S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 543–548 (2008) УДК 519.6
MSC 65M30

МЕТОД ПЕРЕСЧЕТА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

А. Н. КОНОВАЛОВ, С. Б. СОРОКИН, Е. И. СТОДОЛЬСКАЯ

Abstract. This paper is a review of the authors articles devoted to investigation of an algorithm solving an confluent boundary value problem for a differential equation. It is implemented by an iterative procedure in which the similar problem with inconfluent conditions is solved.

Keywords: differential equation, algorithm, inconfluent condition

В работе приводятся результаты исследований алгоритма, позволяющего получать решение вырожденной (краевые условия) задачи с помощью итерационного процесса, на каждом шаге которого решается задача с тем же самым дифференциальным оператором, но с краевыми условиями, гарантирующими ее невырожденность.

Рассмотрим задачу

$$-div\, grad\, u(x_1,x_2) = f(x_1,x_2), \qquad (x_1,x_2) \in D = [0,1]\times[0,1], \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2}$$

где $\Gamma = \partial D$ граница области D.

Введем на D сетки

$$\overline{\omega} = \left(\ (x_{1\,i}, x_{2\,j}),\ i=\overline{1,N}_{x_1}, j=\overline{0,N_{x_2}+1}\ \right) \cup \left(\ (x_{1\,i}, x_{2\,j}),\ i=0, N_{x_1}+1, j=\overline{1,N}_{x_2}\ \right),$$

Konovalov A.N., Sorokin S.B., Stogol'skaya E.I., Method of Revision of Boundary Conditions for Neumann Problem .

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №48.

Поступила 1 сентября 2008 г., опубликована 27 ноября 2008 г.

$$\omega = \left(\ (x_{1\,i}, x_{2\,j}),\ i=\overline{1,N}_{x_1}, j=\overline{1,N}_{x_2} \ \right),$$

где $h_{x_1} = \frac{1}{N_{x_1}+1}$, $h_{x_2} = \frac{1}{N_{x_2}+1}$, $x_{1\,i} = ih_{x_1}$, $x_{2\,j} = jh_{x_2}$.

В качестве дискретного аналога (1)-(2) выберем

$$-y_{x_1\,\overline{x}_1,\,ij} - y_{x_2\,\overline{x}_2,\,ij} = f_{ij}, \qquad (x_{1\,i}, x_{2\,j}) \in \omega, \tag{3}$$

$$l_h y_{ij} = g_{ij}, \qquad (x_{1\,i}, x_{2\,j}) \in \gamma = \overline{\omega} \setminus \omega. \tag{4}$$

Здесь соотношения (4) аппроксимируют (2) со вторым порядком точности [?]. Для левой и правой частей границы области D они выглядят следующим образом

$$-\frac{y_{1j} - y_{0j}}{h_{x_1}} = 0.5 f_{0j}, \qquad \frac{y_{N_{x_2}+1\,j} - y_{N_{x_2}\,j}}{h_{x_1}} = 0.5 f_{N_{x_2}+1\,j} \quad j = \overline{1, N_{x_2}}, \tag{5}$$

Для решения задачи (3)-(4), которую будем считать разрешимой, применим следующий итерационный алгоритм:

A1. Считая заданными значения y^k_{ij} для $(x_{1\,i}, x_{2\,j}) \in \overline{\omega}$ и используя соотношения (4), находим значения y^{k+1}_{ij} для $(x_{1\,i}, x_{2\,j}) \in \gamma$. Например, для левой и правой вертикальных частей границы области D это означает вычисление $y^{k+1}_{0\,j}$ и $y^{k+1}_{N_{x_2}+1\,j}$ из формул (5):

$$-\frac{y^k_{1j} - y^{k+1}_{0j}}{h_{x_1}} = 0.5 f_{0j}, \qquad \frac{y^{k+1}_{N_{x_2}+1\,j} - y^k_{N_{x_2}\,j}}{h_{x_1}} = 0.5 f_{N_{x_2}+1\,j} \quad j = \overline{1, N_{x_2}};$$

A2. Вычисляем значения y^{k+1}_{ij} во внутренних узлах сетки $(x_{1\,i}, x_{2\,j}) \in \omega$, решая для (3) задачу Дирихле при заданных краевых значениях y^{k+1}_{ij} $(x_{1\,i}, x_{2\,j}) \in \gamma$;

A3. Значения y^{k+1}_{ij} для $(x_{1\,i}, x_{2\,j}) \in \overline{\omega}$ определены, переходим к A1.

Таким образом, решение исходной вырожденной задачи Неймана (3)-(4) мы заменяем решением последовательности невырожденных задач (3) с условием Дирихле. Алгоритм A1-A3 описывает переход от y^k_{ij} к y^{k+1}_{ij}, то есть является двухслойным итерационным методом. Исследуем его сходимость.

В соответствии разбиением сетки $\overline{\omega} = \omega \cup \gamma$, под y_ω будем понимать сеточные функции, заданные на ω, а под y_γ, заданные на γ. Множества таких сеточных функций будем обозначать V_ω и V_γ соответственно. Скалярные произведения в V_ω, V_γ и $V = V_\omega \times V_\gamma$ зададим следующим образом

$$v_\omega, w_\omega \in V_\omega, \qquad (v_\omega, w_\omega)_\omega = \sum_{(x_{1\,i}, x_{2\,j}) \in \omega} v_{\omega,\,i\,j}\ w_{\omega,\,i\,j}\ h_{x_1} h_{x_2},$$

$$v_\gamma, w_\gamma \in V_\gamma, \qquad (v_\gamma, w_\gamma)_\gamma = \sum_{(x_{1\,i}, x_{2\,j}) \in \gamma} v_{\gamma,\,i\,j}\ w_{\gamma,\,i\,j}\ h_{x_1} h_{x_2},$$

$$v = \begin{pmatrix} v_\omega \\ v_\gamma \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} v_\omega \\ v_\gamma \end{pmatrix} \in V, \qquad (v, w)_{\overline{\omega}} = (v_\omega, w_\omega)_\omega + (v_\gamma, w_\gamma)_\gamma.$$

Тогда в матрично-операторной форме задача (3)-(4) имееет вид:

$$Ay = \begin{pmatrix} A_{\omega\,\omega} & -A_{\omega\,\gamma} \\ -A_{\gamma\,\omega} & A_{\gamma\,\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_\omega \\ y_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\omega \\ f_\gamma \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Операторы из (6) действуют следующим образом.

$$A_{\omega\,\omega} : V_\omega \to V_\omega,$$

$$(A_{\omega\,\omega} y_\omega)_{\,i\,j} = \frac{-y_{\,i-1\,j} + 2y_{\,i\,j} - y_{\,i+1\,j}}{h_{x_1}^2} + \frac{-y_{\,i\,j-1} + 2y_{\,i\,j} - y_{\,i\,j+1}}{h_{x_2}^2},$$

причем полагается $y_{\,i\,j} = 0$, если $(x_{1\,i}, x_{2\,j}) \in \gamma$,

$$A_{\gamma\,\gamma} : V_\gamma \to V_\gamma,$$

$$(A_{\gamma\,\gamma} y_\gamma)_{\,i\,j} = \begin{cases} \frac{y_{\,i\,j}}{h_{x_1}^2} & i = 0, N_{x_1} + 1, \quad j = \overline{1, N}_{x_2}, \\ \frac{y_{\,i\,j}}{h_{x_2}^2} & j = 0, N_{x_2} + 1, \quad i = \overline{1, N}_{x_1} \end{cases}$$

$$A_{\omega\,\gamma} : V_\gamma \to V_\omega,$$

$$(A_{\omega\,\gamma} y_\gamma)_{\,i\,j} = \begin{cases} \frac{y_{\,i-1\,j}}{h_{x_1}^2} + \delta_{1\,j} \frac{y_{\,i\,j-1}}{h_{x_2}^2} + \delta_{N_{x_2}\,j} \frac{y_{\,i\,j+1}}{h_{x_2}^2} & i = 1, \quad j = \overline{1, N}_{x_2}, \\ \frac{y_{\,N_{x_1}+1\,j}}{h_{x_1}^2} + \delta_{1\,j} \frac{y_{\,i\,j-1}}{h_{x_2}^2} + \delta_{N_{x_2}\,j} \frac{y_{\,i\,j+1}}{h_{x_2}^2} & i = N_{x_1}, \quad j = \overline{1, N}_{x_2}, \\ \frac{y_{\,i\,j-1}}{h_{x_2}^2} & j = 1, \quad i = \overline{2, N_{x_1} - 1}, \\ \frac{y_{\,i\,N_{x_2}+1}}{h_{x_2}^2} & j = N_{x_2}, \quad i = \overline{2, N_{x_1} - 1}, \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

$$A_{\gamma\,\omega} : V_\omega \to V_\gamma,$$

$$(A_{\gamma\,\omega} y_\omega)_{\,i\,j} = \begin{cases} \frac{y_{\,i+1\,j}}{h_{x_1}^2} & i = 0, \quad j = \overline{1, N}_{x_2}, \\ \frac{y_{\,N_{x_1}\,j}}{h_{x_1}^2} & i = N_{x_1} + 1, \quad j = \overline{1, N}_{x_2}, \\ \frac{y_{\,i\,j+1}}{h_{x_2}^2} & j = 0, \quad i = \overline{1, N}_{x_1}, \\ \frac{y_{\,i\,N_{x_2}}}{h_{x_2}^2} & j = N_{x_2} + 1, \quad i = \overline{1, N}_{x_1} \end{cases}$$

здесь $\delta_{i\,j}$ символ Кронеккера.

В принятых обозначениях алгоритм А1-А3 записывается в следующим образом

(7)
$$\begin{array}{rcl} A_{\omega\,\omega} y_\omega^{k+1} - A_{\omega\,\gamma} y_\gamma^{k+1} & = & f_\omega, \\ -A_{\gamma\,\omega} y_\omega^{k+1} + A_{\gamma\,\gamma} y_\gamma^{k} & = & f_\gamma \end{array}.$$

Итерационный процесс (7) представляет из себя блочный метод Гаусса-Зейделя, канонический вид которого

(8)
$$\begin{pmatrix} A_{\omega\,\omega} & -A_{\omega\,\gamma} \\ 0 & A_{\gamma\,\gamma} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} y_\omega^{k+1} \\ y_\gamma^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_\omega^{k} \\ y_\gamma^{k} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} A_{\omega\,\omega} & -A_{\omega\,\gamma} \\ -A_{\gamma\,\omega} & A_{\gamma\,\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_\omega^{k} \\ y_\gamma^{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\omega \\ f_\gamma \end{pmatrix}.$$

Из (6)-(7) следует, что погрешность $z^k = y^k - y$ принадлежит для любого k подпространству

(9)
$$U = \{ v = \begin{pmatrix} v_\omega \\ v_\gamma \end{pmatrix} \in V : \quad A_{\omega\,\omega} v_\omega - A_{\omega\,\gamma} v_\gamma = 0. \}$$

Покажем, что переобуславливатель

$$B = \begin{pmatrix} A_{\omega\,\omega} & -A_{\omega\,\gamma} \\ 0 & A_{\gamma\,\gamma} \end{pmatrix} \tag{10}$$

симметричен и положительно определен в подпространстве U.

Действительно из симметричности $A_{\gamma\,\gamma}$ в V_γ следует

$$\forall \quad v = \begin{pmatrix} v_\omega \\ v_\gamma \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} v_\omega \\ v_\gamma \end{pmatrix} \in U,$$

$$(Bv, w)_{\overline{\omega}} = (A_{\gamma\,\gamma} v_\gamma, w_\gamma)_\gamma = (v_\gamma, A_{\gamma\,\gamma} w_\gamma)_\gamma = (v, Bw)_{\overline{\omega}},$$

а из положительной определенности $A_{\gamma\,\gamma}$ имеем

$$\forall \quad v \in U, \qquad (Bv, v)_{\overline{\omega}} = (A_{\gamma\,\gamma} v_\gamma, v_\gamma)_\gamma \geq 0.$$

Причем, если $(A_{\gamma\,\gamma} v_\gamma, v_\gamma)_\gamma = 0$, то $v_\gamma = 0$ а тогда, из определения подпространства U, и $v_\omega = 0$. Из сказанного следует, что оператор B порождает в U норму $||v||_B = (Bv, v)_{\overline{\omega}}^{\frac{1}{2}}$.

Поэтому 2 необходимые и достаточные условия сходимости y^k к некоторому обобщенному решению y^* вырожденной задачи (6) имеют вид

$$|\mu| \leq 1, \quad \mu \neq -1, \tag{11}$$

где μ собственные числа оператора перехода $S = E - B^{-1}A$. В случае сходимости процесса скорость его сходимости определяется максимальным по модулю отличным от единицы μ. В свою очередь μ связаны формулой $\mu = 1 - \lambda$ с собственными числами λ обобщенной задачи на собственные значения $A\varphi = \lambda B\varphi$.

Таким образом, исследование сходимости (7) сводится к изучению спектральной задачи

$$\begin{pmatrix} A_{\omega\,\omega} & -A_{\omega\,\gamma} \\ -A_{\gamma\,\omega} & A_{\gamma\,\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_\omega \\ \varphi_\gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_{\omega\,\omega} & -A_{\omega\,\gamma} \\ 0 & A_{\gamma\,\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_\omega \\ \varphi_\gamma \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Умножая левую и правую части на $\begin{pmatrix} E & A_{\omega\,\gamma} A_{\gamma\,\gamma}^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}$, перейдем от (12) к эквивалентной задаче

$$\begin{pmatrix} A_{\omega\,\omega} - A_{\omega\,\gamma} A_{\gamma\,\gamma}^{-1} A_{\gamma\,\omega} & 0 \\ -A_{\gamma\,\omega} & A_{\gamma\,\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\omega \\ \psi_\gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_{\omega\,\omega} & 0 \\ 0 & A_{\gamma\,\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\omega \\ \psi_\gamma \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Для (13) очевидно, что сеточная функция $\psi \in V$ вида $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_\gamma \end{pmatrix}$ при любой $\psi_\gamma \in V_\gamma$ является собственной, отвечающей собственному числу равному единице. Число таких линейно независимых функций равно размерности V_γ.

Остальные собственные числа находятся из спектральной задачи

$$(A_{\omega\,\omega} - A_{\omega\,\gamma} A_{\gamma\,\gamma}^{-1} A_{\gamma\,\omega}) \psi_\omega = \lambda A_{\omega\,\omega} \psi_\omega. \tag{14}$$

В силу свойств дополнения Шура $(A_{\omega\,\omega} - A_{\omega\,\gamma} A^{-1}_{\gamma\,\gamma} A_{\gamma\,\omega}) \geq 0$. А учитывая, что $(A_{\omega\,\omega})^* = (A_{\omega\,\omega}) > 0$ и $(A_{\omega\,\gamma} A^{-1}_{\gamma\,\gamma} A_{\gamma\,\omega})^* = (A_{\omega\,\gamma} A^{-1}_{\gamma\,\gamma} A_{\gamma\,\omega}) > 0$ все собственные числа (13) удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \lambda \leq 1. \tag{15}$$

А поскольку $\mu = 1 - \lambda$, то условия сходимости (11) итерационного процесса (8) выполнены. Установим скорость его сходимости.

Для этого, как было отмечено выше, необходимо оценить максимальное по модулю отличное от единицы $\mu = 1 - \lambda$. Непосредственная проверка показывает, что для сеточной функции $e_\omega \in V_\omega$ тождественно равной единице справедливо

$$(A_{\omega\,\omega} - A_{\omega\,\gamma} A^{-1}_{\gamma\,\gamma} A_{\gamma\,\omega}) e_\omega = 0\, A_{\omega\,\omega} e_\omega.$$

Поэтому, учитывая (15), максимальному отличному от единицы $\mu = 1 - \lambda > 0$ будет соответствовать первое отличное от нуля λ задачи (14) (λ_2- второе по величине).

В соответствии с минимаксным принципом [**?**]

$$\lambda_2 = \min_{v_\omega \neq 0,\, (A_{\omega\,\omega} v_\omega,\, e_\omega)_\omega = 0} \frac{((A_{\omega\,\omega} - A_{\omega\,\gamma} A^{-1}_{\gamma\,\gamma} A_{\gamma\,\omega}) v_\omega, v_\omega)_\omega}{(A_{\omega\,\omega} v_\omega,\, v_\omega)_\omega}. \tag{16}$$

Лемма

Для $v_\omega \neq 0$, *удовлетворяющих ограничению* $(A_{\omega\,\omega} v_\omega,\, e_\omega)_\omega = 0$ *справедливо неравенство*

$$(A_{\omega\,\gamma} A^{-1}_{\gamma\,\gamma} A_{\gamma\,\omega}) v_\omega, v_\omega)_\omega \leq (1 - ch)\ (A_{\omega\,\omega} v_\omega,\, v_\omega)_\omega, \tag{17}$$

где константа с не зависит от параметра $h = \min{(h_1, h_2)}$.

Проиллюстрируем схему доказательства на одномерном случае, когда утверждение Леммы означает выполнение неравенства

$$\left(\frac{v_1^2}{h^2} + \frac{v_N^2}{h^2}\right) h \leq (1 - ch)\left[\frac{v_1^2}{h^2} h + \sum_{k=1}^{N} \frac{(v_{k+1} - v_k)^2}{h^2} h + \frac{v_N^2}{h^2} h\right], \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{N+1} h = (b - a) - \text{длина интервала}$$

для $(v_k)_{k=1}^N$ таких, что

$$v_1 + v_N = 0. \tag{19}$$

Из $(v_N - v_1)^2 = [\sum_{k=1}^{N} \frac{(v_{k+1} - v_k)}{h} h]^2$, используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$(v_N - v_1)^2 \leq \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{v_{k+1} - v_k}{h}\right)^2 h\, (b - a). \tag{20}$$

Далее, учитывая, что из $(v_1 + v_N)^2 = 0$, (19), следует $(v_1 - v_N)^2 = 2v_1^2 + 2v_N^2$, добавляя к каждой из частей (20) по $(b - a)[\frac{v_1^2}{h^2} h + \frac{v_N^2}{h^2} h]$, после простых преобразований получаем

$$(\frac{v_1^2}{h^2}+\frac{v_N^2}{h^2})h \le (1-\frac{2}{(b-a)+2h}h)[\frac{v_1^2}{h^2}h+\sum_{k=1}^{N}\frac{(v_{k+1}-v_k)^2}{h^2}h+\frac{v_N^2}{h^2}h],$$

что и означает (18).

В двумерном случае рассуждения проводятся аналогичным образом.

Наконец, используя утверждение Леммы, из (17) получаем

$$\lambda_2 \ge \min_{v_\omega \neq 0,\,(A_{\omega\,\omega} v_\omega,\, e_\omega)_\omega = 0} \frac{((A_{\omega\,\omega}-(1-ch)\,A_{\omega\,\omega})v_\omega, v_\omega)_\omega}{(A_{\omega\,\omega} v_\omega,\, v_\omega)_\omega} = ch,$$

что, в свою очередь, позволяет получить окончательный результат

$$\max_{\mu\neq 1}|\mu| = 1-\lambda_2 \le 1-ch.$$

Замечание

В итерационный процесс (8) можно ввести параметр

$$B\frac{y^{k+1}-y^k}{\tau_{k+1}} + Ay^k = f.$$

Полученный выше результат

$$(1-ch)B \le A \le B \quad \text{в подпространстве} \quad U$$

при наличии хорошей оценки для c, позволяет использовать чебышевский набор параметров. В противном случае может быть применен метод сопряженных градиентов, который сойдется за количество итераций не превосходящее число узлов γ.

Список литературы

[1] Самарский А.А., *Теория разностных схем*, М.: Наука. 1977, 656 с.
[2] Марчук Г.И., *Методы вычислительной математики*, М.: Наука, 1980, 536 с.
[3] Михлин С.Г., *Курс математической физики*, М.: Наука, 1968, 576 с.

Сорокин Сергей Борисович
Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 6,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: sorokin@sscc.ru

Коновалов Анатолий Николаевич
Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 6,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: Kan@sscc.ru