S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 549–580 (2008) УДК 517.9
MSC 35R30

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Е. АНИКОНОВ, Н.Л. АБАШЕЕВА, Н.Б. АЮПОВА,
А.И. КОЖАНОВ, М.В. НЕЩАДИМ, И.Р. ВАЛИТОВ

Abstract. We discuss some inverse problems for evolution equations. The theorems of existence and uniqueness are formulated.

Keywords: inverse problems, evolution equations

В настоящее время происходит интенсивное развитие теории и приложений обратных задач для эволюционных и других уравнений. Появляются новые постановки обратных задач, развивается теория нового математического моделирования, создаются численные алгоритмы и их практическая реализация.

Понятия прямая, обратная задача восходит к временам Ньютона, Декарта. В общем философском плане по заключению Декарта обратные и прямые задачи обусловлены в причинно-следственной связи своеобразным распределением ролей. Обратные задачи связаны непосредственно с поиском причин при известных следствиях, а прямые наоборот с выводом следствий при известных причинах. Например, обратные задачи для дифференциальных уравнений заключаются в поиске главным образом коэффициентов рассматриваемых уравнений при наличии той или иной подходящей информации. В прямых же задачах коэффициенты считаются известными. Такая общая философская постановка вопроса о прямых и обратных задач в причинно-следственных отношениях оказывает существенное влияние на способы и идеологии

Anikonov, Yu.E., Abasheeva, N.L., Ayupova, N.B., Kozhanov, A.I., Neshchadim, M.V., Valitov, I.R. Inverse problems for evolution equations.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 48.

Поступила 1 июля 2008 г., опубликована 27 ноября 2008 г.

исследования прямых и обратных задач. При этом эти идеологии исследования часто прямо противоположны. И дело не только в том, что искомое в обратной задаче является известным в прямой, а в более глубоком. Весьма часто возникает необходимость менять на противоположные и действия при исследованиях, например, если в прямой задаче возникает необходимость упрощения чего-либо, что в обратной задаче — усложнение, в прямой задаче — расширение, в обратной — сужение и т.п.

По своей математической сущности обратные задачи для дифференциальных уравнений близки задачам гидродинамики и газовой динамики. В частности математические проблемы, связанные с системой уравнений Навье-Стокса можно рассматривать с точки зрения теории обратных задач, так как функция давления, входящая в качестве градиента в эту систему, считается искомой.

Аналогичная ситуация и в теории распознавания образов, в которой фактически в основном изучаются обратные задачи в дискретной постановке, различаются направления, связанные с искусственными и естественными проблемами распознавания. В частности считается, что проблемы распознавания химических соединений или музыкальных нот — это искусственные проблемы, а диагностика болезней — это проблемы естественные.

Общие принципы, положения, проблематики, которыми обусловлено появление обратных задач заключаются в следующем:

(1) Определение причин по следствиям.
(2) Проблемы управления, в частности проблемы перевода субстанций из одного состояния в другое.
(3) Диагностика.
(4) Восстановление истории явлений.
(5) Моделирование и поиск источников полей.
(6) Определение внутренней структуры объектов.
(7) Распознавание образов и идентификация.
(8) Создание новых математических моделей и на этой основе создание новых методов компьютерного моделирования.
(9) Принятие решений.

Конкретными обратными задачами математической физики, которые оказали и оказывают влияние на предмет теории и приложений, являются:

(1) Обратная задача определения гравитационных сил в двумерной системе уравнений Ньютона на основе законов Кеплера.
(2) Обратная кинематическая задача сейсмики - определения скорости продольных волн по временному годографу.
(3) Обратные задачи теории потенциала.
(4) Обратные задачи теории рассеяния.
(5) Томография.

Обратные задачи являются линейными и нелинейными, одномерными и многомерными в зависимости от того, являются ли искомые функции одного переменного или многих. Многомерные обратные задачи часто некорректно поставлены в классическом смысле, особенно когда информация обратной задачи задается не на всей, а на части границы рассматриваемой области. Именно к таким проблемам приводят практические задачи.

При этом принципиально важен вопрос: какова должна быть минимальная информация, делающая обратную задачу математически определенной?

В настоящее время исследования обратных задач ведутся в основном в трех направлениях:

Единственность и устойчивость,

Численная реализация,

Существование и алгоритмы поиска решений обратных задач.

Значительный интерес для теории и приложений представляют конструктивные методы и результаты, в частности формулы обращения, аналитические представления и другие. В этой связи хочется напомнить, какую важную роль сыграли формулы Герглотца и Радона в проблемах сейсмической и медицинской томографии.

Нижеприведенные результаты опубликованы в работах [1] – [9]. Материал содержит три раздела по теории обратных задач:

(1) Прямые и обратные задачи для операторно-дифференциальных уравнений;
(2) Представление решений и коэффициентов эволюционных уравнений;
(3) Тождества и их применение к обратным задачам для кинетических уравнений.

1. Прямые и обратные задачи для операторно-дифференциальных уравнений

В данном разделе излагаются результаты, полученные при изучении прямых и обратных задач для операторно-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим краевые задачи для уравнений

$$Au_t + Bu = f(x,t)$$

в случае операторов A и B второго и четвертого порядков соответственно в многомерной ситуации.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $a^{ij}(x)$, $b^{ij,k}(x)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $k = 1,2$, $a(x)$, $b(x)$ и $f(x,t)$ — заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$ функции, A, B_1 и B_2 — операторы, заданные равенствами

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right) + a_0(x)u, \quad B_k u = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b^{ij,k}(x)u_{x_j}\right), \quad k = 1,2,$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n), $\nu_x = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ — вектор внутренней нормали к границе Γ в текущей точке x.

Целью является исследование разрешимости начально-краевых задач для уравнения

$$Lu \equiv Au_t - B_1B_2u + b(x)u = f(x,t) \tag{1}$$

в некоторых специальных случаях с вырождением. Результаты исследования необходимы при изучении обратных задач для данного типа уравнений.

Первый проанализированный нами случай соответствует эллиптическому оператору B_2, эллиптико-параболическому оператору B_1, эллиптическому на множестве Γ, и эллиптико-параболическому оператору A.

Будем считать, что условие *эллиптико-параболичности* операторов A и B_1 выполняется в следующем виде: существуют неотрицательные на множестве $\overline{\Omega}$ функции $\alpha^i(x)$ и $\beta^{i,1}(x)$ такие, что при $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$0 \le \alpha^i(x)\xi_i^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le m_0\alpha^i(x)\xi_i^2, \quad m_0 \ge 0; \tag{2}$$

$$0 \le \beta^{i,1}(x)\xi_i^2 \le b^{ij,1}(x)\xi_i\xi_j \le m_1\beta^{i,1}(x)\xi_i^2, \quad m_1 \ge 0. \tag{3}$$

Определим функции $c^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$:

$$c^{ij}(x) = b^{jk,1}_{x_l}(x)b^{il,2}_{x_k}(x) - \frac{1}{2}\left(b^{ij,1}_{x_k}(x)b^{kl,2}\right)_{x_l} - \frac{1}{2}\left(b^{kl,1}(x)b^{ij,2}_{x_k}(x)\right)_{x_l},$$

и пусть c_0 есть такое число, для которого при $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|c^{ij}(x)\xi_i\xi_j| \le c_0|\xi|^2.$$

Всюду ниже под решением первой краевой задачи для уравнения (1) (точную постановку см. ниже) мы будем понимать обобщенное решение, определяющееся интегральным тождеством

$$\int\limits_Q Au_t v\,dx\,dt - \int\limits_Q B_2uB_1v\,dx\,dt = \int\limits_Q fv\,dx\,dt,$$

в котором $v(x,t)$ есть функция класса $C^4(\overline{Q})$ такая, что $v(x,t) = \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial \nu_x} = 0$ при $(x,t) \in \gamma \times [0,T]$.

Уточним, что фраза "постоянная …определяется входными данными задачи" всюду ниже означает, что данная постоянная вычисляется через функцию $f(x,t)$ и коэффициенты оператора.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a^{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad b^{ij,1}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad b^{ij,2}(x) \in C^3(\overline{\Omega}), \quad \beta^{i,1}(x) \in C^2(\overline{\Omega}),$$

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x),\ b^{ij,1}(x) = b^{ji,1}(x),\ b^{ij,2}(x) = b^{ji,2}(x),\ x \in \overline{\Omega},\ i,j = 1,\dots,n; \tag{4}$$

условия (2) и (3), а также условия

$$b^{ij,2}(x)\xi_i\xi_j \ge m_2|\xi|^2, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad m_2 > 0;$$

$$a(x) \le -\overline{a}_0 < 0, \quad b(x) \le 0, \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{5}$$

$$|b^{ij,1}_{x_k}(x)| + |b^{ij,1}_{x_kx_l}(x)| + |\beta^{i,1}_{x_k}(x)| \le M_1\sqrt{\beta^{i,1}(x)}, \quad x \in \overline{\Omega},$$
$$i,j,k,l = 1,\dots,n, \quad M_1 \ge 0;$$
$$\exists \delta_0 > 0 :\ \alpha^i(x) + 2\delta_0 m_2\beta^{i,1}(x) \ge k_0 > c_0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i = 1,\dots,n;$$

$$b^{ij,1}(x)\xi_i\xi_j \ge k_1|\xi|^2, \quad x \in \Gamma, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad k_1 > 0. \tag{6}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f(x,0) = 0$ при $x \in \overline{\Omega}$ краевая задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x}|_{\Gamma\times(0,T)} = 0, \tag{8}$$

имеет обобщенное решение $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega'))$, $\beta^{i,1}(x)u_{x_ix_jx_kx_l}(x,t) \in L_2(0,T;L_2(\Omega'))$ *для любой строго внутренней подобласти* Ω' *области* Ω, i, j, k, l=1, …, n.

Следующий случай соответствует эллиптико-параболическому оператору A и эллиптико-параболическим операторам B_1 и B_2, эллиптическим на множестве Γ.

В дополнение к условиям (2) и (3) эллиптико-параболичности операторов B_1 и A будем считать, что выполняется условие: существуют неотрицательные на множестве $\overline{\Omega}$ функции $\beta^{i,2}(x)$ такие, что при $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$0 \le \beta^{i,2}(x)\xi_i^2 \le b^{ij,2}(x)\xi_i\xi_j \le m_0\beta^{i,2}(x)\xi_i^2. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (2), (3), (4), (5) *и (6) теоремы 1, а также условие (9) и условия*

$$|\beta^{i,2}_{x_k}(x)| \le M_1\sqrt{\beta^{i,2}(x)}, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i = 1,\dots,n, \quad M_1 \ge 0;$$

$$\exists\,\delta_0 > 0 :\ \alpha^i(x) + 2\delta_0\beta^{i,1}(x)\beta^{i,2}(x) \ge k_0 > c_0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i = 1,\dots,n;$$

$$b^{ij,2}(x)\xi_i\xi_j \ge k_1|\xi|^2, \quad x \in \Gamma, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любой $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f(x,0) = 0$ *при* $x \in \overline{\Omega}$ *краевая задача (1), (7), (8) имеет обобщенное решение* $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$.

Далее исследуется разрешимость обратных задач нахождения вместе с решением гиперболического уравнения неизвестных коэффициентов при производной по времени и при решении. Приведены теоремы существования и единственности регулярных решений.

Пусть D есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $D\times(0,T)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $K_0(x)$ и $K_1(x)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \overline{D}$, $t \in [0,T]$, x_0 и x_1 есть заданные точки D такие, что $x_0 \ne x_1$.

Обратная задача I. *найти функции* $u(x,t)$, $q_1(t)$ *и* $q_2(t)$, *связанные в прямоугольнике* Q *уравнением*

$$u_{tt} - u_{xx} + q_1(t)u_t + q_2(t)u = f(x,t), \tag{10}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ *условий*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in D, \tag{11}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{12}$$

$$u(x_0,t) = \varphi_0(t), \quad u_x(x_0,t) = \varphi_1(t), \quad 0 < t < T. \tag{13}$$

Обратная задача II. *найти функции* $u(x,t)$, $q_1(t)$ *и* $q_2(t)$, *связанные в прямоугольнике* Q *уравнением (10), при выполнении для функции* $u(x,t)$ *условий (11), (12), а также условий*

$$u(x_0,t) = \varphi_0(t), \quad u(x_1,t) = \varphi_1(t), \quad 0 < t < T. \tag{14}$$

Обратная задача III. *найти функции* $u(x,t)$, $q_1(t)$ *и* $q_2(t)$, *связанные в прямоугольнике* Q *уравнением (10), при выполнении для функции* $u(x,t)$ *условий (11), (12), а также условий*

$$\int_0^1 K_0(x)u(x,t)\,dx = \varphi_0(t), \quad \int_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx = \varphi_1(t), \quad 0 < t < T. \tag{15}$$

В изучаемых обратных задачах I – III условия (11) и (12) есть условия обычной первой начально–краевой задачи, условия же (13), (14) и (15) есть условия переопределения; наличие этих условий объясняется тем, что помимо неизвестной функции $u(x,t)$, требуется найти также еще две неизвестные функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$.

Введем обозначения

$$\Delta_1(t) = \varphi_0'(t)\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\varphi_1'(t),$$

$$a_{01}(t) = \frac{1}{\Delta_1(t)}\left\{\varphi_1(t)[f(x_0,t) - \varphi_0''(t)] - \varphi_0(t)[f_x(x_0,t) - \varphi_1''(t)]\right\},$$

$$a_{11}(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\Delta_1(t)}, \quad a_{21}(t) = -\frac{\varphi_0(t)}{\Delta_1(t)},$$

$$b_{01}(t) = \frac{1}{\Delta_1(t)}\left\{\varphi_0'(t)[f_x(x_0,t) - \varphi_1''(t)] - \varphi_1'(t)[f(x_0,t) - \varphi_0''(t)]\right\},$$

$$b_{11}(t) = -\frac{\varphi_1'(t)}{\Delta_1(t)}, \quad b_{21}(t) = \frac{\varphi_0'(t)}{\Delta_1(t)},$$

$$\overline{a}_{01} = \operatorname{vrai}\min_{0\le t\le T} a_{01}(t), \quad A_{11} = \operatorname{vrai}\max_{0\le t\le T} |a_{i1}(t)|, \quad i = 1,2,$$

$$B_{i1} = \operatorname{vrai}\max_{0\le t\le T} |b_{i1}(t)|, \quad i = 0,1,2,$$

$$M_1 = \left| \frac{1}{2}\int_0^1 u_0^{''''2}(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 u_1^{'''2}(x)\,dx + \int_0^1 f_{xx}(x,0)u_0^{''''}(x)\,dx \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^1 f_{xxt}^2\,dx\,dt + \operatorname{vrai}\max_{0\le t\le T}\int_0^1 f_{xx}^2(x,t)\,dx \right|,$$

$$M_2 = \frac{4}{3}(1 + 2B_{01}) + 4(B_{11} + B_{21}), \quad M_3 = \frac{2}{3}(1 + 2B_{01})T + 4M_1,$$

$$M_0 = \frac{4M_3}{(2 - M_2\sqrt{M_3}T)^2}, \quad T^* = \frac{2}{M_2\sqrt{M_3}}.$$

Определим пространства V_0 и V_1:

$$V_0 = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)), \quad v_t(x,t) \in L_\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)),$$
$$v_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(D))\},$$

$$V_1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)), \quad v_t(x,t) \in L_\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$$
$$v_{xxt}(x,t) \in L_2(Q), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$T < T^*;$$

$$\Delta_1(t) \geq \delta_0 > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0, T];$$

$$\overline{a}_{01} - (A_{11} + A_{21})M_0 \geq 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что

$$f(x,t) \in L_2(0, T; W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)), \quad f_t(x,t) \in L_2(0, T; W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$$

и для любых функций $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ таких, что $u_0(x) \in W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $u_0''(x) \in W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $u_1''(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $\varphi_0(t) \in W_\infty^2([0,T])$, $\varphi_1(t) \in W_\infty^2([0,T])$, $u_0(x_0) = \varphi_0(0)$, $u_0'(x_0) = \varphi_1(0)$, $u_1(x_0) = \varphi_0'(0)$, $u_1'(x_0) = \varphi_1'(0)$, обратная задача I имеет решение $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V_0$, $u_{xx}(x,t) \in V_0$, $q_1(t) \in L_\infty([0,T])$, $q_2(x) \in L_\infty([0,T])$.

Определим класс W_1:

$$W_1 = \{\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\} : u(x,t) \in V_0, \quad u_{xx}(x,t) \in V_0,$$

$$q_i(t) \in L_\infty([0,T]), \quad i = 1, 2, \quad q_1(t) \geq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]\}.$$

Теорема 4. *Пусть для функций $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ выполняются все условия теоремы 3. Тогда в множестве W_1 обратная задача I не может иметь более одного решения.*

Положим

$$a_{02}(t) = \frac{1}{\Delta_1(t)} \left\{\varphi_1(t)[f(x_0,t) - \varphi_0''(t)] - \varphi_0(t)[f_x(x_1,t) - \varphi_1''(t)]\right\},$$

$$b_{02}(t) = \frac{1}{\Delta_1(t)} \left\{\varphi_0'(t)[f(x_1,t) - \varphi_1''(t)] - \varphi_1'(t)[f(x_0,t) - \varphi_0''(t)]\right\},$$

$$\overline{a}_{02} = \operatorname{vrai} \min_{0 \leq t \leq T} a_{02}(t), \quad B_{02} = \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} |b_{02}(t)|,$$

$$N_2 = \frac{4}{3}(1 + 2B_{02}) + 4(B_{11} + B_{21}), \quad N_3 = \frac{2}{3}(1 + 2B_{02})T + 4M_1,$$

$$N_0 = \frac{4N_3}{(2 - N_2\sqrt{N_3}T)^2}, \quad T^{**} = \frac{2}{N_2\sqrt{N_3}}.$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия*

$$T < T^{**},$$

$$\Delta_1(t) \geq \delta_0 > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0, T];$$

$$\overline{a}_{02} - (A_{11} + A_{21})N_0 \geq 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что

$$f(x,t) \in L_2(0, T; W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)), \quad f_t(x,t) \in L_2(0, T; W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)),$$

и для любых функций $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ таких, что $u_0(x) \in W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $u_0''(x) \in W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $u_1''(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $\varphi_0(t) \in W_\infty^2([0,T])$, $\varphi_1(t) \in W_\infty^2([0,T])$, $u_0(x_0) = \varphi_0(0)$, $u_0(x_1) = \varphi_1(0)$, $u_1(x_0) = \varphi_0'(0)$, $u_1(x_1) = \varphi_1'(0)$, обратная задача II имеет решение $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V_0$, $u_{xx}(x,t) \in V_0$, $q_1(t) \in L_\infty([0,T])$, $q_2(x) \in L_\infty([0,T])$.

Для обратной задачи II имеет место теорема единственности, аналогичная теореме 3. Формулировать и доказывать эту теорему ввиду ее очевидности мы не будем.

Обратимся теперь к обратной задаче III.

Положим

$$F_i(t)=\int\limits_0^1 K_i(x)f(x,t)\,dx,\quad i=0,1,$$

$$\mu_1(t)=\varphi_1(t)[F_0(t)-\varphi_0''(t)]-\varphi_0(t)[F_1(t)-\varphi_1''(t)],$$

$$\mu_2(t)=\varphi_0'(t)[F_1(t)-\varphi_1'(t)]-\varphi_1'(t)[F_0(t)-\varphi_0''(t)].$$

Далее, для заданной функции $w(x,t)$ определим функции $\psi_1(t,w)$ и $\psi_2(t,w)$:

$$\begin{aligned}\psi_1(t,w)\;&=\;\varphi_1(t)[K_0(1)w_x(1,t)-K_0(0)w_x(0,t)-\int\limits_0^1 K_0'(x)w_x(x,t)\,dx]\\&\quad-\varphi_0(t)[K_1(1)w_x(1,t)-K_1(0)w_x(0,t)-\int\limits_0^1 K_1'(x)w_x(x,t)\,dx],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(t,w)\;&=\;\varphi_0'(t)[K_1(1)w_x(1,t)-K_1(0)w_x(0,t)-\int\limits_0^1 K_1'(x)w_x(x,t)\,dx]\\&\quad-\varphi_1'(t)[K_0(1)w_x(1,t)-K_0(0)w_x(0,t)-\int\limits_0^1 K_0'(x)w_x(x,t)\,dx].\end{aligned}$$

Определим необходимые постоянные:

$$\begin{aligned}k_1\;&=\;\left(|K_0(1)|+|K_0(0)|+\int\limits_0^1|K_0'(x)|\,dx\right)\operatorname{vrai}\max_{0\le t\le T}|\varphi_1(t)|\\&\quad+\left(|K_1(1)|+|K_1(0)|+\int\limits_0^1|K_1'(x)|\,dx\right)\operatorname{vrai}\max_{0\le t\le T}|\varphi_0(t)|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_2\;&=\;\left(|K_0(1)|+|K_0(0)|+\int\limits_0^1|K_0'(x)|\,dx\right)\operatorname{vrai}\max_{0\le t\le T}|\varphi_1'(t)|\\&\quad+\left(|K_1(1)|+|K_1(0)|+\int\limits_0^1|K_1'(x)|\,dx\right)\operatorname{vrai}\max_{0\le t\le T}|\varphi_0'(t)|,\end{aligned}$$

$$k_3=\operatorname{vrai}\max_{0\le t\le T}\frac{|\mu_2(t)|}{\Delta_1(t)},\quad k_4=k_2\left[\operatorname{vrai}\min_{0\le t\le T}\Delta_1(t)\right]^{-1},$$

$$\overline{\mu}_1=\operatorname{vrai}\min_{0\le t\le T}\mu_1(t),$$

$$R_1 = \left|\frac{1}{2}\int\limits_0^1 [u_0''^2(x) + u_1'^2(x)]\,dx + \int\limits_0^1 f(x,0)u_0''(x)\,dx + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_\tau^2\,dx\,d\tau + \operatorname{vrai}\max_{0\le t\le T}\int\limits_0^1 f^2(x,t)\,dx\right|,$$

$$R_2 = \frac{4}{3}(1+2k_3) + 4k_4, \quad R_3 = \frac{2}{3}(1+2k_3)T + 4R_1,$$

$$R_0 = \frac{4R_3}{(2 - R_2\sqrt{R_3}T)^2}, \quad T^{***} = \frac{2}{R_2\sqrt{R_3}}.$$

Теорема 6. *Пусть выполняются условия*

$$T < T^{***};$$

$$\Delta_1(t) \ge \delta_0 > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T];$$

$$\overline{\mu}_1 - k_1 R_0 \ge 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$ *и для любых функций* $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\varphi_0(t)$ *и* $\varphi_1(t)$ *таких, что* $u_0(x) \in W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $\varphi_0(t) \in W_\infty^2([0,T])$, $\varphi_1(t) \in W_\infty^2([0,T])$,

$$\int\limits_0^1 K_0(x)u_0(x)\,dx = \varphi_0(0), \quad \int\limits_0^1 K_1(x)u_0(x)\,dx = \varphi_1(0),$$

$$\int\limits_0^1 K_0(x)u_1(x)\,dx = \varphi_0'(0), \quad \int\limits_0^1 K_1(x)u_1(x)\,dx = \varphi_1'(0),$$

обратная задача III имеет решение $\{u(x,t), q_1(t), q_2(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in V_0$, $q_1(t) \in L_\infty([0,T])$, $q_2(t) \in L_\infty([0,T])$.

Вопрос о единственности решений мы вновь обсуждать не будем.

Замечание. В обратных задачах I – III условия (12) можно заменить условиями

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

или же условиями смешанной задачи.

Ниже исследуется новая обратная задача для эволюционных уравнений с параметром. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, L — самосопряженный оператор с областью определения $D(L)$ и существует $\delta > 0$ такое, что

$$-(Lu,u) \ge \delta\|u\|^2$$

для всех $u \in D(L)$. Также пусть $0 < T < \infty$ и измеримое множество $D_1 \subset \mathbb{R}$ имеет предельную точку $p_0 \in \mathbb{R}$.

В следующей задаче параметр $p \in D_1$.

Задача P. Найти пару функций $u(t,p)$ и $f(t)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - pLu = f(t), \quad t \in (0,T), \quad p \in D_1, \tag{16}$$

и краевым условиям

$$u(0, p) = u_0(p),$$
$$u(T, p) = u_1(p).$$

Такие обратные задачи исследовались в работах [10] – [12]. Заметим, что уравнения с параметром возникают после применения преобразования Фурье по переменной y к уравнениям вида

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^k} - \frac{\partial}{\partial y} A w = f(x, t)\lambda(y),$$

где $w = w(x, t, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t, y \in \mathbb{R}^n$, A — линейный оператор, действующий по переменной x.

Кроме того, представляется возможным в уравнениях вида (16) считать коэффициент p переменной величиной, т. е., например, считать переменным коэффициент теплопроводности в уравнении (16). Физически это может означать, что рассматриваются одновременно среды с различными коэффициентами теплопроводности, коэффициентами диффузии, волны с разными скоростями, частицы с разными массами. Отметим, что задача P с фиксированным параметром p и без дополнительных условий на f некорректна. Необходимо требовать дополнительно, например, при $k = 1$, чтобы функция f не зависела от t, т. е. лежала в ядре дифференциального оператора $\dfrac{\partial}{\partial t}$ (см. работы А. И. Прилепко и др. [13], [14]), или чтобы она лежала в ядре оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - a$ (см. монографию А. И. Кожанова [15]), или чтобы она была гармонической (см. работу С. Г. Пяткова [16]), или чтобы она лежала в ядре оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - a\Delta$ [17]. В данной же работе предлагается искать функцию f в более широких классах функций с помощью варьирования параметра p.

Введем пространство H_1 как пополнение $D(L)$ по норме

$$\|u\|_{H_1} = \sqrt{|(Lu, u)|}$$

и негативное пространство H_{-1}, построенное по пространствам H_1 и H, т. е. пополнение H по норме

$$\|u\|_{H_{-1}} = \sup_{\varphi \in H_1, \varphi \neq 0} \frac{|(u, \varphi)|}{\|\varphi\|_{H_1}}.$$

Тогда оператор L допускает продолжение до линейного непрерывного оператора из H_1 в H_{-1}. Дополнительно предположим, что $L^{-1} : H_1 \to H_1$ — вполне непрерывен.

Возьмем любую функцию

$$\Phi(t, p) \in L_2(D_1 \times (0, T); H_1)) \cap L_2(D_1; W_2^1(0, T; H_{-1}))$$

такую, что

$$\Phi(0, p) = u_0(p), \qquad \Phi(T, p) = u_1(p).$$

Такие функции существуют, если $u_1 \in L_2(D_1; H_1)$, $u_0 \in L_2(D; H)$ (см. [18]). Тогда заменой $v = u - \Phi$ наша задача сводится к задаче с однородными краевыми условиями.

Теорема 7. *Пусть* $g(x,t,p) \in C(\overline{D}; L_2(0,T;H_{-1}))$ *и* $g(t,p)$ *— аналитическая функция по переменной* p *на множестве* D_1*, допускающая продолжение до целой функции по переменной* p*, такой, что* $g(t, \mathrm{i}p) \in W_2^1(\mathbb{R}^n; L_2(0,T;H_{-2}))$ *и для каждой из функций* $G_n(p)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, которые определяются формулами*

$$G_n(p) = -\int\limits_0^T \mathrm{e}^{-\lambda_n p t} g_n(t,p)\,dt,$$

выполнены условия

$$\lim_{\xi\to\infty}\left[\min\{1, \mathrm{e}^{\lambda T\xi}\}\sup_{\eta\in\mathbb{R}^n}|G(\xi+\mathrm{i}\eta)|\right] = 0,$$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left[\min\{1, \mathrm{e}^{2\lambda\xi T}\}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|G(\xi+\mathrm{i}\eta)|^2\,d\eta\right] < \infty;$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|G\Big(\mathrm{i}\frac{2\pi k}{\lambda T}\Big)\right|^2 < \infty.$$

Тогда существует единственное решение $\{v, f\}$ *обратной задачи* P' *такое, что* $v \in C(\overline{D}_1; L_2(0,T;H_1))$*,* $v_t \in C(\overline{D}_1; L_2(0,T;H_{-1}))$*,* $f \in L_2(0,T;H_{-1})$.

2. Представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений.

Одно из направлений конструктивного метода заключается в построении из относительно простых уравнений, имеющих явное решение, более сложных с существенно переменными коэффициентами с целью дальнейшего одновременного определения решения и коэффициентов более сложного уравнения, на основе полученной формулы и при наличии информации в обратной задаче.

В частности, формулы для решений и коэффициентов дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка получаются на основе следующих трех лемм.

Лемма 1. *Пусть* $F(y,t)$*,* $y \in D_1 \subset \mathbb{R}^m$*,* $\alpha < t < \beta$ *— решение дифференциального уравнения*

$$\sum_{p=1}^{l} c_p(y)\frac{\partial^p F}{\partial t^p} = \sum_{k,s=1}^{m} b_{ks}(y)\frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial y_s} + \sum_{k=1}^{m} b_k(y)\frac{\partial F}{\partial y_k} + b(y)F + \varphi(y,t), \quad m \geq 1,$$

где $c_p(y)$*,* $b_{ks}(y)$*,* $b_k(y)$*,* $b(y)$*,* $\varphi(y,t)$ *— некоторые непрерывные функции в областях* D_1 *и* $D_1 \times (\alpha,\beta)$ *соответственно,* $p = 1,2,\ldots,l$*,* $k,s = 1,2,\ldots,m$ *и пусть* $u(x) \neq 0$ *— дважды непрерывно дифференцируемая функция в области* $D \subset \mathbb{R}^n$*, а* $v(x) = (v_1(x), v_2(x), \ldots, v_m(x))$ *— дважды непрерывно дифференцируемое отображение области* D *в* D_1*, то есть* $x \in D \subset \mathbb{R}^n$*,* $v(x) \in D_1 \subset \mathbb{R}^m$*. Предположим, что коэффициенты* $a_{ij}(x)$*,* $a_j(x)$*,* $a(x)$*,* $i,j = 1,2,\ldots,n$ *дифференциального оператора*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + a(x)$$

удовлетворяют нижеследующим связям

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_s}{\partial x_j} = b_{ks}(v_1(x),\ldots,v_m(x)), \quad k,s = 1,2,\ldots,m, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + u\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j}\right) + u(x)\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial v_k}{\partial x_j} &= \\ = \quad u(x)b_k(v_1(x),\ldots,v_m(x)), &\end{aligned} \tag{18}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + u(x)\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x)u(x) = u(x)b(v_1(x),\ldots,v_m(x)), \tag{19}$$

Тогда дифференциальному уравнению

$$\sum_{p=1}^{l} c_p(v(x))\frac{\partial^p w}{\partial t^p} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial w}{\partial x_j} + a(x)w + \varphi(v(x),t), \tag{20}$$

удовлетворяет функция

$$w(x,t) = u(x)F(v_1(x),\ldots,v_m(x),t) + \widetilde{w}(x,t)$$

где $\widetilde{w}(x,t)$ *— любое решение, например* $\widetilde{w}(x,t) = 0$*, однородного уравнения (20)* ($\varphi = 0$) *с коэффициентами* $a_{ij}(x)$, $a_j(x)$, $a(x)$ *подчиненными связям (17), (18), (19).*

Лемма 2. *Если* $m = n$*, то для коэффициентов* $a_{ij}(x)$, $a_j(x)$, $a(x)$ *имеют место формулы*

$$a_{ij}(x) = \left[\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}(v)\frac{\partial x_i(v)}{\partial v_k}\frac{\partial x_j(v)}{\partial v_l}\right]_{v=v(x)}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} a_j(x) \quad = \quad & \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_j(v)}{\partial v_k}\,[b_k(v) \\ & -\frac{1}{u(x)}\sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x)\left[\frac{\partial v_k(x)}{\partial x_l}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_l} + u\frac{\partial^2 v_k(x)}{\partial x_i \partial x_l}\right]\Bigg]_{v=v(x)}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$a(x) = b(v(x)) - \frac{1}{u(x)}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right]_{v=v(x)},$$

где $x = x(v)$ *— обратное отображение к* $v = v(x)$*.*

Если $n = m = 1$, то справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть* $F(y,t)$, $y \in (y_1,y_2) \subset \mathbb{R}$, $\alpha < t < \beta$ *— решение дифференциального уравнения*

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(y)\frac{\partial^k F}{\partial t^k} = \beta_1(y)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \beta_2(y)\frac{\partial F}{\partial y} + \beta_3(y)F$$

где $\alpha_i(y)$ $\beta_i(y)$ *— некоторые непрерывные функции в интервале* (y_1,y_2)*, и пусть* $u \neq 0$ *— дважды непрерывно дифференцируемая функция в интервале*

$(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$, *а* $v(x)$ *— дважды непрерывно дифференцируемое отображение интервала* (x_1, x_2) *в* (y_1, y_2), *то есть* $x \in (x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$, $v(x) \in (y_1, y_2) \subset \mathbb{R}$, *тогда для решения* $w(x,t)$ *и коэффициентов* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *уравнения*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k(v(x)) \frac{\partial^k w}{\partial t^k} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + c(x)w$$

имеют место формулы

$$w(x,t) = u(x)F(v(x),t) + \widetilde{w}(x,t)$$

$$a(x) = \frac{\beta_1(v(x))}{(v'(x))^2}$$

$$b(x) = \frac{u(x)\beta_2(v(x))(v'(x))^2 - \beta_1(v(x))[2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)]}{u(x)(v'(x))^3}$$

$$\begin{aligned} c(x) \quad = \quad & \frac{1}{u^2(x)(v'(x))^3}\Big[u^2(x)(v'(x))^3\beta_3(v(x)) - \beta_1(v(x))u(x)u''(x)v'(x) \\ & -u\beta_2(v(x))(v'(x))^2 + \beta_1(v(x))[2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)]\Big] \end{aligned}$$

На основе леммы 3 построен алгоритм вычисления решения и коэффициентов в форме $w(x,t) = u(x)F(v(x),t) + \widetilde{w}(x,t)$. Созданы таблицы решений, которые, в свою очередь, определяют коэффициенты. Приведем один пример. В нижеследующих формулах встречающиеся функции — достаточное число раз дифференцируемые, а постоянные — произвольные, если не указано противоположное. Независимые переменные меняются в соответствии с корректностью нижеприведенных формул.

Пример: Решение $w(x,t)$ и коэффициенты $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + c(x)w$$

вычисляются по формулам

$$a(x) = \frac{\lambda^2}{(v'(x))^2},$$

$$b(x) = -\frac{\lambda^2[2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)]}{u(x)(v'(x))^3},$$

$$c(x) = \frac{\lambda^2[-u(x)u''(x)v'(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)]}{u^2(x)(v'(x))^3},$$

$$\begin{aligned} w(x,t) \quad = \quad & u(x)\left[\frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \psi(\xi)\left[\exp\left(-\frac{(v(x)-\xi)^2}{4\lambda^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(v(x)+\xi)^2}{4\lambda^2 t}\right)\right]d\xi \right. \\ & \left. +\frac{v(x)}{2\lambda\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{v^2(x)}{4\lambda^2(t-\tau)}\right)d\tau\right] \end{aligned}$$

При этом

$$w(0,t) = u(0)\varphi(t), \text{ при } v(0) = 0,$$
$$w(x,0) = u(x)\psi(v(x))$$

Заметим, что на основе лемм 1–3 можно исследовать вопросы существования решений обратных задач, что частично приведено ниже.

Покажем, что функции $a_{ij}(x)$, $v_j(x)$, $u(x)$, $F(y,t)$ в условиях леммы 2 могут быть в аналитическом случае определены однозначно в окрестности точек $x = 0$ и $y = v(0)$, $t = 0$ при наличии аналитической информации. В дальнейших рассуждениях предполагается, что все рассматриваемые функции аналитичны на области определения.

Предложение 1. Пусть в дополнение к условиям лемм 1, 2 выполнены следующие предположения:

1) коэффициенты $a(x)$, $a_1(x), \dots, a_m(x)$ — известные функции;

2) функции $v_1(x), \dots, v_m(x)$, $u(x)$, $w(x,t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left\{ \begin{array}{rcl} w|_{x_m=0} & = & w_0(\overline{x},t), \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial x_m}\right|_{x_m=0} & = & w_1(\overline{x},t), \end{array} \right. \tag{23}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u|_{x_m=0} & = & u_0(\overline{x}), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_m}\right|_{x_m=0} & = & u_1(\overline{x}), \end{array} \right. \tag{24}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_k|_{x_m=0} & = & v_{k0}(\overline{x}), \\ \left.\dfrac{\partial v_k}{\partial x_m}\right|_{x_m=0} & = & v_{k1}(\overline{x}), \end{array} \right. \tag{25}$$

где $k = 1, \dots, m$, $\overline{x} = (x_1, \dots, x_{m-1})$, правые части соотношений (23)–(25) известны, причем

$$u_0(\overline{x}) \neq 0, \ \ v_{11}(\overline{x}) \neq 0, v_{10}(\overline{x}) = v_{21}(\overline{x}) = \ldots = v_{m1}(\overline{x}) = 0,$$

и отображение $\overline{x} = (x_1, \dots, x_{m-1}) \longmapsto (v_2(\overline{x}), \dots, v_m(\overline{x}))$ обратимо в окрестности точки $\overline{x} = 0$;

3) $l \leq 2$;

4) матрица $b_{ks}(y)$ положительно определена в окрестности точки $y = v(0)$.

Тогда функции $a_{ij}(x)$, $v_j(x)$, $u(x)$, $F(y,t)$ определены однозначно в некоторых окрестностях точек $x = 0$ и $y = v(0)$, $t = 0$.

Рассмотрим некоторые применения формул лемм 1, 2 на примере двумерного уравнения теплопроводности.

Справедливо

Предложение 2. Пусть $u = u(x_1,x_2)$, $v_1 = v_1(x_1,x_2)$, $v_2 = v_2(x_1,x_2)$ произвольные функции от переменных x_1, x_2 такие, что

$$\Delta = \left| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{array} \right| \neq 0.$$

Функция $F = F(y_1,y_2,t)$ — произвольное решение уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}.$$

Тогда функции $a_{ij}(x_1,x_2)$, $a_i(x_1,x_2)$, $a(x_1,x_2)$, $i,j = 1,2$ найденные по формулам

$$(26)\qquad \begin{cases} a_{11} = \dfrac{1}{\Delta^2}\left[\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2\right], \\ a_{12} = a_{21} = -\dfrac{1}{\Delta^2}\left[\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right], \\ a_{22} = \dfrac{1}{\Delta^2}\left[\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2\right], \end{cases}$$

$$(27)\qquad \begin{cases} a_1 = -\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}L(v_1) + \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}L(v_2) - \dfrac{2}{u}\left[a_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_{12}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right], \\ a_2 = \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}L(v_1) - \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}L(v_2) - \dfrac{2}{u}\left[a_{12}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_{22}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right], \\ a = -\dfrac{1}{u}L(u) - \dfrac{1}{u}\left[a_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right], \end{cases}$$

где

$$L = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

и функция

$$w = u(x_1, x_2)F(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2), t)$$

удовлетворяют уравнению

$$(28)\qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial w}{\partial x_j} + aw.$$

Одно из возможных применений полученных формул — конструктивный способ решения обратных задач.

Пример 1. Пусть $w_1(x_1, x_2)$, $w_1(x_1, x_2)$ — заданные функции, $t_1 \neq t_2$ — фиксированные числа. Тогда функция

$$w = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[(t_2 - t)w_1 + (t - t_1)w_2\right]$$

удовлетворяет условиям

$$w|_{t=t_1} = w_1, \quad w|_{t=t_2} = w_2$$

и уравнению (28), коэффициенты которого определены формулами (26), (27) по функциям

$$u = \frac{w_2 - w_1}{2(t_2 - t_1)}, \quad v_1 = \pm\sqrt{2\frac{w_1 t_2 - w_2 t_1}{w_2 - w_1} - v_2^2},$$

где $v_2 = v_2(x_1, x_2)$ — произвольная функция.

Пример 2. Рассмотрим вопрос о дивергентной форме уравнения (20). Будем говорить, что уравнение

$$(29)\qquad \sum_{k=1}^{p} c_k(x)\frac{\partial^k w}{\partial t^k} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial w}{\partial x_j} + a(x)w$$

имеет дивергентную форму, если его можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{p} c_k(x)\frac{\partial^k w}{\partial t^k} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + a(x)w,$$

т.е. если коэффициенты a_{ij}, a_j связаны соотношениями

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}, \quad j = 1,\dots,n. \tag{30}$$

Применительно к уравнению (20) это означает, что функции $u(x)$, $v_1(x),\dots,v_m(x)$ должны удовлетворять системе соотношений, которая получиться, если в (30) вместо a_{ij}, a_j подставить их представления (21), (22). (Будем рассматривать случай $m = n$.) Вообще говоря система (30) может не иметь решений. Действительно, если $m = n = 2$ и a_{ij}, a_j получены по формулам (26), (27), то на функции u, v_1, v_2 получим систему дифференциальных уравнений второго порядка. Если попытаться разрешить ее относительно производных $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}$, т.е. поставить задачу Коши по переменной x_1, то получим подсистему

$$\left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} + a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix},$$

где правая часть не зависит от производных $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}$, а коэффициенты A, B, C, D вычисляются по формулам

$$A = -\frac{2a_{11}}{\Delta}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad B = \frac{2a_{11}}{\Delta}\frac{\partial v_1}{\partial x_2},$$

$$C = -\frac{2a_{12}}{\Delta}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \quad D = \frac{2a_{12}}{\Delta}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}.$$

Непосредственно проверяется, что определитель матрицы левой части тождественно равен нулю.

Но если уравнение (29) домножить на некоторую функцию $p = p(x)$, то система (30) примет вид

$$pa_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(pa_{ij}), \quad j = 1,\dots,n,$$

или, положив $q = \ln p$, получим систему

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial q}{\partial x_i} = a_j - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}, \quad j = 1,\dots,n. \tag{31}$$

А эта система уже может иметь решения.

Пусть, например, функции a_{ij}, a_j получены по формулам (26), (27). Тогда (31) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial q}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i} \\ \\ a_2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_i} \end{bmatrix}.$$

Условие совместности этой системы

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{a_{22}(a_1 - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i}) - a_{21}(a_2 - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_i})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{-a_{12}(a_1 - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i}) + a_{11}(a_2 - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_i})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right]$$

выполняется тождественно в силу формул (26), (27), и нетрудно показать, что дивергентный множитель $p = p(x_1, x_2)$ определяется формулой

$$p = \frac{1}{u^2}\left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right].$$

В заключение данного раздела приведем несколько других представлений для решений и коэффициентов эволюционного уравнения, более удобные для приложений.

Пусть D — область вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а D_1 — область $\mathbb{R}^m$ переменных $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $n \geq 1$, $m \geq 1$ — произвольные целые числа. Рассмотрим дифференциальные уравнения 2-го порядка в областях D_1 и D соответственно:

$$\beta_1(y)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \beta_2(y)\frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{k,l=1}^{m} b_{kl}(y)\frac{\partial^2 V}{\partial y_l \partial y_k} + \sum_{k=1}^{m} b_k(y)\frac{\partial V}{\partial y_k} + b(y)V, \tag{32}$$

$$\alpha_1(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha_2(x)\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_j} + a(x)w\,, \tag{33}$$

с гладкими коэффициентами. Пусть $u(x) \neq 0$, $x \in D$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, а $y = A(x)$, $x \in D$, $y \in D_1$ дважды непрерывно дифференцируемое отображение области $D \subset \mathbb{R}^n$ на область $D_1 \subset \mathbb{R}^m$.

Имеют место нижеследующие утверждения, аналогичные леммам 1-3, но с учетом начальных данных.

Если $V(y,t)$ — решение уравнения (32) и коэффициенты $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $a_{ij}(x)$, $a_j(x)$, $a(x)$ уравнения (33) связаны с коэффициентами $\beta_1(y)$, $\beta_2(y)$, $b_{kl}(y)$, $b_k(y)$, $b(y)$ уравнения (32) соотношениями

$$\alpha_1(x) = \beta_1(A(x)), \quad \alpha_2(x) = \beta_2(A(x))\,,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial A_l}{\partial x_j} = b_{kl}(A(x)), \quad k,l = 1,2,\dots,m\,, \tag{34}$$

(35)
$$\frac{1}{u(x)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left[\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+u\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\partial x_j}\right]+\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial A_k}{\partial x_j}=b_k(A(x)),$$

$$\frac{1}{u(x)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{1}{u(x)}\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+a(x)=b(A(x)), \tag{36}$$

то функция
$$w(x,t)=u(x)V(A(x),t)$$
является решением уравнения (33).

Если при этом $m=n$ и отображение $y=A(x)$ имеет обратное $x=A^{-1}(y)$, $x\in D$, $y\in D_1$ причем $\left|\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}\right|\neq 0$, для всех $x\in D$, то соотношения (34), (35), (36) последовательно и однозначно определяют $a_{ij}(x)$, $a_j(x)$, $a(x)$ по формулам

$$a_{ij}(x)=\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}(y)\frac{\partial A_i^{-1}(y)}{\partial y_k}\,\frac{\partial A_j^{-1}(y)}{\partial y_l}\Bigg|_{y=A(x)}, \tag{37}$$

$$a_j(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} b_k(y)\frac{\partial A_j^{-1}(y)}{\partial y_k}\Bigg|_{y=A(x)}$$
$$-\frac{1}{u(x)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+u\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\partial x_j}\right)\frac{\partial A^{-1}(y)}{\partial y_k}\Bigg|_{y=A(x)}, \tag{38}$$

$$a(x)=b(A(x))-\frac{1}{u(x)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{1}{u(x)}\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\,. \tag{39}$$

И если функция $V(y,t)$ есть решение уравнения (32) с начальными данными
$$V|_{t=0}=\frac{w_0(A^{-1}(y))}{u(A^{-1}(y)},\quad \frac{\partial V}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\frac{w_1(A^{-1}(y))}{u(A^{-1}(y))},\quad y\in D_1\,,$$
где $w_0(x)$, $w_1(x)$, $x\in D$, некоторые непрерывно дифференцируемые функции, то решение $w(x,t)=u(x)\ V(A(x),t)$ уравнения (33) с коэффициентами (37), (38), (39) имеет начальные данные
$$w|_{t=0}=w_0(x),\quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=w_1(x),\quad x\in D\,.$$

Если же далее $m=n=1$, то коэффициенты уравнений
$$\beta_1(y)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\beta_2(y)\frac{\partial^2 V}{\partial t}=b''(y)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+b_1(y)\frac{\partial V}{\partial y}+b(y)V\,, \tag{40}$$
$$\alpha_1(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\alpha_2(x)\frac{\partial w}{\partial t}=a_{11}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a_1(x)\frac{\partial w}{\partial x}+a(x)w$$
при $w(x,t)=u(x)\ V(A(x),t)$ связаны соотношениями
$$\alpha_1(x)=\beta_1(A(x)),\quad \alpha_2(x)=\beta_2(A(x)),$$

$$a_{11}(x)=\frac{b_{11}(A(x))}{A'^2(x)}, \tag{41}$$

$$a_1(x) = \frac{u(x)b_1(A(x)) - b_{11}(A(x))(2u'(x)A'(x) + u(x)A''(x))}{u(x)A'^3(x)}, \tag{42}$$

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{u^2A'^3}\Big[u^2A'^3 b(A(x)) - b_1(A(x))u(x)u''A' - \\ &\quad -ub_1(A(x))A'^2 + b_{11}(A(x))(2u'^2(x)A'(x) + u(x)u'(x)A''(x)\Big] . \end{aligned} \tag{43}$$

При этом, если $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ или $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $b_{11} = 1$, $b_1 = 0$, $b = 0$, $y \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^1$, то уравнение (40) волновое либо параболическое:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial V^2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

формулы (41), (42), (43) имеют вид

$$a_{11}(x) = \frac{1}{A'^2(x)}, \quad a_1(x) = -\frac{u(x)A''(x) + 2A'(x)u'(x)}{u(x)A'^3(x)} ,$$

$$a(x) = \frac{1}{u(x)}\left[\frac{u(x)u'(x)A''(x) + 2A'(x)u'^2}{a'^3(x)u(x)} - \frac{u''(x)}{A'^2(x)}\right] ,$$

а решения задач Коши

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_{11}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_1(x)\frac{\partial w}{\partial x} + a(x)w$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = w_1(x)\,,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a_{11}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_1(x)\frac{\partial w}{\partial x} + a(x)w\,,$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1$$

даются обобщенными формулами Даламбера и Пуассона:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}u(x)\left[\frac{w_0(A^{-1}(A(x)+t))}{u(A^{-1}(x)+t))} + \frac{w_0(A^{-1}(A(x)-t))}{u(A^{-1}(A(x)-t))}\right] + \\ &\quad + \frac{1}{2}u(x)\int\limits_{A^{-1}(A(x)-t)}^{A^{-1}(A(x)+t)} \frac{w_1(\xi)}{u(\xi)}A'(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

$$w(x,t) = \frac{u(x)}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{w_0(A^{-1}(A(x) + 2\sqrt{t}\xi))}{u(A^{-1}(A(x) + 2\sqrt{t}\xi))}\mathrm{e}^{-\xi^2}d\xi\,.$$

Найденные формулы для решений и коэффициентов уравнений с одномерной пространственной переменной позволяют получать аналогичные формулы для решений и коэффициентов многомерных нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

В многомерном и нелинейном случае

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{F''(w)}{F'(w)} + \sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial w}{\partial x_j} + a(x)\frac{F(w)}{F'(w)}\,, \tag{44}$$

где $F(y)$, $y \in \mathbb{R}^1$ — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, имеющая обратную $F^{-1}(z)$ и $F'(y) \neq 0$, результат заключается в нижеследующей формуле.

Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_j(x)$, $a(x)$ уравнения (44) определены соотношениями (37), (38), (39) при $b_{kl} = \delta_{kl}$ — символ Кронекера, $b_k = 0$, $b = 0$ и $\beta_1(y) = 0$, $\beta_2(y) = 1$, то есть уравнение (32) — параболическое с постоянными коэффициентами: $\dfrac{\partial V}{\partial t} = \Delta V$. Тогда оказывается функция

$$w(x,t) = F\left(\frac{u(x)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{F^{-1}(w_0(A^{-1}(A(x) + 2t\sqrt{\zeta})))}{u(A^{-1}(A(x) + 2t\sqrt{\zeta}))} e^{-\zeta^2} d\zeta\right)$$

удовлетворяет уравнению (44) и начальным данным

$$w|_{t=0} = w_0(x)\,.$$

Имеют место аналогичные соотношения для гиперболических уравнений.

Пусть $u(x) \neq 0$, $\tau(x)$, $x \in D$, $f(y)$, $g(y)$, $A(y)$, $A'(y) > 0$, $y \in \mathbb{R}^1$, произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции и пусть $Q(x) \neq 0$ — вектор, такой что $(\operatorname{grad}\tau, Q) \neq 0$, $x \in D$. Тогда функции $w(x,t)$, $\rho(x)$, $b(x)$, $\mu(x)$, $\lambda(x)$, определенные формулами

$$w(x,t) = u(x) f(A^{-1}(A(\tau(x)) + t)) + u(x) g(A^{-1}(A(\tau(x)) - t)) \tag{45}$$

$$\rho(x) = |\operatorname{grad}\tau|^2 A'(\tau(x)), \quad b(x) = \frac{1}{A'(\tau(x))}, \tag{46}$$

$$\mu(x) = -\frac{2(\operatorname{grad}u, \operatorname{grad}\tau) + u\Delta\tau}{uA'(\tau(x))(\operatorname{grad}\tau, Q)}\,, \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \lambda(x) \quad = \quad & \frac{2(\operatorname{grad}u, \operatorname{grad}\tau) + u\Delta\tau}{uA'(\tau(x))(\operatorname{grad}\tau, Q)} (\operatorname{grad}u, Q) - \\ & -\frac{1}{u}\left[\operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad}u}{A'(\tau(x))}\right) + \frac{1}{A'(\tau(x))}\Delta\varphi\right] \end{aligned} \tag{48}$$

удовлетворяют уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \operatorname{div}(b(x)\operatorname{grad}w) + \mu(x)(\operatorname{grad}w, Q) + \lambda(x) w\,. \tag{49}$$

При этом к $w(x,t)$ из (45) можно прибавить любое решение $\widetilde{w}(x,t)$ уравнения (49) с коэффициентами (46), (47), (48), то есть

$$w(x,t) = u(x) f(A^{-1}(A(\tau(x)) + t)) + u(x) g(A^{-1}(A(\tau(x)) - t)) + \widetilde{w}(x,t)$$

Пусть как и выше $u(x) \neq 0$, $\tau(x) \neq 0$, $x \in D$, $A(y)$, $A'(y) > 0$, $f(y)$, $y \in \mathbb{R}^1$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Тогда функции $w(x,t)$, $\rho(x)$, $b(x)$, $\mu(x)$, $\lambda(x)$ определенные формулами

$$w(x,t) = u(x) f(A^{-1}(A(\tau(x)) + t)) + \widetilde{w}(x,t)\,,$$

$$\rho(x) = |\operatorname{grad}\tau|^2 A'(\tau(x)), \quad b(x) = \frac{1}{A'(\tau(x))}\,, \tag{50}$$

$$\mu(x) = -\frac{1}{u(x)}\left[2\Big(\operatorname{grad}\tau, \operatorname{grad}u\Big) + u\Delta\tau\right], \tag{51}$$

$$\lambda(x) = -\frac{1}{u}\operatorname{div}\left(\frac{1}{A'(\tau(x))}\operatorname{grad}u\right) \tag{52}$$

удовлетворяют уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \operatorname{div}\Big(b(x)\operatorname{grad} w\Big) + \mu(x)\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda(x)w, \tag{53}$$

где $\widetilde{w}(x,t)$ — любое решение уравнения (53) с коэффициентами (50), (51), (52).

Интересная формула получается с суперпозициями. Пусть $v(t,y)$, $t>0$, $y \in \mathbb{R}^1$ — решение линейного одномерного параболического уравнения $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, функция $\varphi(x,t)$, $x \in D \subset R^n$, $t>0$ — решение нелинейного параболического уравнения $\Big|\operatorname{grad}_x\varphi\Big|^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \Delta\varphi$ и пусть $F(y)$, $F'(y)\neq 0$ — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда функция

$$W(x,t) = F\left(-2\frac{v(t,\varphi(x,t))}{\dfrac{\partial v}{\partial y}(t,\varphi(x,t))}\right)$$

удовлетворяет обобщенному уравнению Бюргерса:

$$|\operatorname{grad}_x\varphi|^2\,\frac{\partial W}{\partial t} + F(W)\,(\operatorname{grad}_x W, \operatorname{grad}_x\varphi) = \frac{F''(W)}{F'(W)}\,|\operatorname{grad}_x W|^2 + \Delta W\,.$$

Для волновых уравнений имеют место более конкретные соотношения. Пусть $A(\omega)$ — произвольная достаточно быстро убывающая на бесконечности функция, а функция $u(x)>0$ произвольная гармоническая в области D. Тогда функции $w(x,t)$, $\lambda(x)$, $x\in D$, $t\in\mathbb{R}^1$, определенные формулами

$$w(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\exp\left[\mathrm{i}\omega\sqrt[3]{u(x)}\right]\left(\mathrm{i}\omega\sqrt[3]{u(x)}-1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}du + \widetilde{w}(x,t),$$

$$\lambda(x) = \frac{1}{9}u(x)^{-\frac{4}{3}}|\operatorname{grad} u|^2,$$

удовлетворяют уравнению

$$\lambda(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta w,$$

где $\widetilde{w}(x,t)$ — любое решение этого уравнения с коэффициентом $\lambda(x)$.

Приведем формулы для решения $w(x,t)$ и коэффициентов другого дифференциального уравнения

$$n(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(b(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right).$$

Пусть $a(y)\not\equiv 0$, $y\in\mathbb{R}^1$, некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром p

$$\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dF}{dy}\right) + pF(y) = 0$$

и обозначим через $F_1(y,p)$, $F_2(y,p)$ фундаментальную систему решений этого уравнения. Например, при $a(y)=y^m$, $1\le m<2$, функции F_1, F_2 определяются формулами:

$$F_1(y,p)=y^{\frac{1-m}{2}}J_\alpha\left(\frac{2\sqrt{p}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right),$$

$$F_2(y,p)=y^{\frac{1-m}{2}}I_\alpha\left(\frac{2\sqrt{p}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right),\ \alpha=\left|\frac{m-1}{m-2}\right|,$$

J_α, I_α — функции Бесселя первого и второго рода.

Пусть $A(\omega)$, $B(\omega)$, $\omega\in\mathbb{R}^1$ — непрерывные функции достаточно быстро убывающие на бесконечности и функция $u(x)$, $x\in D$, является гармонической в области $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\ge 1$.

Функции $w(x,t)$, $n(x)$, $b(x)$, определенные соотношениями

$$w(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[A(\omega)F_1\Big(u(x),\omega^2\Big)+B(\omega)F_2\Big(u(x),\omega^2\Big)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}d\omega+\widetilde{w}(x,t),$$

$$n(x)=|\operatorname{grad}u(x)|^2,$$
$$b(x)=a(u(x)),$$

удовлетворяют уравнению

$$n(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(b(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right),\quad x\in D\subset\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R}^1,$$

где $\widetilde{w}(x,t)$ — любое решение этого уравнения с коэффициентами $n(x)$, $b(x)$.

Формула для $w(x,t)$ заведомо корректна, если функции $A(\omega)$, $B(\omega)$ финитны.

Приложения полученных формул к конкретным обратным задачам могут составить предмет будущих исследований.

3. Тождества и их применение к обратным задачам для кинетических уравнений.

Наиболее полное с практической точки зрения описание плазмы дается функцией распределения частиц по скоростям в рамках стандартного подхода основанного на кинетическом уравнении Больцмана–Власова:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+<\overline{p},\frac{\partial w}{\partial\overline{x}}>+<\overline{E}+\overline{p}\times\overline{B},\frac{\partial w}{\partial\overline{p}}>=\lambda. \tag{54}$$

Здесь t — временная переменная, $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)$ — пространственные переменные, $\overline{p}=(p_1,p_2,p_3)$ — импульсы, $\dfrac{\partial w}{\partial\overline{x}}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial x_1},\dfrac{\partial w}{\partial x_2},\dfrac{\partial w}{\partial x_3}\right)$, $\dfrac{\partial w}{\partial\overline{p}}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial p_1},\dfrac{\partial w}{\partial p_2},\dfrac{\partial w}{\partial p_3}\right)$ — градиенты по переменным $\overline{x}$, $\overline{p}$ соответственно, $\overline{E}=(E_1,E_2,E_3)$, $\overline{B}=(B_1,B_2,B_3)$ — вектора электрической и магнитной напряженности, причем $E_i=E_i(t,\overline{x})$, $B_i=B_i(t,\overline{x})$, $i=1,2,3$, $w=w(t,\overline{x},\overline{p})$ — плотность распределения частиц, $\lambda=\lambda(t,\overline{x},\overline{p})$ — некоторая функция (как правило, определяется интегральной информацией от функции распределения

w), символы $<,>$, $\times$ соответствуют скалярному и векторному произведению векторов.

Один из возможных путей решения уравнения (54) основан на методе моментов. Функция распределения представляется в виде ряда

$$w = w_0(t, \overline{x}, \overline{p}) \sum_{\alpha} a_{\alpha}(t, \overline{x}) P_{\alpha}(t, \overline{x}, \overline{p})$$

по некоторой независимой системе полиномов P_{α}. (Так в методе Грэда используется разложение по полиномам Эрмита.) Число ненулевых коэффициентов $a_{\alpha}(t, \overline{x})$ в разложении (54) вообще говоря бесконечно. С физической точки зрения эти коэффициенты являются макроскопическими параметрами среды (первые коэффициенты в разложении Грэда трактуются как тензора напряжений и теплового потока). В зависимости от изучаемого круга вопросов и от точности приближения ограничиваются некоторой конечной подсистемой. Таким образом получается приближенное решение уравнения (54). На практике часто используется 13–моментное приближение, что соответствует учету в разложении по полиномам Эрмита трех первых ненулевых членов.

Здесь рассматривается задача о нахождении точных представлений для решения w и коэффициентов λ, $\overline{B}$, $\overline{E}$ уравнения (54) на основе следующего представления для функций w и λ:

$$w = \mathrm{e}^{-|\overline{p}|^2} \sum_{n=0}^{N} A_n, \;\; A_n = \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} p_1^i p_2^j p_3^k, \tag{55}$$

$$\lambda = \mathrm{e}^{-|\overline{p}|^2} \sum_{n=0}^{N+1} \Lambda_n, \;\; \Lambda_n = \sum_{i+j+k=n} b_{ijk} p_1^i p_2^j p_3^k, \tag{56}$$

где $|\overline{p}|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, коэффициенты a_{ijk}, b_{ijk} — аналитические функции от переменных t и $\overline{x}$, N — фиксированное натуральное число ≥ 1, индексы i, j, k целые неотрицательные.

Показано, что если часть коэффициентов b_{ijk} в представлении (56) для функции λ фиксировать, то все коэффициенты a_{ijk} в представлении (55) функции w определяются из решения системы типа Коши-Ковалевской, а коэффициенты векторов $\overline{B}$, $\overline{E}$ и оставшаяся часть коэффициентов функции λ может быть однозначно определена из некоторой алгебраической системы уравнений.

В качестве примера рассмотрим случай $N = 2$. Представление (55), (56) для функций w, λ запишем в виде

$$w = e^{-|\overline{p}|^2} \left(a(t, \overline{x}) + \sum_{i=1}^{3} a_i(t, \overline{x}) p_i + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(t, \overline{x}) p_i p_j \right), \tag{57}$$

(58)

$$\lambda = e^{-|\overline{p}|^2} \left(\lambda_0(t, \overline{x}) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t, \overline{x}) p_i + \sum_{i,j=1}^{3} \lambda_{ij}(t, \overline{x}) p_i p_j + \sum_{i,j,k=1}^{3} \lambda_{ijk}(t, \overline{x}) p_i p_j p_k \right),$$

где коэффициенты a, a_i, a_{ij}, λ_0, λ_i, λ_{ij}, λ_{ijk} — аналитические функции симметричные по своим индексам.

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{2a_{11}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} - \lambda_{111}\right), \\
U_2 &= \frac{1}{2a_{22}}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} - \lambda_{222}\right), \\
U_3 &= \frac{1}{a_3}\left(\lambda_0 - \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{a_1}{2a_{11}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} - \lambda_{111}\right) - \frac{a_2}{2a_{22}}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} - \lambda_{222}\right)\right), \\
V_1 &= \frac{4}{\triangle}\left(b_3 a_{12} a_{13} - b_1 a_{12} a_{23} - b_2\left(a_{12}a_{23} + a_{11}a_{13} - a_{22}a_{13}\right)\right), \\
V_2 &= \frac{4}{\triangle}\left(b_3 a_{12} a_{23} - b_2 a_{12} a_{13} + b_2\left(a_{11}a_{23} - a_{22}a_{23} - a_{12}a_{13}\right)\right), \\
V_3 &= \frac{4}{\triangle}\left(b_3 a_{13} a_{23} - b_1 a_{23}^2 - b_2 a_{13}^2\right), \\
\alpha &= \frac{\partial a}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial t} + 2\sum_{k=1}^{3} U_k a_{1k} - 2aU_1 + a_3 V_2 - a_2 V_3, \\
\beta &= \frac{\partial a}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial t} + 2\sum_{k=1}^{3} U_k a_{2k} - 2aU_2 + a_1 V_3 - a_3 V_1, \\
\gamma &= \frac{1}{3}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + 2\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} - 2a_{11}U_2 - 4a_{12}U_1\right), \\
\theta &= \frac{1}{3}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} + 2\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} - 2a_{22}U_1 - 4a_{12}U_2\right),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\triangle &= 8\left(a_{12}(a_{23}^2 - a_{13}^2) + a_{13}a_{23}(a_{11} - a_{22})\right), \\
b_1 &= \lambda_{11} - \frac{\partial a_{11}}{\partial t} - \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{a_1}{a_{11}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} - \lambda_{111}\right), \\
b_2 &= \lambda_{22} - \frac{\partial a_{22}}{\partial t} - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{a_2}{a_{22}}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} - \lambda_{222}\right), \\
b_3 &= 2\lambda_{12} - 2\frac{\partial a_{12}}{\partial t} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{a_2}{a_{11}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} - \lambda_{111}\right) + \frac{a_1}{a_{22}}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} - \lambda_{222}\right).
\end{aligned}
$$

Справедлива следующая

Теорема 8. [19] *Пусть 1) компоненты* λ_0, λ_3, λ_{11}, λ_{12}, λ_{22}, λ_{13}, λ_{23}, λ_{33}, λ_{111}, λ_{113}, λ_{123}, λ_{133}, λ_{222}, λ_{223}, λ_{233}, λ_{333} *функции* λ *— произвольные аналитические функции, 2) функции* a, a_i, a_{ij}, $i,j = 1,2,3$, *являются* *решением задачи Коши*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x_3} &= \lambda_3 + 2aU_3 - 2\sum_{k=1}^{3} a_{3k}U_k + a_1V_2 - a_2V_1 - \frac{\partial a_3}{\partial t},\\
\frac{\partial a_1}{\partial x_3} &= \lambda_{13} + 2(a_3U_1 + a_1U_3) + 2(a_{11} - a_{33})V_2 + 2a_{23}V_3 -\\
&\quad -2a_{12}V_1 - 2\frac{\partial a_{13}}{\partial t} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1},\\
\frac{\partial a_2}{\partial x_3} &= \lambda_{23} + 2(a_3U_2 + a_2U_3) + 2(a_{33} - a_{22})V_1 + 2a_{12}V_2 -\\
&\quad -2a_{13}V_3 - 2\frac{\partial a_{23}}{\partial t} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2},\\
\frac{\partial a_3}{\partial x_3} &= \lambda_{33} + 2a_3U_3 + 2a_{13}V_2 - 2a_{23}V_1 - \frac{\partial a_{33}}{\partial t},\\
\frac{\partial a_{11}}{\partial x_3} &= 3\lambda_{113} + 2a_{11}U_3 + 4a_{13}U_1 - 2\frac{\partial a_{13}}{\partial x_1},\\
\frac{\partial a_{12}}{\partial x_3} &= 6\lambda_{123} + 2a_{23}U_1 + 2a_{13}U_2 + 2a_{12}U_3 - \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{13}}{\partial x_2},\\
\frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} &= \frac{3}{2}\lambda_{133} + a_{33}U_1 + 2a_{13}U_3 - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{33}}{\partial x_1},\\
\frac{\partial a_{22}}{\partial x_3} &= 3\lambda_{113} + 2a_{22}U_3 + 4a_{23}U_2 - 2\frac{\partial a_{23}}{\partial x_2},\\
\frac{\partial a_{23}}{\partial x_3} &= \frac{3}{2}\lambda_{233} + a_{33}U_2 + 2a_{23}U_3 - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{33}}{\partial x_2},\\
\frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} &= \lambda_{333} + 2a_{33}U_3,
\end{aligned}
$$

с голоморфными по переменным t, x_1, x_2 начальными данными $a(t, x_1, x_2, x_3^0)$, $a_i(t, x_1, x_2, x_3^0)$, $a_{ij}(t, x_1, x_2, x_3^0)$, $i, j = 1, 2, 3$, такими, что выполнены следующие неравенства

$$
\begin{gathered}
a_{11}|_{x_3=x_3^0} \neq 0, \quad a_{22}|_{x_3=x_3^0} \neq 0, \quad a_3|_{x_3=x_3^0} \neq 0,\\
a_{12}(a_{23}^2 - a_{13}^2) + a_{13}a_{23}(a_{11} - a_{22})|_{x_3=x_3^0} \neq 0.
\end{gathered}
$$

Тогда вектора $\overline{B}$, $\overline{E}$ определенные формулами

$$\overline{B} = \overline{V},\ \overline{E} = \overline{U},$$

и функции w, λ имеющие представление (57), (58), где оставшиеся компоненты λ_1, λ_2, λ_{112}, λ_{122} функции λ определены формулами

$$\lambda_1 = \alpha,\ \lambda_2 = \beta,\ \lambda_{112} = \gamma,\ \lambda_{122} = \theta,$$

являются точным решением уравнения (54).

Замечание. С практической точки зрения важно рассматривать уравнение (54) с правой частью λw (задача с поглощением). Ясно, что замена функции w на $u = \exp w$ приводит к такому уравнению. Поэтому полученное представление решения $(w, \lambda, \overline{E}, \overline{B})$ после соответствующей замены формулы (55) можно использовать для изучения процессов поглощения.

Перейдем к квантовым уравнениям. Квантовые кинетические уравнения описывают эволюцию частиц при сильных взаимодействиях. Они составляют основу квантовой механики. В монографии Д.И. Блохинцева (см. [20], стр. 99) отмечается, что на основе квантовых кинетических уравнений "были вскрыты изумительные закономерности атомного мира, позволившие понять строение атомов и молекул, закономерности их взаимодействия. Концепция квантовой механики дополненная теорией относительности, позволяет успешно проникать в мир элементарных частиц."В этой связи следует отметить, что квантовые кинетические уравнения могут играть первостепенную роль при описании процессов в наноструктурах и нанодиагностике. При этом обратные задачи для квантовых кинетических уравнений как задачи определения причин по следствиям, как задачи контроля и управления должны занять особое место в нанотехнологиях.

В данной работе рассматривается обратная задача для приближенного квантового уравнения.

Квантовое кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}-\frac{i}{(2\pi)^n}\int_{R^{2n}}\left(\Phi\left(x-\frac{\hbar}{2}y,t\right)-\Phi\left(x+\frac{\hbar}{2}y,t\right)\right)$$

$$\times e^{iy(p-p^{'})}w(x,p^{'},t)dydp^{'}=\lambda(x,p,t), \tag{59}$$

где $p=(p_1,...,p_n)\in\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,...,x_n)\in D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, D — область с гладкой границей ∂D вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $t\geq 0$, $\Phi(x,t)$ — потенциал, $w(x,p,t)$ — квантовая функция распределения, $\lambda(x,p,t)$ — функция источников, возможно функционально-интегрально зависящая от w при наличии столкновительных явлений, $\hbar$ — постоянная Планка.

Предполагая наличие всех производных функций $w(x,p,t)$, $\Phi(x,t)$ разложением подынтегрального выражения уравнения (59) в ряд Тейлора по $\hbar$ получают квантовое кинетическое уравнение бесконечного порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m a_m\sum_{j_1,\dots,j_{2m-1}=1}^{n}\frac{\partial^{2m-1}w}{\partial p_{j_1}...\partial p_{j_{2m-1}}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_{2m-1}}}$$

$$=\lambda(x,p,t), \tag{60}$$

где $a_m=\dfrac{\hbar^{2m-2}}{(2m-1)!2^{2m-2}}$. Конечные приближения уравнения, в том случае и классические ($N=1$), следуют из (60) стандартным способом — оставлением конечного числа слагаемых:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}+\sum_{m=1}^{N}(-1)^m a_m\sum_{j_1,\dots,j_{2m-1}=1}^{n}\frac{\partial^{2m-1}w}{\partial p_{j_1}...\partial p_{j_{2m-1}}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_{2m-1}}}$$

$$=\lambda(x,p,t), \tag{61}$$

При $N=1$ уравнение (61) принимает классический вид

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}=\lambda.$$

Оказывается специфика уравнения (61) позволяет получить тождество, на основе которого исследуются вопросы единственности и устойчивости решения обратных задач для уравнения (61), в частности, задачи поиска функций $w(x,p,t)$, $\lambda(x,p,t)$ при некоторых ограничениях на $\lambda(x,p,t)$. Это тождество также как и в ранее известном случае при $N = 1$ содержит дивергентные слагаемые (которые исчезают при интегрировании в вопросах единственности решения) и формы четных степеней относительно частных производных функции $w(x,p,t)$. При ограничении на потенциал типа выпуклости эти формы оказываются положительно определенными, что и приводит к единственности решения обратной задачи.

Сформулируем сначала результат в одномерном случае.

Лемма 4. *Имеет место тождество*

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}+\sum_{m=1}^{N}(-1)^m a_m\frac{\partial^{2m-1}w}{\partial p^{2m-1}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}a_m\left(\frac{\partial^m w}{\partial p^m}\right)^2\frac{\partial^{2m}\Phi}{\partial x^{2m}}+div$$

где

$$\begin{aligned} div \quad = \quad & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial p}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial p}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ & +\sum_{m=1}^{N}(-1)^m\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{\partial}{\partial p}\left(a_m\frac{\partial^k w}{\partial p^{k-1}\partial x}\frac{\partial^{2m-k}w}{\partial p^{2m-k}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}}\right) \\ & +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{m=1}^{N}a_m\left(\frac{\partial^m w}{\partial p^m}\right)^2\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}}\right). \end{aligned}$$

Замечание 1. При условии сходимости рядов имеет смысл и предельный случай $N\to\infty$, то есть тождество для уравнения (60).

Замечание 2. Если $\dfrac{\partial^{2m}\Phi}{\partial x^{2m}}\leq 0$, то выражение

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}a_m\left(\frac{\partial^m w}{\partial p^m}\right)^2\frac{\partial^{2m}\Phi}{\partial x^{2m}}\geq 0$$

и это может быть использовано при поиске функций $\lambda(x,p,t)$ таких, что $\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial p}=0$.

В многомерном случае справедлива

Лемма 5. *Имеет место тождество*

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial p_s} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial w}{\partial x_j} \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{N} (-1)^m a_m \sum_{j_1,\ldots,j_{2m-1}=1}^{n} \frac{\partial^{2m-1} w}{\partial p_{j_1} \ldots \partial p_{j_{2m-1}}} \frac{\partial^{2m-1} \Phi}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{2m-1}}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} |\mathrm{grad}_x w|^2$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} a_m \sum_{j_1,\ldots,j_{2m}=1}^{n} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_1} \ldots \partial p_{j_m}} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_{m+1}} \ldots \partial p_{j_{2m}}} \frac{\partial^{2m} \Phi}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{2m}}}$$

$$+ div,$$

где $|\mathrm{grad}_x w|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \right)^2$ *и под div понимаются дивергентные слагаемые по переменным* x, p, t.

Рассмотрим обратную задачу поиска бесконечно дифференцируемых функций $w(x,p,t)$, $\lambda(x,p,t)$, $x \in D \subset R^n$, $p \in \widetilde{D} \subset R^n$, $0 \leq t \leq T$, таких, что

1) Функции $w(x,p,t)$, $\lambda(x,p,t)$ удовлетворяют уравнению (61).

2) Для функции $w(x,p,t)$ заданы начальные и краевые условия

$$w|_{\partial D} = v(s,p,t), \;\; s \in \partial D,$$

$$w|_{t=0} = w_0(x,p), \;\; w|_{t=T} = w_T(x,p),$$

3) Известны производные функции $w(x,p,t)$ по переменным p до $N-1$ – го порядка на границе области $\widetilde{D}$

$$D_p^{\alpha} w|_{\partial \widetilde{D}} = w_{\alpha}(x, s', t), \;\; s^{'} \in \partial \widetilde{D}, \;\; |\alpha| \leq N-1.$$

Здесь D_p^{α} — дифференцирование по переменным p, α — мультииндекс.

Теорема 9. *Если* $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_j \partial x_j} = 0$ *и квадратичные формы*

$$- \sum_{j_1,\ldots,j_{2m}=1}^{n} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_1} \ldots \partial p_{j_m}} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_{m+1}} \ldots \partial p_{j_{2m}}} \frac{\partial^{2m} \Phi}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{2m}}}$$

положительно определены, $m = 1, \ldots, N$, *то обратная задача 1)-3) поиска функций* $w(x,p,t)$, $\lambda(x,p,t)$ *в области* $\Omega = D \times \widetilde{D} \times [0,T]$ *имеет не более одного бесконечно дифференцируемого решения* $(w(x,p,t), \lambda(x,p,t))$ *в замыкании* $\overline{\Omega}$.

Возникает вопрос о существовании аналогичных тождеств в случае более общей функции Гамильтона $H(x,p,t)$. Если предположить, что H зависит от всего набора переменных x, p, t, то квантовое кинетическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w(x,p,t)}{\partial t}\\
(62)\qquad &-\frac{\mathrm{i}}{\hbar(2\pi)^6}\int\left[H\left(x^{'}-\frac{1}{2}\hbar\gamma,p'+\frac{1}{2}\hbar\tau,t\right)-H\left(x'+\frac{1}{2}\hbar\gamma,p'-\frac{1}{2}\hbar\tau,t\right)\right]\\
&\times w(x',p',t)\exp\left\{\mathrm{i}\tau(p'-p)+i\gamma(x'-x)\right\}d\tau d\gamma dx'dp'=\lambda(x,p,t).
\end{aligned}$$

Из (62) разложением подынтегральной функции в ряд Тейлора можно получить дифференциальное уравнение бесконечного порядка аналогичное уравнению (60) и конечные уравнения аналогичные (61). Например, при $N=3$ получим уравнение

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial x_j}-\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial p_j}\right)+\\
(63)\qquad &+\frac{1}{24}\sum_{i,k,l=1}^{n}\left(\frac{\partial^3 H}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial^3 w}{\partial p_i\partial p_k\partial p_l}-3\frac{\partial^3 H}{\partial x_i\partial x_k\partial p_l}\frac{\partial^3 w}{\partial p_i\partial p_k\partial x_l}+\right.\\
&\left.+3\frac{\partial^3 H}{\partial x_i\partial p_k\partial p_l}\frac{\partial^3 w}{\partial p_i\partial x_k\partial x_l}-\frac{\partial^3 H}{\partial p_i\partial p_k\partial p_l}\frac{\partial^3 w}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}\right)=\lambda(x,p,t).
\end{aligned}$$

Оказывается, если функция $H(x,p,t)$ имеет представление

$$(64)\qquad H(x,p,t)=H_0(x,t)+H_1(p,t),$$

то для уравнения (63) справедливо тождество

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial\lambda}{\partial p_j}+\frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)=\\
(65)\qquad &=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 H_1}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial p_i}\frac{\partial w}{\partial p_j}+\\
&+\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^4 H_1}{\partial p_i\partial p_j\partial p_k\partial p_l}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k\partial x_l}\\
&-\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^4 H_0}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial^2 w}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial^2 w}{\partial p_k\partial p_l}+div.
\end{aligned}$$

Возникает вопрос о существовании тождества аналогичного тождеству (65), но без предположения (64). В общем случае получить такое тождество нельзя. В одномерном случае тождество существует, как показывает ниже следующий пример, но знакоопределенность квадратичной формы требует дополнительных условий на функцию H.

Пример. Пусть $n=1$. Тогда (63) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial p}+\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}\frac{\partial^3 w}{\partial p^3}-3\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial p^2}+\right.\\
&\left.+3\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial p}-\frac{\partial^3 H}{\partial p^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)=\lambda(x,p,t).
\end{aligned}$$

При выводе тождества будем использовать знак сравнения "$\equiv$"для того чтобы показать, что равенство выполнено по модулю дивергентных слагаемых.

По лемме 4

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial \lambda}{\partial x}-\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)^2\equiv$$
$$\equiv-\frac{1}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\left(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}\frac{\partial^3 w}{\partial p^3}-3\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial p^2}+3\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial p}-\frac{\partial^3 H}{\partial p^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right).$$

Далее

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\left(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}\frac{\partial^3 w}{\partial p^3}-3\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial p^2}+3\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial p}-\frac{\partial^3 H}{\partial p^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\\
&=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^3 H}{\partial x^2\partial p}\right)+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}\right)\right.\\
&\left.-2\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\frac{\partial^3 H}{\partial x^2\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 H}{\partial p^3}\right)\right]\\
&\equiv\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^3 H}{\partial x^2\partial p}+2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}\\
&-2\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\frac{\partial^3 H}{\partial x^2\partial p}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}-\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 H}{\partial p^3}\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)^2\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^3 H}{\partial p^3}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\right)^2\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}\\
&-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\right)^2\frac{\partial^3 H}{\partial x^2\partial p}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}-\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 H}{\partial p^3}\\
&\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial^4 H}{\partial p^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^4 H}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)^2+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}-\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 H}{\partial p^3}\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial^4 H}{\partial p^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^4 H}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)^2\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\right)^2\right)\right]\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\right)^2\right)\frac{\partial^3 H}{\partial x\partial p^2}\\
&-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)-\frac{\partial}{\partial p}\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\right)^2\right)\right]\frac{\partial^3 H}{\partial x^2\partial p}-\frac{\partial}{\partial p}\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\right)^2\right)\frac{\partial^3 H}{\partial x^2\partial p}\\
&\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial^4 H}{\partial p^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^4 H}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^4 H}{\partial x^3\partial p}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^4 H}{\partial x\partial p^3}.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\equiv\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)^2\\
+\frac{1}{24}\left[\frac{\partial^4 H}{\partial p^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial^4 H}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)^2\right]\\
+\frac{1}{12}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^4 H}{\partial x^3\partial p}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^4 H}{\partial x\partial p^3}\right].
\end{aligned}$$

Полученная квадратичная форма относительно производных $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial p}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial p^2}$ не может быть знакоопределенной без дополнительного предположения на функцию H. Таким предположением является естественное требование

$$\frac{\partial^4 H}{\partial x^3 \partial p} = \frac{\partial^4 H}{\partial x \partial p^3} = 0,$$

то есть

$$H = H_0(x,t) + H_1(p,t) + axp^2 + bxp + cx^2 p,$$

где a, b, c — некоторые константы.

Список литературы

[1] Н.Л. Абашеева, *Линейная обратная задача для операторно-дифференциального уравнения с параметром*, Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007, 5–14.

[2] Ю.Е. Аниконов, Н.Б. Аюпова, *Формулы для решений начально-краевых задач и коэффициентов уравнений 2-го порядка* Новосибирск, 2006. - 46 с. - Препринт РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; N 171.

[3] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нещадим, *Тождество для приближенных квантовых уравнений и обратные задачи*, Сибирский журнал индустриальной математики, (2007), 3–9.

[4] А.И. Кожанов, *О разрешимости первой начально-краевой задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа высокого порядка*, Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2007, 172–181.

[5] А.И. Кожанов, И.Р. Валитов, *О разрешимости некоторых гиперболических обратных задач с двумя неизвестными коэффициентами*, Математические заметки ЯГУ, **14** (2007), 3–16.

[6] М.В. Нещадим, *Некоторые вопросы конструктивных методов в теории обратных задач*, Сибирский журнал индустриальной математики, **10** (2007), 101–109.

[7] Anikonov Yu.E. Selected formulas of the theory of inverse problems JIIPP ,**15** (2007), 549–568.

[8] Yu.E. Anikonov, N.B. Ayupova, *Table of solutions and coefficient for second-order differential equations and inverse problems*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **15** (2007), 867–892.

[9] M.V. Neshchadim, *Inverse problems for the Boltsmann-Vlasov kinetic equations representaation for solutions and coefficients*, Journal of Applied and Indusrial Mathematics, **1** (2007), 90–99.

[10] Ю.Е. Аниконов *Представления решений и обратные задачи для эволюционных и дифференциально-разностных уравнений* Новосибирск: ИМ СО РАН, 2003. (Препринт № 108 / ИМ СО РАН).

[11] Yu. E. Anikonov, *Inverse problems for evolution and differential-difference equations with a parameter*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **11** (2003), 439–473.

[12] N.L. Abasheeva, *Identification of a source in parabolic and hyperbolic equations with a parameter*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, (2007).

[13] А.И. Прилепко, А.Б. Костин, *О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением*, Математический сборник, **183** (1992), 49–68.

[14] А.И. Прилепко, А.Б. Костин, *Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II*, Сибирский математический журнал, **34** (1993), 147–162.

[15] A.I. Kozhanov, *Composite Type Equations and Inverse Problems*, Utrecht: VSP, 1999.

[16] S.G. Pyatkov, *Solvability of some inverse problems for parabolic equations*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **12** (2004), 397–412.

[17] Н.Л. Абашеева, *О линейной обратной задаче для параболического уравнения второго порядка*, Сибирский журнал индустриальной математики, **9** (2006), 3–12.

[18] Х. Трибель, *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы*, Мир, Москва, 1980.

[19] М.В. Нещадим, *Некоторые представления решений и коэффициентов кинетического уравнения электродинамики*, Сибирский журнал индустриальной математики, **6** (2003), 114–118.

[20] Д.И. Блохинцев, *Квантовая механика*, Изд-во Московского университета, Москва, 1988.

Юрий Евгеньевич Аниконов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anikon@math.nsc.ru

Нина Леонидовна Абашеева
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anl@math.nsc.ru

Наталья Борисовна Аюпова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ayupova@math.nsc.ru

Александр Иванович Кожанов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: kozhanov@math.nsc.ru

Михаил Владимирович Нещадим
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: neshch@math.nsc.ru

Ильдар Р. Валитов
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина 49,
453103, Стерлитамак, Россия