q-\varepsilon}{2}\varepsilon & (-1)^l(q{+}\varepsilon)\varepsilon & -(-1)^m\varepsilon(q{-}\varepsilon) \\
\hline
1 & \varepsilon(q{-}\varepsilon) & (-1)^i\varepsilon q & 0 & 2\varepsilon q\cos\frac{2il\pi}{q-\varepsilon} & 0 \\
\hline
1 & -\varepsilon(q{+}\varepsilon) & 0 & -\varepsilon(-1)^j q & 0 & -2\varepsilon q\cos\frac{2jm\pi}{q+\varepsilon}
\end{array}\right).
$$

Здесь матрицы $T(G)$ и $S(G)$ записаны в сокращенной форме по типу таблиц характеров.

Доказательство. Матрицы $T(G)$ и $S(G)$ получаются по формулам 1. □

Выясним связь между коэффициентами в разложениях произвольного центрального элемента целочисленного группового кольца группы G по базисам $Y(G)$ и $E(G)$. К сожалению, получающиеся формулы очень громоздки, поэтому введем для их сокращения некоторые дополнительные обозначения. Для произвольного элемента u из центра комплексной групповой алгебры группы G обозначим

- $\gamma_u(x)$ — коэффициент при классовой сумме $y(x)$ класса x^G в разложении по базису из классовых $Y(G)$;
- $\beta_u(\chi)$ — коэффициент при минимальном центральном идемпотенте $e(\chi)$, который соответствует характеру χ в разложении элемента u по базису из минимальных центральных идемпотентов $E(G)$.

Далее положим

- $\Gamma_u(a) = \sum\limits_{l=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} \gamma_u(a^l)$,

  $\Gamma_u(a, alt) = \sum\limits_{l=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} (-1)^l\gamma_u(a^l)$,

  $\Gamma_u(a, \rho^i) = \sum\limits_{l=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} (\rho^{-il} + \rho^{il})\gamma_u(a^l)$ для любого $i = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$;
- $\Gamma_u(b) = \sum\limits_{m=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}} \gamma_u(b^m)$,

  $\Gamma_u(b, alt) = \sum\limits_{m=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}} (-1)^m\gamma_u(b^m)$,

  $\Gamma_u(b, \sigma^j) = \sum\limits_{m=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}} (\sigma^{-jm} + \sigma^{jm})\gamma_u(b^m)$ для любого $j = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$;

- $B_u(\chi) = \sum\limits_{i=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}} \beta_u(\chi_i)$,

  $B_u(\chi, alt) = \sum\limits_{i=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} (-1)^i \beta_u(\chi_i)$,

  $B_u(\chi, \rho^l) = \sum\limits_{i=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} (\rho^{-il} + \rho^{il})\beta_u(\chi_i)$ для любого $l = 1, \dots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$;
- $B_u(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}} \beta_u(\theta_j)$,

  $B_u(\theta, alt) = \sum\limits_{j=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}} (-1)^j \beta_u(\theta_j)$,

  $B_u(\theta, \sigma^m) = \sum\limits_{j=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}} (\sigma^{-jm} + \sigma^{jm})\beta_u(\theta_j)$ для любого $m = 1, \dots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$.

Предложение 1. *Пусть*

$$
\begin{aligned}
u = \gamma_u(1)y(1) + \gamma_u(c)y(c) + \gamma_u(a_2)y(a_2) + \gamma_u(b_2)y(b_2) + \\
+ \sum_{l=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} \gamma_u(a^l)y(a^l) + \sum_{m=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}} \gamma_u(b^m)y(b^m) = \\
= \beta_u(1_G)e(1_G) + \beta_u(\psi)e(\psi) + \beta_u(\varphi_1)e(\varphi_1) + \beta_u(\varphi_2)e(\varphi_2) + \\
+ \sum_{i=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} \beta_u(\chi_i)e(\chi_i) + \sum_{j=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}} \beta_u(\theta_j)e(\theta_j)
\end{aligned}
$$

— произвольный центральный элемент комплексной групповой алгебры группы G. Тогда имеем следующие соотношения.

1) *Коэффициенты $\gamma_u(1)$, $\gamma_u(c)$, $\gamma_u(a_2)$, $\gamma_u(b_2)$, $\gamma_u(a^l)$ $(l = 1, \dots, \frac{q-\varepsilon-2}{2})$, $\gamma_u(b^m)$ $(m = 1, \dots, \frac{q+\varepsilon-2}{2})$ выражаются через коэффициенты $\beta_u(1_G)$, $\beta_u(\psi)$, $\beta_u(\varphi_1)$, $\beta_u(\varphi_2)$, $\beta_u(\chi_i)$ $(i = 1, \dots, \frac{q-\varepsilon-2}{2})$, $\beta_u(\theta_j)$ $(j = 1, \dots, \frac{q+\varepsilon-2}{2})$ следующим образом:*

$$
\begin{aligned}
\gamma_u(1) = \frac{1}{|G|}\big(\beta_u(1_G) + \beta_u(\psi) + q^2(\beta_u(\varphi_1) + \beta_u(\varphi_2)) + (q+\varepsilon)^2 B_u(\chi) + \\
+ (q-\varepsilon)^2 B_u(\theta)\big);
\end{aligned}
$$

$$
\gamma_u(c) = \frac{1}{|G|}\big(\beta_u(1_G) + \beta_u(\psi) + \varepsilon(q+\varepsilon)B_u(\chi) - \varepsilon(q-\varepsilon)B_u(\theta)\big);
$$

$$
\gamma_u(a_2) = \frac{1}{|G|}\big(\beta_u(1_G) + \beta_u(\psi) + q\varepsilon(\beta_u(\varphi_1) + \beta_u(\varphi_2)) + 2\varepsilon(q+\varepsilon)B_u(\chi, alt)\big);
$$

$$
\gamma_u(b_2) = \frac{1}{|G|}\big(\beta_u(1_G) - \beta_u(\psi) + q\varepsilon(-\beta_u(\varphi_1) + \beta_u(\varphi_2)) - 2\varepsilon(q-\varepsilon)B_u(\theta, alt)\big);
$$

для любого $l = 1, \dots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$

$$
\gamma_u(a^l) = \frac{1}{|G|}\big(\beta_u(1_G) + (-1)^l\beta_u(\psi) + q\varepsilon(\beta_u(\varphi_1) + (-1)^l\beta_u(\varphi_2)) + \varepsilon(q+\varepsilon)B_u(\chi, \rho^l)\big);
$$

для любого $m = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$

$$\gamma_u(b^m)=\frac{1}{|G|}\big(\beta_u(1_G)+(-1)^m\beta_u(\psi)-q\varepsilon(\beta_u(\varphi_1)+(-1)^m\beta_u(\varphi_2))-\varepsilon(q-\varepsilon)B_u(\theta,\sigma^m)\big).$$

2) *Коэффициенты* $\beta_u(1_G)$, $\beta_u(\psi)$, $\beta_u(\varphi_1)$, $\beta_u(\varphi_2)$, $\beta_u(\chi_i)$ $(i=1,\ldots,\frac{q-\varepsilon-2}{2})$, $\beta_u(\theta_j)$ $(j=1,\ldots,\frac{q+\varepsilon-2}{2})$ *выражаются через* $\gamma_u(1)$, $\gamma_u(c)$, $\gamma_u(a_2)$, $\gamma_u(b_2)$, $\gamma_u(a^l)$ $(l=1,\ldots,\frac{q-\varepsilon-2}{2})$, $\gamma_u(b^m)$ $(m=1,\ldots,\frac{q+\varepsilon-2}{2})$ *следующим образом:*

$$\beta_u(1_G) = \gamma_u(1) + (q^2-1)\gamma_u(c) + q\frac{q+\varepsilon}{2}\gamma_u(a_2) + q\frac{q-\varepsilon}{2}\gamma_u(b_2) + q(q+\varepsilon)\Gamma_u(a)+$$
$$+ q(q-\varepsilon)\Gamma_u(b);$$

$$\beta_u(\psi) = \gamma_u(1)+(q^2-1)\gamma_u(c)+q\frac{q+\varepsilon}{2}\gamma_u(a_2)-q\frac{q-\varepsilon}{2}\gamma_u(b_2)+q(q+\varepsilon)\Gamma_u(a,alt)+$$
$$+q(q-\varepsilon)\Gamma_u(b,alt);$$

$$\beta_u(\varphi_1) = \gamma_u(1) + \varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}\gamma_u(a_2) - \varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}\gamma_u(b_2) + \varepsilon(q+\varepsilon)\Gamma_u(a) - \varepsilon(q-\varepsilon)\Gamma_u(b);$$

$$\beta_u(\varphi_2) = \gamma_u(1) + \varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}\gamma_u(a_2) + \varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}\gamma_u(b_2) + \varepsilon(q+\varepsilon)\Gamma_u(a,alt)-$$
$$-\varepsilon(q-\varepsilon)\Gamma_u(b,alt);$$

для любого $i = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$

$$\beta_u(\chi_i) = \gamma_u(1) + \varepsilon(q-\varepsilon)\gamma_u(c) + (-1)^i\varepsilon q\gamma_u(a_2) + \varepsilon q\Gamma_u(a,\rho^i);$$

для любого $j = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$

$$\beta_u(\theta_j) = \gamma_u(1) - \varepsilon(q+\varepsilon)\gamma_u(c) - (-1)^j\varepsilon q\gamma_u(b_2) - \varepsilon q\Gamma_u(b,\sigma^j).$$

Доказательство. По формулам

$$\beta_v(\chi) = \frac{1}{\deg\chi}\sum_{x\in X(G)}|x^G|\chi(x)\gamma_v(x) \text{ и}$$

$$\gamma_v(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in \operatorname{Irr}(G)}(\deg\chi)\overline{\chi(x)}\beta_v(\chi)$$

из [6, § 33, (33.9) и (33.11)] получим

$$\begin{pmatrix}\gamma(1)\\ \vdots\\ \gamma\left(b^h\right)\end{pmatrix} = T(G)\cdot\begin{pmatrix}\beta(1_G)\\ \vdots\\ \beta(\theta_h)\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix}\beta(1_G)\\ \vdots\\ \beta\left(\theta_h\right)\end{pmatrix} = S(G)\cdot\begin{pmatrix}\gamma(1)\\ \vdots\\ \gamma\left(b^h\right)\end{pmatrix},$$

где матрицы $T(G)$ и $S(G)$ определены в лемме 1, $h = \frac{q+\varepsilon}{2}-1$. □

3. Центральные элементы целочисленных групповых колец групп $PGL_2(q)$, q нечётно

Далее рассматриваются только целочисленные групповые кольца. Сохраним обозначения и подходы из раздела 2.2. Будем считать, что центр $Z(\mathbf{Z}G)$ целочисленного группового кольца вложен естественным образом в центр $Z(\mathbf{C}G)$ комплексной групповой алгебры. В частности, можно разлагать элементы из $Z(\mathbf{Z}G)$ по базису $E(G)$.

3.1. **Алгебраическая сопряженность.**

Обозначения. *По* [6, § 70] *определяется понятие алгебраической сопряженности характеров. Пусть*

$\operatorname{Irr}(G, alc)$ — *система представителей классов алгебраически сопряжённых характеров,*

$\operatorname{Irr}(\chi, alc)$ — *класс характеров, алгебраически сопряжённых с* χ.

В частности, множество всех неприводимых комплексных характеров группы G

$$\operatorname{Irr}(G) = \bigcup_{\chi \in \operatorname{Irr}(G,alc)} \bigcup_{\xi \in \operatorname{Irr}(\chi,alc)} \xi.$$

Лемма 2 ([2], лемма 1)**.**

1) *Для любых* i *и* n $\quad 1 \leqslant i, n \leqslant \frac{q-\varepsilon-2}{2}$

$$\mathbf{Q}(\chi_i) = \mathbf{Q}(\chi_n) \iff (i, q-\varepsilon) = (n, q-\varepsilon).$$

Здесь, как обычно, $(i, q-\varepsilon)$ *обозначает наибольший общий делитель чисел* i *и* $q-\varepsilon$.

2) *Для любых* j *и* s $\quad 1 \leqslant j, s \leqslant \frac{q+\varepsilon-2}{2}$

$$\mathbf{Q}(\theta_j) = \mathbf{Q}(\theta_s) \iff (j, q+\varepsilon) = (s, q+\varepsilon).$$

Лемма 3 ([2], лемма 2)**.** *Характеры* ψ, φ_1 *и* φ_2 *алгебраически сопряжены только с собой и*

$$\operatorname{Irr}(\psi, alc) = \{\psi\},\ \operatorname{Irr}(\varphi_1, alc) = \{\varphi_1\} \text{ и } \operatorname{Irr}(\varphi_2, alc) = \{\varphi_2\}.$$

Пусть ϕ — теоретико-числовая функция Эйлера.

Лемма 4 ([2], лемма 4)**.** *Пусть* τ — *корень из* 1 *степени* $t \geqslant 3$. *Тогда выполняются следующие условия.*

1) $\mathbf{Q}(\tau^{-1} + \tau) = \mathbf{Q}(\tau) \cap \mathbf{R}$;
2) $\mathbf{Q}(\tau^{-1} + \tau)$ — *расширение Галуа;*
3) *степень расширения* $[\mathbf{Q}(\tau^{-1} + \tau) : \mathbf{Q}] = \dfrac{\phi(t)}{2}$;
4) *любой изоморфизм из* $\mathbf{Q}(\tau^{-1} + \tau)$ *в поле комплексных чисел* $\mathbf{C}$ *является автоморфизмом поля* $\mathbf{Q}(\tau^{-1} + \tau)$, *который индуцируется отображением* $\tau \mapsto \tau^k$ *для* k, *взаимно простого с* t;
5) $\operatorname{Gal}\big(\mathbf{Q}(\tau^{-1} + \tau)\big)$ — *абелева группа порядка* $\dfrac{\phi(t)}{2}$.

Обозначение. *Пусть*

$$\operatorname{del}(n, m) = \{k \mid k \text{ делит } n,\ 1 \leqslant k \leqslant m\},$$

т. е. $\operatorname{del}(n, m)$ — *множество всех положительных делителей числа* n, *не превосходящих* m.

Лемма 5 ([2], лемма 5)**.** *Пусть* ξ — *неприводимый характер группы* G. *Тогда выполняются следующие условия.*

1) *Характеры* ξ *и* χ_i, $i = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$ *алгебраически сопряжены тогда и только тогда, когда для некоторого* $n = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$ *имеем* $\xi = \chi_n$ *и* $(n, q-\varepsilon) = (i, q-\varepsilon)$, *т. е. для* $i \in \operatorname{del}(q-\varepsilon, \frac{q-\varepsilon-2}{2})$

$$\operatorname{Irr}(\chi_i, alc) = \{\chi_n \mid (n, q-\varepsilon) = i,\ 1 \leqslant n \leqslant \tfrac{q-\varepsilon-2}{2}\}.$$

2) *Характеры* ξ *и* θ_j, $j = 1, \dots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$ *алгебраически сопряжены тогда и только тогда, когда для некоторого* $n = 1, \dots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$ *имеем* $\xi = \theta_n$ *и* $(n, q+\varepsilon) = (j, q+\varepsilon)$, *т. е. для* $j \in \operatorname{del}(q+\varepsilon, \frac{q+\varepsilon-2}{2})$

$$\operatorname{Irr}(\theta_j, alc) = \{\theta_n \mid (n, q+\varepsilon) = j,\ 1 \leqslant n \leqslant \tfrac{q+\varepsilon-2}{2}\}.$$

Таким образом, определена система представителей классов сопряженных характеров. Более точно, справедлива следующая лемма.

Лемма 6 ([2], лемма 6)**.** *Следующие характеры алгебраически не сопряжены, а любой другой характер группы* $G = PGL_2(q)$ *сопряжён с одним из указанных:*

$$1_G,\ \psi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \{\chi_i \,\big|\, i \in \operatorname{del}(q-\varepsilon, \tfrac{q-\varepsilon-2}{2})\},\ \{\theta_j \,\big|j \in \operatorname{del}(q+\varepsilon, \tfrac{q+\varepsilon-2}{2})\}.$$

Выясним какие характеры целые или их значения принадлежат $\mathbf{Z}[\sqrt{-d}]$ для целого положительного числа d. Множества значений алгебраически сопряженных характеров совпадают, поэтому достаточно рассматривать только представители алгебраически несопряженных характеров.

Лемма 7. *Пусть* n *— целое положительное число. Тогда*

$$2\cos\frac{2\pi}{n} \text{ — \textit{целое число}} \iff n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

Доказательство. Для целого положительного n

$$2\cos\frac{2\pi}{n} \in \mathbf{Z} \iff 2\cos\frac{2\pi}{n} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \iff \cos\frac{2\pi}{n} \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Далее, $2\pi/n$ положительно, поэтому

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{n} = -1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{2\pi}{n} \in \{-\pi + 2k\pi \mid k \text{ целое положительное}\};\\
\cos\frac{2\pi}{n} = -\frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{2\pi}{n} \in \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \text{ целое положительное}\right\};\\
\cos\frac{2\pi}{n} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{2\pi}{n} \in \left\{-\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \text{ целое положительное}\right\};\\
\cos\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{2\pi}{n} \in \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \text{ целое положительное}\right\};\\
\cos\frac{2\pi}{n} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{2\pi}{n} \in \{2k\pi \mid k \text{ целое положительное}\}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, $2\pi/n$ не превосходит 2π и n является целым числом, поэтому

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{n} = -1 \quad &\Longrightarrow \quad n = 2;\\
\cos\frac{2\pi}{n} = -\frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad n \in \left\{3, \frac{3}{2}\right\} \Longrightarrow n = 3;\\
\cos\frac{2\pi}{n} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{n}{2} \in \left\{2, \frac{2}{3}\right\} \Longrightarrow n = 4;\\
\cos\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{n}{2} \in \left\{3, \frac{3}{5}\right\} \Longrightarrow n = 6;\\
\cos\frac{2\pi}{n} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad n = 1.
\end{aligned}$$

□

Предложение 2.

1) *Характеры 1_G, ψ, φ_1 и φ_2 всегда целые.*
2) *Для любого $i \in \mathrm{del}(q-\varepsilon, \frac{q-\varepsilon-2}{2})$ характер χ_i принимает только действительные значения. Если $q-\varepsilon = i \cdot n$, то*
$$\chi_i \text{ целый} \iff n \in \{3,4,6\};$$
3) *Для любого $j \in \mathrm{del}(q+\varepsilon, \frac{q+\varepsilon-2}{2})$ характер θ_j принимает только действительные значения. Если $q+\varepsilon = j \cdot n$, то*
$$\theta_j \text{ целый} \iff n \in \{3,6\}.$$

Доказательство.

1. Утверждение следует из того, что все значения характеров 1_G, ψ, φ_1, φ_2 в таблице 2 являются целыми числами.
2. Из таблицы 2 и леммы 7 получим
$$\chi_i(a) = 2\varepsilon \cos \frac{2i\pi}{q-\varepsilon} \in \mathbf{Z} \iff n = \frac{q-\varepsilon}{i} \in \{1,2,3,4,6\}.$$
Далее, $n \neq 1$ и $n \neq 2$. Действительно, при $n{=}1$ $i{=}q-\varepsilon$, при $n{=}2$ $i{=}\frac{q-\varepsilon}{2}$, что невозможно, так как $i \leqslant \frac{q-\varepsilon-2}{2} < \frac{q-\varepsilon}{2}$.

   Замечание 3. Все эти числа могут встретиться, например, при $q = 25$.

3. Аналогично доказательству пункта 2 $n \in \{3,4,6\}$. Далее, $q+\varepsilon \equiv 2 \pmod 4$ и $n \mid q+\varepsilon$, поэтому $n \neq 4$.

   Замечание 4. Оба числа могут встретиться, например, при $q = 17$.

□

4. Общие свойства центральных единиц целочисленных групповых колец групп $PGL_2(q)$, q нечётно

В этом разделе будут получены соотношения между различными коэффициентами нормализованной центральной единицы для $G = PGL_2(q)$, q нечетно.

Обозначение. *Обозначим через V нормализованную группу центральных единиц, т. е. таких центральных единиц, что сумма их коэффициентов при разложении по* элементам группы *равна* 1. *Легко понять, что*

1) *группа всех центральных единиц $\mathrm{U}(Z(\mathbf{Z}G)) = \langle -1 \rangle \times V$,*
2) *центральная единица v нормализована (т. е. $v \in V$) тогда и только тогда, когда $\beta_v(1_G) = 1$.*

Лемма 8. *Пусть $v \in V$. Тогда выполняются следующие условия.*

1) $\beta_v(\psi) = 1$.
2) $\beta_v(\varphi_1) = \beta_v(\varphi_2) = 1$;
$$\Gamma_v(a) = \Gamma_v(a, alt), \quad \gamma_v(b_2) + \Gamma_v(b) - \Gamma_v(b, alt) = 0.$$
В частности,
$$\gamma_v(b_2) \text{ — чётное число.}$$

Кроме того,

$$\gamma_v(c) = -\frac{1}{2}(\gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a) + \gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)),$$
$$\gamma_v(1) = 1 - \varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}(\gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a)) + \varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}(\gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)),$$

в частности,

$$\gamma_v(a_2) \text{ — чётное число.}$$

Доказательство. По предложению 1 имеем

$$\beta_v(1_G) = \gamma_v(1) + (q^2-1)\gamma_v(c) + q\frac{q+\varepsilon}{2}\gamma_v(a_2) + q\frac{q-\varepsilon}{2}\gamma_v(b_2) + q(q+\varepsilon)\Gamma_v(a) + \\ + q(q-\varepsilon)\Gamma_v(b),$$
$$\beta_v(\psi) = \gamma_v(1) + (q^2-1)\gamma_v(c) + q\frac{q+\varepsilon}{2}\gamma_v(a_2) - q\frac{q-\varepsilon}{2}\gamma_v(b_2) + \\ + q(q+\varepsilon)\Gamma_v(a, alt) + q(q-\varepsilon)\Gamma_v(b, alt),$$
$$\beta_v(\varphi_1) = \gamma_v(1) + \varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}\gamma_v(a_2) - \varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}\gamma_v(b_2) + \varepsilon(q+\varepsilon)\Gamma_v(a) - \varepsilon(q-\varepsilon)\Gamma_v(b),$$
$$\beta_v(\varphi_2) = \gamma_v(1) + \varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}\gamma_v(a_2) + \varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}\gamma_v(b_2) + \varepsilon(q+\varepsilon)\Gamma_v(a, alt) - \\ - \varepsilon(q-\varepsilon)\Gamma_v(b, alt).$$

1. Заметим, что $\beta_v(1_G) - \beta_v(\psi) \equiv 0 \pmod q$. Поскольку $\beta_v(1_G) = 1$, то и $\beta_v(\psi) = 1$. Кроме того, $\beta_v(1_G) - \beta_v(\psi) = q(q-\varepsilon)\gamma_v(b_2) + q(q+\varepsilon)(\Gamma_v(a) - \Gamma_v(a, alt)) + q(q-\varepsilon)(\Gamma_v(b) - \Gamma_v(b, alt)) = 0$. Поэтому

$$(q-\varepsilon)(\gamma_v(b_2) + \Gamma_v(b) - \Gamma_v(b, alt)) + (q+\varepsilon)(\Gamma_v(a) - \Gamma_v(a, alt)) = 0. \tag{2}$$

2. Из таблицы 2 следует, что $\beta_v(\varphi_1)$ и $\beta_v(\varphi_2)$ могут равняться только ± 1. Учитывая соотношение (2), получим

$$\begin{aligned}\beta_v(\varphi_1) - \beta_v(\varphi_2) &= -\varepsilon(q-\varepsilon)\gamma_v(b_2) + \varepsilon(q+\varepsilon)(\Gamma_v(a) - \Gamma_v(a, alt)) - \\ &- \varepsilon(q-\varepsilon)(\Gamma_v(b) - \Gamma_v(b, alt)) = \\ &= -\varepsilon((q-\varepsilon)(\gamma_v(b_2) + \Gamma_v(b) - \Gamma_v(b, alt)) + \\ &+ (q+\varepsilon)(\Gamma_v(a) - \Gamma_v(a, alt))) + 2\varepsilon(q+\varepsilon)(\Gamma_v(a) - \Gamma_v(a, alt)) = \\ &= -\varepsilon \cdot 0 + 2\varepsilon(q+\varepsilon)(\Gamma_v(a) - \Gamma_v(a, alt)) = \\ &= 2\varepsilon(q+\varepsilon)(\Gamma_v(a) - \Gamma_v(a, alt)).\end{aligned}$$

Так как $q+\varepsilon \equiv 2 \pmod 4$ и $\Gamma_v(a) - \Gamma_v(a, alt)$ является четным числом, то $\beta_v(\varphi_1) - \beta_v(\varphi_2)$ делится на 8. Но $\beta_v(\varphi_1)$ и $\beta_v(\varphi_2)$ равны ± 1, поэтому

$$\beta_v(\varphi_1) = \beta_v(\varphi_2) \text{ и } \Gamma_v(a) = \Gamma_v(a, alt).$$

Тогда из соотношения (2) следует, что $\gamma_v(b_2) + \Gamma_v(b) - \Gamma_v(b, alt) = 0$, в частности,

$$\gamma_v(b_2) \text{ — чётное число.}$$

Положим

$$\delta(a) = \gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a) \text{ и } \delta(b) = \gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b).$$

В этих обозначениях

$$\begin{aligned}\beta_v(1_G) =& \gamma_v(1) + (q^2-1)\gamma_v(c) + q\frac{q+\varepsilon}{2}\delta(a) + q\frac{q-\varepsilon}{2}\delta(b),\\ \beta_v(\varphi_1) =& \gamma_v(1) + \varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}\delta(a) - \varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}\delta(b).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\beta_v(1_G) - \beta_v(\varphi_1) =& (q^2-1)\gamma_v(c) + (q-\varepsilon)\frac{q+\varepsilon}{2}\delta(a) + (q+\varepsilon)\frac{q-\varepsilon}{2}\delta(b) =\\ =& \frac{q^2-1}{2}(2\gamma_v(c) + \delta(a) + \delta(b)).\end{aligned}$$

Получили, что $\beta_v(1_G) - \beta_v(\varphi_1)$ делится на $\frac{q^2-1}{2}$, поэтому

$$\beta_v(1_G) - \beta_v(\varphi_1) \equiv 0 \pmod 2.$$

Это означает, что

$$\beta_v(\varphi_1) = \beta_v(1_G) = 1 \text{ и } \quad 2\gamma_v(c) + \delta(a) + \delta(b) = 0, \text{ т. е.} \tag{3}$$

$$\gamma_v(c) = -\frac{1}{2}(\delta(a) + \delta(b)).$$

Так как $\gamma_v(b_2)$ является четным числом, то $\delta(b) = \gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)$ тоже является четным числом. Тогда из (3) следует, что $\delta(a)$ четно, значит, $\gamma_v(a_2) = \delta(a) - 2\Gamma(a)$ также четно.

Наконец,

$$\begin{aligned}1 = \beta_v(\varphi_1) = \gamma_v(1) + \varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}\delta(a) - \varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}\delta(b),\\ \gamma_v(1) = 1 - \varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}\delta(a) + \varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}\delta(b).\end{aligned}$$

□

Лемма 9. *Пусть $v \in V$. Тогда выполняются следующие соотношения.*

$$\begin{aligned}\gamma_v(1) + \varepsilon(q-\varepsilon)\gamma_v(c) = 1 - q\varepsilon(\gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a)),\\ \gamma_v(1) - \varepsilon(q+\varepsilon)\gamma_v(c) = 1 + q\varepsilon(\gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)).\end{aligned}$$

Доказательство. По предыдущей лемме

$$\begin{aligned}\gamma_v(c) &= -\frac{1}{2}(\gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a) + \gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)),\\ \gamma_v(1) &= 1 - \varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}(\gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a)) + \varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}(\gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\gamma_v(1) + \varepsilon(q-\varepsilon)\gamma_v(c) &= 1 - \varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}(\gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a)) + \varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}(\gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)) -\\ &- \frac{\varepsilon(q-\varepsilon)}{2}(\gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a) + \gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)) =\\ &= 1 - q\varepsilon(\gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a)).\end{aligned}$$

Также получим, что

$$\begin{aligned}\gamma_v(1) - \varepsilon(q+\varepsilon)\gamma_v(c) &= 1 - \varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}(\gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a)) + \varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}(\gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)) +\\ &+ \frac{\varepsilon(q+\varepsilon)}{2}(\gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a) + \gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)) =\end{aligned}$$

$$= 1 + q\varepsilon(\gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)).$$

□

Лемма 10. *Пусть $v \in V$. Тогда для любого $i = 1, \dots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$*

$$\beta_v(\chi_i) = 1 + q\varepsilon\left((-1 + (-1)^i)\gamma_v(a_2) - 2\Gamma_v(a) + \Gamma_v(a, \rho^i)\right).$$

Доказательство. По предложению 1 для любого $i = 1, \dots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$

$$\beta_v(\chi_i) = \gamma_v(1) + \varepsilon(q-\varepsilon)\gamma_v(c) + (-1)^i\varepsilon q\gamma_v(a_2) + \varepsilon q\Gamma_v(a, \rho^i).$$

По лемме 9 $\gamma_v(1) + \varepsilon(q-\varepsilon)\gamma_v(c) = 1 - q\varepsilon(\gamma_v(a_2) + 2\Gamma_v(a))$ и поэтому

$$\begin{aligned}\beta_v(\chi_i) &= 1 - q\varepsilon\gamma_v(a_2) - 2q\varepsilon\Gamma_v(a) + (-1)^i q\varepsilon\gamma_v(a_2) + q\varepsilon\Gamma_v(a, \rho^i) = \\ &= 1 + q\varepsilon(-1 + (-1)^i)\gamma_v(a_2) + q\varepsilon(-2\Gamma_v(a) + \Gamma_v(a, \rho^i)).\end{aligned}$$

□

Лемма 11. *Пусть $v \in V$. Тогда для $n \in \{3, 4, 6\}$ и $i \in \operatorname{del}(q-\varepsilon, \frac{q-\varepsilon-2}{2})$ таких, что $n \cdot i = q - \varepsilon$*

$$\beta_v(\chi_i) = 1.$$

Доказательство. Число $\rho^{-i} + \rho^i = 2\cos\frac{2\pi i}{q-\varepsilon} = 2\cos\frac{2\pi}{n}$ и по лемме 7 является целым при $n \in \{3, 4, 6\}$. Нетрудно понять, что тогда $\rho^{-il} + \rho^{il}$ тоже целое для любого $l = 1, \dots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$. Число $\Gamma_v(a, \rho^i) = \sum_{l=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} (\rho^{-il} + \rho^{il})\gamma_v(a^l)$ и поэтому является целым. По лемме 10 для всех $i = 1, \dots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$

$$\beta_v(\chi_i) = 1 + q\varepsilon\left((-1 + (-1)^i)\gamma_v(a_2) - 2\Gamma_v(a) + \Gamma_v(a, \rho^i)\right).$$

Значит, для всех i, удовлетворяющих условию леммы, $\beta_v(\chi_i)$ — целое. Но $\beta_v(\chi_i) \equiv 1 \pmod q$, поэтому $\beta_v(\chi_i) = 1$. □

Лемма 12. *Пусть $v \in V$. Тогда для любого $j = 1, \dots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$*

$$\beta_v(\theta_j) = 1 + q\varepsilon\left((1 - (-1)^j)\gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b) - \Gamma_v(b, \sigma^j)\right).$$

Доказательство. По предложению 1 для любого $j = 1, \dots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$

$$\beta_v(\theta_j) = \gamma_v(1) - \varepsilon(q+\varepsilon)\gamma_v(c) - (-1)^j\varepsilon q\gamma_v(b_2) - \varepsilon q\Gamma_v(b, \sigma^j).$$

По лемме 9 $\gamma_v(1) - \varepsilon(q+\varepsilon)\gamma_v(c) = 1 + q\varepsilon(\gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b))$, поэтому

$$\begin{aligned}\beta_v(\theta_j) &= 1 + q\varepsilon(\gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b)) - (-1)^j\varepsilon q\gamma_v(b_2) - \varepsilon q\Gamma_v(b, \sigma^j) = \\ &= 1 + q\varepsilon\left((1 - (-1)^j)\gamma_v(b_2) + 2\Gamma_v(b) - \Gamma_v(b, \sigma^j)\right).\end{aligned}$$

□

Лемма 13. *Пусть $v \in V$. Тогда для $n \in \{3, 4, 6\}$ и $j \in \operatorname{del}(q+\varepsilon, \frac{q+\varepsilon-2}{2})$ таких, что $n \cdot j = q + \varepsilon$*

$$\beta_v(\theta_j) = 1.$$

Доказательство. Число $\sigma^{-j}+\sigma^{j}=2\cos\frac{2\pi j}{q+\varepsilon}=2\cos\frac{2\pi}{n}$ и по лемме 7 является целым при $n\in\{3,4,6\}$. Тогда $\sigma^{-jm}+\sigma^{jm}$ тоже целое для любого $m=1,\dots,\frac{q+\varepsilon-2}{2}$. Число $\Gamma_v(b,\sigma^j)=\sum\limits_{m=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}}(\sigma^{-jm}+\sigma^{jm})\gamma_v(b^m)$ и поэтому является целым. По лемме 10 для всех $j=1,\dots,\frac{q+\varepsilon-2}{2}$

$$\beta_v(\theta_j)=1+q\varepsilon\left((1-(-1)^j)\gamma_v(b_2)+2\Gamma_v(b)-\Gamma_v(b,\sigma^j)\right).$$

Значит, для всех j, удовлетворяющих условию леммы, $\beta_v(\theta_j)$ — целое. Но $\beta_v(\theta_j)\equiv 1 \pmod q$, поэтому $\beta_v(\theta_j)=1$. $\square$

Предложение 3. *Пусть $v\in V$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $\gamma_v(1)=1-\varepsilon\frac{q+\varepsilon}{2}(\gamma_v(a_2)+2\Gamma_v(a))+\varepsilon\frac{q-\varepsilon}{2}(\gamma_v(b_2)+2\Gamma_v(b))$.
2) $\gamma_v(c)=-\frac{1}{2}(\gamma_v(a_2)+2\Gamma_v(a)+\gamma_v(b_2)+2\Gamma_v(b))$.
3) $\gamma_v(a_2)=\frac{2\varepsilon}{q(q-\varepsilon)}\big(1+B_v(\chi,alt)\big)$.
4) $\gamma_v(b_2)=\frac{-2\varepsilon}{q(q+\varepsilon)}B_v(\theta,alt)$.
5) *Для любого* $l=1,\dots,\frac{q-\varepsilon-2}{2}$

$$\gamma_v(a^l)=\frac{\varepsilon}{q(q-\varepsilon)}\big(1+(-1)^l+B_v(\chi,\rho^l)\big).$$

6) *Для любого* $m=1,\dots,\frac{q+\varepsilon-2}{2}$

$$\gamma_v(b^m)=\frac{-\varepsilon}{q(q+\varepsilon)}\big(1+(-1)^m+B_v(\theta,\sigma^m)\big).$$

Доказательство. Пункты 1 и 2 доказаны в лемме 8.

3. По предложению 1 и лемме 8 получим

$$\gamma_v(a_2)=\frac{1}{|G|}\big(\beta_v(1_G)+\beta_v(\psi)+q\varepsilon(\beta_v(\varphi_1)+\beta_v(\varphi_2))+2\varepsilon(q+\varepsilon)B_v(\chi,alt)\big)=$$
$$=\frac{1}{|G|}\big(1+1+q\varepsilon(1+1)+2\varepsilon(q+\varepsilon)B_v(\chi,alt)\big)=\frac{2\varepsilon(q+\varepsilon)}{|G|}\big(1+B_v(\chi,alt)\big)=$$
$$=\frac{2\varepsilon}{q(q-\varepsilon)}\big(1+B_v(\chi,alt)\big).$$

4. По предложению 1 и лемме 8 получим

$$\gamma_v(b_2)=\frac{1}{|G|}\big(\beta_v(1_G)-\beta_v(\psi)+q\varepsilon(-\beta_v(\varphi_1)+\beta_v(\varphi_2))-2\varepsilon(q-\varepsilon)B_v(\theta,alt)\big)=$$
$$=\frac{1}{|G|}\big(1-1+q\varepsilon(-1+1)-2\varepsilon(q-\varepsilon)B_v(\theta,alt)\big)=\frac{-2\varepsilon(q-\varepsilon)}{|G|}B_v(\theta,alt)=$$
$$=\frac{-2\varepsilon}{q(q+\varepsilon)}B_v(\theta,alt).$$

5. По предложению 1 и лемме 8 для любого $l=1,\dots,\frac{q-\varepsilon-2}{2}$ получим

$$\gamma_v(a^l)=\frac{1}{|G|}\big(\beta_v(1_G)+(-1)^l\beta_v(\psi)+q\varepsilon(\beta_v(\varphi_1)+(-1)^l\beta_v(\varphi_2))+\varepsilon(q+\varepsilon)B_v(\chi,\rho^l)\big)=$$
$$=\frac{1}{|G|}\big(1+(-1)^l+q\varepsilon(1+(-1)^l)+\varepsilon(q+\varepsilon)B_v(\chi,\rho^l)\big)=$$

$$= \frac{\varepsilon(q+\varepsilon)}{|G|}\bigl(1+(-1)^l+B_v(\chi,\rho^l)\bigr) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{q(q-\varepsilon)}\bigl(1+(-1)^l+B_v(\chi,\rho^l)\bigr).$$

6. По предложению 1 и лемме 8 для любого $m = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$ получим

$$\gamma_v(b^m) = \frac{1}{|G|}\bigl(\beta_v(1_G)+(-1)^m\beta_v(\psi)-q\varepsilon(\beta_v(\varphi_1)+(-1)^m\beta_v(\varphi_2))-\varepsilon(q-\varepsilon)B_v(\theta,\sigma^m)\bigr)$$
$$= \frac{1}{|G|}\bigl(1+(-1)^m-q\varepsilon(1+(-1)^m)-\varepsilon(q-\varepsilon)B_v(\theta,\sigma^m)\bigr) =$$
$$= \frac{-\varepsilon(q-\varepsilon)}{|G|}\bigl(1+(-1)^m+B_v(\theta,\sigma^m)\bigr) =$$
$$= \frac{-\varepsilon}{q(q+\varepsilon)}\bigl(1+(-1)^m+B_v(\theta,\sigma^m)\bigr).$$

□

5. Теорема разложения

Напомним, что через V обозначена нормализованная группа центральных единиц целочисленных групповых колец группы G.

Лемма 14. *Пусть* $A = \bigl\{v \in V \mid \beta_v(\theta_j) = 1$ *для* $j = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}\bigr\}$. *Тогда*

1) A *— подгруппа* V*;*
2) $A = \bigl\{v \in V \mid \gamma_v(b^m) = 0$ *для* $m = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon}{2}\bigr\}$ *(включая* $\gamma_v(b_2)$*).*

Доказательство.

1. Следует из мультипликативности коэффициентов β_v как коэффициентов при минимальных центральных идемпотентах.
2. Положим $A_1 = \bigl\{v \in V \mid \gamma_v(b^m) = 0$ для $m = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon}{2}\bigr\}$. Сначала покажем, что $A \subseteq A_1$. Пусть $v \in A$. Используем выражение для $\gamma_v(b^m)$ из предложения 3 для $m = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$.

$$\gamma_v(b^m) = \frac{-\varepsilon}{q(q+\varepsilon)}\bigl(1+(-1)^m+B_v(\theta,\sigma^m)\bigr) = 0 \iff B_v(\theta,\sigma^m) = -1-(-1)^m.$$

Проверим это. Так как σ — первообразный корень из 1 степени $q+\varepsilon$, то по определению $B_v(\theta,\sigma^m)$ и подгруппы A получим

$$B_v(\theta,\sigma^m) = \sum_{j=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}}(\sigma^{-jm}+\sigma^{jm})\beta_v(\theta_j) = \sum_{j=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}}(\sigma^{-jm}+\sigma^{jm}) =$$
$$= \frac{\sigma^{-m}-\sigma^{-m\frac{q+\varepsilon}{2}}}{1-\sigma^{-m}} + \frac{\sigma^m-\sigma^{m\frac{q+\varepsilon}{2}}}{1-\sigma^m} =$$
$$= \frac{\sigma^{-m}-(-1)^m}{1-\sigma^{-m}} + \frac{\sigma^m-(-1)^m}{1-\sigma^m} = \frac{1-(-1)^m\sigma^m}{\sigma^m-1} + \frac{\sigma^m-(-1)^m}{1-\sigma^m} =$$
$$= \frac{1}{1-\sigma^m}\left(-1+(-1)^m\sigma^m+\sigma^m-(-1)^m\right) =$$
$$= \frac{1}{1-\sigma^m}\left(-1-(-1)^m+\sigma^m((-1)^m+1)\right) =$$
$$= -1-(-1)^m.$$

Используя выражение для $\gamma_v(b_2)$ из предложения 3, получим что

$$\gamma_v(b_2) = \frac{-2\varepsilon}{q(q+\varepsilon)} B_v(\theta, alt) = 0 \iff B_v(\theta, alt) = 0.$$

Проверим это. По определению $B_v(\theta, alt)$ и подгруппы A получим

$$B_v(\theta, alt) = \sum_{j=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}} (-1)^j \beta_v(\theta_j) = \sum_{j=1}^{\frac{q+\varepsilon-2}{2}} (-1)^j.$$

Это число равно 0, так как $\frac{q+\varepsilon-2}{2}$ чётно. Таким образом $A \subseteq A_1$.

Докажем обратное включение. Если $v \in A_1$, то $\gamma_v(b^m) = 0$ для $m = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon}{2}$. Следовательно, для любого $j = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$ по определению $\Gamma_v(b, \sigma^j)$ и $\Gamma_v(b)$ получим, что

$$\Gamma_v(b, \sigma^j) = \Gamma_v(b) = \gamma_v(b_2) = 0.$$

Отсюда по лемме 12 $\beta_v(\theta_j) = 1$ для всех $j = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$. Значит, $A_1 \subseteq A$ и $A = A_1$.

□

Лемма 15. *Пусть* $B = \{v \in V \mid \beta_v(\chi_i) = 1$ *для* $i = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}\}$. *Тогда*

1) B *— подгруппа* V*;*
2) $B = \{v \in V \mid \gamma_v(a^l) = 0$ *для* $l = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon}{2}\}$ *(включая* $\gamma_v(a_2)$*).*

Доказательство.

1. Следует из мультипликативности коэффициентов β_v как коэффициентов при минимальных центральных идемпотентах.
2. Положим $B_1 = \{v \in V \mid \gamma_v(a^l) = 0$ для $l = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon}{2}\}$. Сначала покажем, что $B \subseteq B_1$. Пусть $v \in B$. Используем выражение для $\gamma_v(a^l)$ из предложения 3 для $l = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$.

$$\gamma_v(a^l) = \frac{\varepsilon}{q(q-\varepsilon)} \left(1 + (-1)^l + B_v(\chi, \rho^l)\right) = 0 \iff 1 + (-1)^l + B_v(\chi, \rho^l) = 0.$$

Это и проверим. Так как ρ — первообразный корень из 1 степени $q-\varepsilon$, то по определению $B_v(\chi, \rho^l)$ и подгруппы B получим:

$$\begin{aligned} B_v(\chi, \rho^l) &= \sum_{i=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} (\rho^{-il} + \rho^{il}) \beta_v(\chi_i) = \sum_{i=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} (\rho^{-il} + \rho^{il}) = \\ &= \frac{\rho^{-l} - \rho^{-l\frac{q-\varepsilon}{2}}}{1-\rho^{-l}} + \frac{\rho^l - \rho^{l\frac{q-\varepsilon}{2}}}{1-\rho^l} = \frac{\rho^{-l} - (-1)^l}{1-\rho^{-l}} + \frac{\rho^l - (-1)^l}{1-\rho^l} = \\ &= \frac{1 - (-1)^l \rho^l}{\rho^l - 1} + \frac{\rho^l - (-1)^l}{1-\rho^l} = \\ &= \frac{1}{1-\rho^l} \left(-1 + (-1)^l \rho^l + \rho^l - (-1)^l\right) = \\ &= \frac{1}{1-\rho^l} \left(-1 - (-1)^l + \rho^l((-1)^l + 1)\right) = \\ &= -1 - (-1)^l. \end{aligned}$$

Используя выражение для $\gamma_v(a_2)$ из предложения 3, получим что

$$\gamma_v(a_2) = \frac{2\varepsilon}{q(q-\varepsilon)}(1 + B_v(\chi, alt)) = 0 \iff B_v(\chi, alt) = -1.$$

Проверим это. По определению $B_v(\chi, alt)$ и подгруппы B имеем

$$B_v(\chi, alt) = \sum_{i=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} (-1)^i \beta_v(\chi_i) = \sum_{i=1}^{\frac{q-\varepsilon-2}{2}} (-1)^i.$$

Это число равно -1, так как $\frac{q-\varepsilon-2}{2}$ нечетно. Таким образом $B \subseteq B_1$.

Докажем обратное включение. Если $v \in B_1$, то $\gamma_v(a^l) = 0$ для $l = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon}{2}$. Следовательно, для любого $i = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$ по определению $\Gamma_v(a, \rho^i)$ и $\Gamma_v(a)$ получим, что

$$\Gamma_v(a, \rho^i) = \Gamma_v(a) = \gamma_v(a_2) = 0.$$

Отсюда по лемме 10 $\beta_v(\chi_i) = 1$ для всех $i = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}$. Значит, $B_1 \subseteq B$ и $B = B_1$.

□

Теорема 1. *При введённых в леммах 14 и 15 обозначениях группа V равна прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Рассмотрим пересечение $A \cap B$. Имеем

$$A \cap B = \left\{ v \in V \mid \beta_v(\chi_i) = \beta_v(\theta_j) = 1 \text{ для } i = 1, \ldots, \tfrac{q-\varepsilon-2}{2} \text{ и } j = 1, \ldots, \tfrac{q+\varepsilon-2}{2} \right\}.$$

В силу леммы 8 для $v \in A \cap B$ все коэффициенты $\beta_v = 1$. Поэтому $A \cap B = 1$. Следовательно, $A \cdot B = A \times B \subseteq V$.

Для доказательства обратного включения возьмем произвольный элемент $u \in V$. Определим элемент v из центра комплексной групповой алгебры группы G следующим образом. Положим для любого $j = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$ $\beta_v(\theta_j) = \beta_u(\theta_j)$, а все остальные коэффициенты при минимальных центральных идемпотентах положим равными 1, в том числе $\beta_v(\chi_i) = 1$. Ясно, что это обратимый элемент. Проверим, что этот элемент из V.

В самом деле, $\gamma_v(b^m) = \gamma_u(b^m)$ для любого $m = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$ и по п.6 предложения 3 $\gamma_v(b^m)$ — целые числа. По лемме 15 $\gamma_v(a^l) = 0$ для любого $l = 1, \ldots, \frac{q-\varepsilon}{2}$. Тогда по лемме 8 получим, что $\gamma_v(c) = -\frac{\gamma_v(b_2)}{2} - \Gamma_v(b)$ и $\gamma_v(b_2)$ является четным числом. Значит, $\gamma_v(c)$ — целое. Таким образом, $v \in V$ и даже $v \in B$ по определению B.

Рассмотрим элемент $w = uv^{-1}$. Очевидно, что $w \in V$. Для любого $j = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2}$ $\beta_w(\theta_j) = 1$ из-за мультипликативности коэффициентов $\beta_w(\theta_j)$, поэтому $w \in A$. Отсюда $u = (uv^{-1})v \in A \cdot B = A \times B$ и $V \subseteq A \times B$. Итак, $V = A \times B$. □

6. Ранги

Обозначение. *Обозначим $\nu(s)$ — количество целых положительных делителей целого числа s.*

Лемма 16. *Пусть $A = \left\{ v \in V \mid \beta_v(\theta_j) = 1 \text{ для } j = 1, \ldots, \frac{q+\varepsilon-2}{2} \right\}$. Тогда ранг подгруппы A вычисляется по формуле*

$$rank(A) = \frac{q-\varepsilon}{2} - \nu(q-\varepsilon) + 1.$$

Доказательство. Пусть $i \mid q-\varepsilon$ для $1 \leqslant i \leqslant \frac{q-\varepsilon}{2}-1$. Тогда ρ^i — первообразный корень из 1 степени $n = \frac{q-\varepsilon}{i}$ и $\mathbb{Q}(\chi_i) = \mathbb{Q}(\rho^{-i}+\rho^i)$. По пункту 3 леммы 4 степень расширения $[\mathbb{Q}(\rho^{-i}+\rho^i):\mathbb{Q}] = \frac{\phi(n)}{2}$.

Положим $d_i = \frac{q-\varepsilon}{(i,q-\varepsilon)}$. Тогда по теореме Дирихле [5, гл. 2, разд. 4, теор. 5]

$$rank(U(I(\mathbb{Q}(\chi_i)))) = \frac{\phi(d_i)}{2} - 1.$$

Если $d_i = 1$, то $q-\varepsilon = (i, q-\varepsilon)$. Но $i \leqslant \frac{q-\varepsilon}{2} - 1 < \frac{q-\varepsilon}{2}$, т. е. это невозможно. Если $d_i = 2$, то $\frac{q-\varepsilon}{2} = (i, q-\varepsilon)$. Но $i < \frac{q-\varepsilon}{2}$, т. е. это также невозможно.

$$\begin{aligned} rank(A) &= \sum_{i|q-\varepsilon,\, i\leqslant \frac{q-\varepsilon}{2}-1} rank(U(I(\mathbb{Q}(\chi_i)))) = \sum_{d|q-\varepsilon,\, d\leqslant \frac{q-\varepsilon}{2}-1} (\frac{\phi(d)}{2} - 1) = \\ &= \sum_{d|q-\varepsilon} (\frac{\phi(d)}{2} - 1) - (\frac{\phi(1)}{2} - 1) - (\frac{\phi(2)}{2} - 1) = \sum_{d|q-\varepsilon} (\frac{\phi(d)}{2} - 1) + 1 = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{d|q-\varepsilon} \phi(d) - \nu(q-\varepsilon) + 1 = \\ &= \frac{q-\varepsilon}{2} - \nu(q-\varepsilon) + 1. \end{aligned}$$

□

Лемма 17. *Пусть* $B = \left\{v \in V \mid \beta_v(\chi_i) = 1 \text{ для } i = 1, \dots, \frac{q-\varepsilon-2}{2}\right\}$. *Тогда ранг подгруппы* B *вычисляется по формуле*

$$rank(B) = \frac{q+\varepsilon}{2} - \nu(q+\varepsilon) + 1.$$

Доказывается аналогично лемме 16.

Теорема 2. *Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец групп* $PGL_2(q)$, q *нечетно, вычисляется по формуле*

$$rank(U(Z(\mathbb{Z}G))) = q + 2 - \nu(q-1) - \nu(q+1).$$

Доказательство. По теореме 1 $U(Z(\mathbb{Z}G)) = \langle -1 \rangle \times A \times B$. Используя леммы 16 и 17, получим что

$$\begin{aligned} rank(U(Z(\mathbb{Z}G))) &= rank(A) + rank(B) = \frac{q-\varepsilon}{2} - \nu(q-\varepsilon) + \frac{q+\varepsilon}{2} - \nu(q+\varepsilon) + 2 = \\ &= q + 2 - \nu(q-1) - \nu(q+1). \end{aligned}$$

□

Замечание 5. Обозначим $rank(U(Z(\mathbb{Z}G))) = r(q)$. Тогда по теореме 2 получим начальные значения рангов $r(q)$.

q	3	5	7	9	11	13	17	19	23	25
$r(q)$	0	0	1	3	3	5	8	9	13	15

Следствие 1. *Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы* $PGL_2(q)$, *где* q *нечетно, тривиальна тогда и только тогда, когда* $q = 3$ *или* $q = 5$.

Доказательство. Из таблицы 2 следует, что $rank(A) = rank(B) = 0$ в том и только том случае, когда оба числа $2\cos\dfrac{2\pi}{q-\varepsilon}$ и $2\cos\dfrac{2\pi}{q+\varepsilon}$ являются целыми. Число $2\cos\dfrac{2\pi}{q\pm\varepsilon}$ является целым только при $q\pm 1 = 1, 2, 3, 4, 6$, т. е. при $q \leqslant 5$. Тогда по замечанию 5 $q = 3$ или $q = 5$. □

7. Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PGL_2(7)$

Впервые группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PGL_2(q)$ нетривиальна при $q = 7$. Таблица характеров группы $G = PGL_2(7)$ получается из таблицы 2 при $q = 7$ и изображена в таблице 5.

При $q = 7$ $\varepsilon = -1$, $\dfrac{q-\varepsilon}{2} - 1 = \dfrac{7+1}{2} - 1 = 3$, $\dfrac{q+\varepsilon}{2} - 1 = \dfrac{7-1}{2} - 1 = 2$, $|G| = 7\cdot(7^2-1) = 336$, $\rho = \cos\dfrac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\dfrac{\pi}{4}$.

Таблица 5. Таблица характеров группы $PGL_2(7)$

g	1	c	a_2	b_2	a	a^2	a^3	b	b^2
$\lvert C_G(g)\rvert$	336	7	16	12	8	8	8	6	6
$\lvert g^G\rvert$	1	48	21	28	42	42	42	56	56
1_G	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ψ	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
φ_1	7	0	-1	1	-1	-1	-1	1	1
φ_2	7	0	-1	-1	1	-1	1	-1	1
χ_1	6	-1	2	0	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	0
χ_2	6	-1	-2	0	0	2	0	0	0
χ_3	6	-1	2	0	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	0
θ_1	8	1	0	-2	0	0	0	1	-1
θ_2	8	1	0	2	0	0	0	-1	-1

Теорема 3. *Пусть U — группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PGL_2(7)$. Тогда*

$$U = \langle -1\rangle \times \langle v\rangle, \text{ где}$$

$$v = 4201y(1) - 700y(c) + 1400y(a_2) - 990y(a) + 990y(a^3).$$

Доказательство. Обозначим через V нормализованную группу центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PGL_2(7)$. По теореме 2 $rank(V) = 1$. Разложим произвольный элемент $v \in V$ с коэффициентами γ_v по базису из классовых сумм

$$Y(G) = \left\{y(1), y(c), y(a_2), y(b_2), y(a), y(a^2), y(a^3), y(b), y(b^2)\right\},$$

и с коэффициентами β_v по базису из минимальных центральных идемпотентов

$$E(G) = \{e(1_G), e(\psi), e(\varphi_1), e(\varphi_2), e(\chi_1), e(\chi_2), e(\chi_3), e(\theta_1), e(\theta_2)\}.$$

По таблице 5 получим, что

$$\beta_v(1_G) = \beta_v(\psi) = \beta_v(\varphi_1) = \beta_v(\varphi_2) = \beta_v(\chi_2) = \beta_v(\theta_1) = \beta_v(\theta_2) = 1,$$

а коэффициенты

$$\beta_v(\chi_1),\ \beta_v(\chi_3) \in U(\mathbb{Z}[\rho]) \cap \mathbb{R} = (\langle\rho\rangle \times \langle 1+\sqrt{2}\rangle) \cap \mathbb{R} = \langle -1\rangle \times \langle 1+\sqrt{2}\rangle$$

и сопряжены, т. е.

$$\beta_v(\chi_1) = \pm(1+\sqrt{2})^m,\ \beta_v(\chi_3) = \pm(1-\sqrt{2})^m$$

для некоторого целого m. Пусть $(1+\sqrt{2})^m = a_m + b_m\sqrt{2}$ для некоторых целых a_m, b_m. Нетрудно понять, что

$$\begin{cases} a_{m+2} = 2a_{m+1} + a_m, \\ b_{m+2} = 2b_{m+1} + b_m. \end{cases}$$

Используя эти реккурентные формулы, найдем такое m, что $a_m \equiv 1 \pmod 7$, $b_m \equiv 0 \pmod 7$.

m	0	1	2	3	4	5	6
a_m	1	1	3	0	3	6	1
b_m	0	1	2	5	5	1	0

Получили, что нужное m с точностью до знака кратно 6. Значит,

$$\beta_v(\chi_1) = (-1)^s(1+\sqrt{2})^{6k}, \beta_v(\chi_3) = (-1)^s(1-\sqrt{2})^{6k}$$

для некоторого целого k и $s = 0$ или $s = 1$.

Значения $k = 1$, $s = 0$ и $k = 1$, $s = 1$ не подходят, так как коэффициент $\gamma_v(a_2)$ в этом случае не является целым или не является четным числом. Возьмем $k = 2$, $s = 0$. Тогда

$$\beta_v(\chi_1) = (1+\sqrt{2})^{12} = 19601 + 13860\sqrt{2},$$
$$\beta_v(\chi_3) = (1-\sqrt{2})^{12} = 19601 - 13860\sqrt{2}.$$

По предложению 3 получим, что $\gamma_v(a_2) = 1400$, $\gamma_v(a) = -990$, $\gamma_v(a^2) = 0$, $\gamma_v(a^3) = 990$, $\gamma_v(c) = -700$, $\gamma_v(1) = 4201$. Поэтому

$$v = 4201y(1) - 700y(c) + 1400y(a_2) - 990y(a) + 990y(a^3).$$

□

Список литературы

[1] Алеев Р.Ж., Митина О.В., *Теория центральных единиц целочисленных групповых колец групп $PSL_2(q)$, q нечетно*, Ред. Челяб. гос. ун-та. Деп. ВИНИТИ 1462-В2005, 11.11.05, 63 с.

[2] Алеев Р.Ж., Перавина О.В., *Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец групп PSL(2,q), q нечётно*, Вестник Челяб. ГУ, серия “Математика. Механика”,1(4) (1999), 5–15.

[3] Белоногов В.А., *Представления и характеры в теории конечных групп*, Свердловск, 1990, 378 с.

[4] Белоногов В.А., *О малых взаимодействиях в конечных группах*, Труды Института Математики и Механики, УрО РАН, **2** (1992), 3–18.

[5] Боревич З.И., Шафаревич И.Р., *Теория чисел*, М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1985, 504 с.

[6] Кэртис Ч., Райнер И., *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1969, 668 с.

[7] Aleev R. Ž., *Higman's central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers*, Intern. J. Algebra and Computations, **4**: 3 (1994), 309–358.
[8] Li Y., Parmenter M.M., *Central units of the integral group ring* $\mathbb{Z}A5$, Proc. Amer. Math. Soc., **25**: 1 (1997), 61–65.
[9] Higman G., *The units of group rings*, Proc. London Math. Soc., **46** (1940), 231–248.

Рифхат Жалялович Алеев
Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина 76,
454080, Челябинск, Россия
E-mail address: aleev@csu.ru

Ольга Викторовна Митина
Челябинский государственный университет,
ул. Бр.Кашириных 129,
454021, Челябинск, Россия
E-mail address: ovm@csu.ru