S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 647–651 (2008) УДК 517.9, 519.6
MSC 35B45, 35A07, 35L20, 35B60, 49J20, 45A05, 65F22

О ДВУХ ЗАДАЧАХ

Г. В. ДЯТЛОВ

Abstract. We discuss two different problems. The first is approximate boundary controllability for a hyperbolic integraodifferential equation. And the second is the problem of measuring the light-scattering pattern in flow cytometry.

Keywords: boundary controllability, integro-differential equation, flow cytometry, regularization

1. Единственность продолжения и управляемость для гиперболического уравнения с памятью

Важным свойством дифференциального оператора является свойство единственности продолжения и связанное с ним свойство управляемости. Пусть P — дифференциальный оператор, а Γ — гиперповерхность, которая разделяет область Ω на две части $\Omega_\pm$. Оператор P обладает *свойством единственности продолжения через* Γ, если равенства $Pu = 0$, $u \in C_0^\infty$, и $u = 0$ в Ω_- влекут $u = 0$ в Ω_+ вблизи Γ.

Обычно это свойство доказывается при помощи тех или иных весовых оценок карлемановского типа. В настоящее время такие оценки доказаны для широкого круга операторов (см. [1]). Появление таких оценок с псевдодифференциальным весом около 15 лет назад позволило получить свойство единственности продолжения в ряде новых ситуаций, в частности для гиперболических

Dyatlov, G.V., On two problems.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №48.

Поступила 1 сентября 2008 г., опубликована 30 ноября 2008 г.

операторов с аналитическими по времени коэффициентами и нехарактеристических поверхностей (см. [2, 3]).

Пусть $T > 0$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\Sigma = \partial\Omega \times [0,T]$, ν — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$. Предположим, что P — оператор второго порядка гиперболический по t. Определим области $Q^T := \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t \in [0,T],\ \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < T - t\}$ и $\Omega^T = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < T\}$, где расстояние определяется главной частью P. При малых T область $Q^T \cap \{t = 0\}$ — окрестность $\partial\Omega$, а при больших T совпадает с Ω.

Задача. Предположим, что $u(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$, удовлетворяет условиям

$$Pu = 0 \quad \text{в } \Omega \times [0,T], \qquad u\big|_\Sigma = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Sigma = 0, \qquad u(x,0) = 0 \quad \text{в } \Omega^T.$$

Доказать, что $u = 0$ в Q^T, и следовательно $u_t(x,0) = 0$ при $x \in \Omega^T$.

В случае, когда коэффициенты P не зависят от t, данная задача решается стандартными методами (см. [4]) с использованием нечетного продолжения по t и применением результатов [2].

Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях на область удается доказать аналогичный результат для класса уравнений с коэффициентами, зависящими от t, и сверточным членом. Рассмотрим уравнение

$$Pu = u_{tt} - \Delta u + \langle b(x,t), u' \rangle + a(x,t)u + \int_0^t k(x,t-s)u(x,s)\,ds = 0$$

в области $Q := \Omega \times [0,T]$, где $\langle b(x,t), u' \rangle = \sum_{j=1}^n b_j(x,t)u_{x_j} + b_{n+1}(x,t)u_t$. Пусть расстояние в определении Ω^T определяется в евклидовой метрике $ds = |dx|$.

Теорема. *Предположим, что Ω выпукла, $a(x,t)$ и $b(x,t)$ — функции класса C^∞ по всем переменным вещественно аналитические по t в окрестности $\overline{Q}$, а $k(x,t)$ — непрерывная функция в $\overline{Q}$. Пусть u — классическое решение задачи*

$$Pu = u_{tt} - \Delta u + \langle b(x,t), u' \rangle + a(x,t)u + \int_0^t k(x,t-s)u(x,s)\,ds = 0 \quad \text{в } Q,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = g, \quad u\big|_\Sigma = 0,$$

с $g \in C_0^\infty(\Omega)$. Если $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\Sigma = 0$ то $g = 0$ в Ω^T.

Доказательство разбивается на два этапа [5]. На первом, используя обычные весовые оценки, мы показываем, что $u = 0$ в $\Omega^{\varepsilon_1} \times [0, \varepsilon_2]$, с некоторыми положительными ε_1 и ε_2. Здесь существенно используется выпуклость области Ω. На втором шаге, используя весовые оценки с псевдодифференциальным весом (см. [2]), мы показываем, что $u = 0$ всюду над Ω^{ε_1} вплоть до характеристической поверхности, т. е. в области

$$Q^{\varepsilon_1} := \{(x,t) \mid x \in \Omega^{\varepsilon_1},\ 0 < t < T - \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\}.$$

Сделав эти два шага, мы получаем аналогичную задачу уже в меньшей области, и повторяя рассуждения, приходим к заключению теоремы.

Хорошо известно (см., например, [6, 7]), что для гиперболических операторов свойство единственности продолжения через времяниподобную поверхность тесно связано со свойством граничной управляемости. Последнее играет важную роль в различных задачах для дифференциальных уравнений. В частности оно является краеугольным камнем так-называемого метода граничного управления, предложенного Белишевым для решения динамических обратных задач (см. [4])

2. Измерение двумерной индикатрисы светорассеяния в проточной цитометрии

В последние десятилетия, в связи с развитием вычислительной техники, появилась возможность изучать малые частицы (клетки крови и т. п.) по данным светорассеяния. Такой подход предполагает математическое моделирование процесса, а затем решение обратной задачи рассеяния. В случае отдельной малой частицы к известным трудностям, связанным с решением обратной задачи, добавляются еще технические сложности измерения данных рассеяния, вызванные малостью частицы.

Проточный сканирующий цитометр описанный в [8] позволяет получать достаточно богатую информацию о свете, рассеянном частицей. Однако, схема измерения предполагает интегрирование индикатрисы рассеяния по азимутальному углу, что приводит к потере информации в случае несферических частиц. Предлагается модификация цитометра, позволяющая измерять индикатрису рассеяния как функцию двух переменных.

Оптическая схема состоит из кварцевого капилляра с одним отражающим сферическим концом и одним плоским, лазера и светочувствительного экрана (рис. 1). Частица P располагается на оптической оси на расстоянии t, $0 < t < R$, от левого конца E и рассеивает падающий свет от лазера во всевозможных направлениях. Рассмотрим луч, выходящий из точки P под углом θ к оси OE и азимутальным углом φ. После преломлений и отражений луч попадает на экран в некоторой точке F, удаленной от оси на расстояние r.

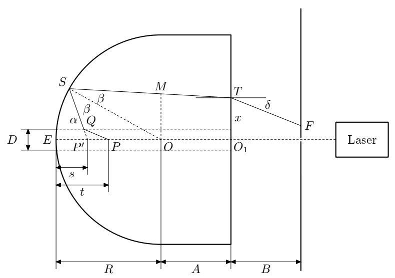


Рис. 1.

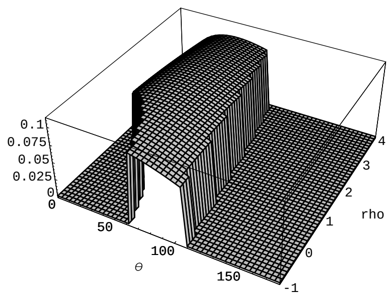


Рис. 2

Используя известные законы отражения и преломления, можно найти связь между параметрами луча t, θ, r и получить зависимость $t(\theta, r)$, которая имеет однозначный характер (подробнее см. [9]).

Зная геометрию лучей, мы хотим восстановить интенсивность света рассеянного частицей во всевозможных направлениях за определенный промежуток времени по интенсивности света попавшего на экран.

Обозначим индикатрису рассеяния через $s(\theta, \varphi)$, а интенсивность света, попавшего на экран в точку с координатами r, φ за промежуток времени $[t_{\min}, t_{\max}]$ через $\sigma(r, \varphi)$. Наша задача — восстановить $s(\theta, \varphi)$ по $\sigma(r, \varphi)$, известной при $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Из закона сохранения энергии получается следующая интегральная зависимость между $s(\theta, \varphi)$ и $\sigma(r, \varphi)$:

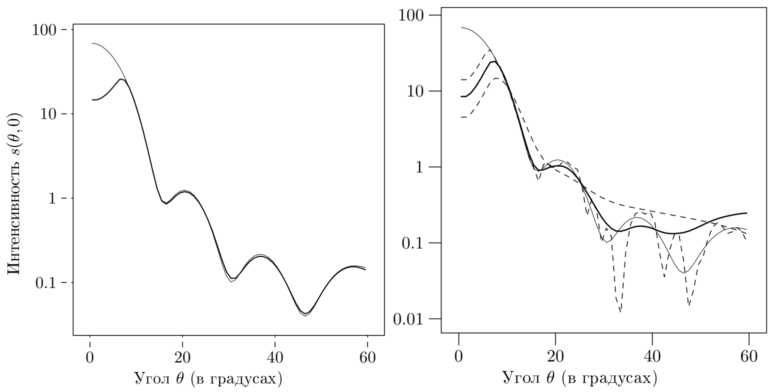
$$(Ks)(r, \theta) = -\int_{\theta_{\min}(r)}^{\theta_{\max}(r)} t_r(\theta, r) \sin\theta s(\theta, \varphi)\, d\theta = \sigma(r, \theta) r, \qquad (*)$$

где $\theta_{\min}(r)$, $\theta_{\max}(r)$ — минимальный и максимальные возможные углы θ, при которых луч с параметрами θ, $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ может попасть в точку (r, φ). Ядро интегрального оператора K изображено на рис. 2.

Для решения интегрального уравнения использовался стандартный метод регуляризации (см. [10]).

В качестве точного решения брался элемент $S_{11}(\theta, \varphi)$ матрицы Мюллера для разных малых частиц (при фиксированном φ).

На рис. 3 представлены результаты для сфероида с показателем преломления 1,5 (показатель преломления среды равен 1,333), отношением полуосей 0,5, относительным размером 1,5. Частица была наклонена к оптической оси под углом 45°. На рис. 3(a) правая часть $\sigma(r, \varphi)$, $\varphi = 0$, задана точно, а на рис. 3(b) — с 1% ошибкой. Жирной линией изображено оптимальное решение, тонкой линией — точное, а пунктиром — приближенные решения при больших или меньших параметрах регуляризации α.



(a) (b)

Рис. 3.

Список литературы

[1] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag, Berlin, 1963.

[2] D. Tataru, *Unique continuation for solutions to PDE's; between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem*, Comm. PDE **20** (1995), 855–884.

[3] D. Tataru, *Unique continuation for operators with partially analytic coefficients*, J. Math. Pures & Appl. **78** (1999), 505–521.

[4] M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)*, Inverse Problems **13** (1997), R1–R45.

[5] A. L. Bukhgeim, G. V. Dyatlov, and G. Uhlmann, *Unique continuation for hyperbolic equations with memory*, J. Inv. Ill-Posed Problems **15** (2007), 587–598.

[6] D. L. Russell, *Boundary value control theory of the higher-dimensional wave equation*, SIAM J. Control **9** (1971), 29–42.

[7] D. L. Russell, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations*, *SIAM Rev.* **20** (1978), 639–739.

[8] V. P. Maltsev and K. A. Semyanov, Characterization of Bio-Particles from Light Scattering, (Inverse and Ill-Posed Problems Series, VSP, Utrecht, 2004)

[9] G. V. Dyatlov, K. V. Gilev, K. A. Semyanov, and V. P. Maltsev, The Scanning Flow Cytometer Modified for Measurement of Two-Dimensional Light-Scattering Pattern of Individual Particles *Meas. Sci. Technol.* **19** (2008) (015408).

[10] A. N. Tikhonov and V. A. Arsenin, *Solutions of Ill-posed Problems*. Winston & Sons, Washington, 1977.

Глеб Владимирович Дятлов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: dyatlov@math.nsc.ru