S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 524–530 (2008) УДК 517.958
MSC 35L20, 35R30, 35Q99

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ В ШАРЕ

Т. В. БУГУЕВА

Abstract. We consider an inverse problem for a system of isotropic elasticity equations in a sphere domain. The linearized problem of identification of three characteristics of elastic isotropic medium is investigated. It is supposed that the medium density $\rho(r)$ depends on the radial variable only and the propagation velocity of longitudinal $c(r,\theta,\varphi)$ and transverse $a(r,\theta,\varphi)$ waves can be represented in the form $a^2(r,\theta,\varphi) = a_0^2 + a_1(r,\theta,\varphi)$, $c^2(r,\theta,\varphi) = c_0^2 + c_1(r,\theta,\varphi)$, where a_0^2, c_0^2 are some known constants, and unknown functions $a_1(r,\theta,\varphi)$, $c_1(r,\theta,\varphi)$ are small in comparison with the constants a_0^2 и c_0^2, correspondingly. The uniqueness theorem is proved and estimates of conditional stability of the inverse problem solution are obtained.

Keywords: inverse problems, isotropic elasticity, conditional stability estimate.

1. Введение

Динамические постановки одномерных обратных задач для системы дифференциальных уравнений упругости впервые рассмотрел А.С.Алексеев. В 1962 г. он поставил обратную динамическую задачу сейсмики для плоской модели Земли в предположении, что плотность и упругие параметры Ламе зависят только от изменения глубины. В дальнейшем были предложены и развиты различные подходы и методы исследования обратных динамических задач для

Bugueva, T.V., Determining of isotropic medium parameters in a sphere.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа поддержана грантами РФФИ 08-01-00312, 08-01-90260-Узб, грантом Президента РФ НШ-1440.2008.1, Междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН № 48.

Поступила 1 сентября 2008 г., опубликована 27 ноября 2008 г.

гиперболических уравнений и систем в работах М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, А.С. Благовещенского, С.П. Шишатского, К.Г. Резницкой, В.Г. Яхно, С.И. Кабанихина, Т.В. Бугуевой, P. Sacks, W. Symes, и других авторов.

Данная работа продолжает серию работ автора, посвященных исследованию обратных динамических задач для изотропной упругости в шаре. Так, совместно с В.Г. Яхно в 1985 г. были получены и опубликованы результаты исследования одномерной обратной задачи. Задачу определения параметров Ламе $\lambda(r)$, $\mu(r)$ и плотности $\rho(r)$ в данном случае удалось свести к последовательному решению двух обратных задач. Первая из которых состояла в определении функций $\mu(r)$ и $\rho(r)$, а вторая – в определении функции $\lambda(r)$ при известных $\mu(r)$ и $\rho(r)$. Были получены оценки условной устойчивости для функций $\mu(r)$, $\rho(r)$ и функции $\lambda(r)$. Позже автором было проведено исследование линеаризованной обратной задачи для изотропной упругости в шаре. Система дифференциальных уравнений изотропной упругости рассматривалась в предположении, что плотность среды ρ и параметры Ламе λ и μ есть функции всех пространственных переменных r, θ, φ в сферической системе координат. в линейном приближении была исследована задача однозначного определения малого аддитивного слагаемого $p_1(r,\theta,\varphi)$ у функции $p(r,\theta,\varphi) = \ln\rho(r,\theta,\varphi)$, зависящей от трех переменных сферической системы координат при известных скоростях $c(r,\theta,\varphi) = (\lambda+2\mu)/\rho$ и $a(r,\theta,\varphi) = \mu/\rho$ продольных и поперечных волн, которые могут быть определены как решения соответствующих обратных кинематических задач сейсмики. Линеаризация проводилась относительно известных положительных констант. Также была получена оценка условной устойчивости решения этой задачи.

2. Постановка обратной задачи

В настоящей работе рассмотрим систему уравнений упругости для изотропной среды, записанную следующим образом

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{u} + \frac{\lambda+\mu}{\rho}\nabla\mathrm{div}\vec{u} + \frac{\nabla\lambda}{\rho}\mathrm{div}\vec{u} + \frac{\nabla\mu}{\rho}\cdot(\nabla\vec{u}+\vec{u}\nabla) \tag{1}$$

вместе с начальными и граничными условиями

$$\vec{u}|_{t<0} = 0, \qquad \sigma_r|_{r=r_0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\vec{l}\theta(t), \tag{2}$$

здесь вектор напряжений σ_r, действующий на площадку с нормалью, параллельной оси $\mathbf{e}_r$, $\sigma_r = \lambda\mathbf{e}_r\mathrm{div}\vec{u} + \mu\mathbf{e}_r\cdot(\nabla\vec{u}+\vec{u}\nabla)$; вектор $\vec{l}$ имеет координаты $(1,0,0)$ в сферическом базисе $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$; $1/\sqrt{4\pi}$ – нормирующая константа, $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Пусть $\vec{h}(t,\theta,\varphi)$ – известная функция. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи рассмотрим $\vec{u}\,\Big|_{r=r_0} = \vec{h}(t,\theta,\varphi)$, $t \in [0,T]$, $\nu(\theta,\varphi) \in \mathbf{S}^2$, здесь $\mathbf{S}^2 = \{\nu(\theta,\varphi)|\nu = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\}$ – сфера единичного радиуса в $\mathbb{R}^3$. Введем в рассмотрение следующие функции $a^2 = \mu/\rho$, $c^2 = (\lambda+2\mu)/\rho$, $p = \ln\rho$. Будем рассматривать случай, когда плотность ρ зависит только от радиальной переменой r, тогда $p \equiv p(r)$, а параметры Ламе λ и μ, а следовательно и функции a и c есть функции всех пространственных переменных в сферической системе координат r, θ, φ.

Перепишем уравнение (1) в терминах функций a и c

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} &= a^2\Delta\vec{u} + (c^2 - a^2)\nabla\mathrm{div}\vec{u} + \Big(\nabla(c^2 - 2a^2) + (c^2 - 2a^2)p'(r)\mathbf{e}_r\Big)\mathrm{div}\vec{u} + \\ &+ \Big(\nabla a^2 + a^2 p'(r)\mathbf{e}_r\Big)\cdot(\nabla\vec{u} + \vec{u}\nabla).\end{aligned}$$

Функция σ в терминах введенных функций a^2 и c^2 запишется следующим образом $\sigma_r = (c^2 - 2a^2)\rho\mathbf{e}_r\mathrm{div}\vec{u} + a^2\rho\mathbf{e}_r\cdot(\nabla\vec{u} + \vec{u}\nabla)$.

Предположим, что функции $c^2(r,\theta,\varphi)$ и $a^2(r,\theta,\varphi)$ представимы в виде

$$a^2(r,\theta,\varphi) = a_0^2 + a_1(r,\theta,\varphi), \quad c^2(r,\theta,\varphi) = c_0^2 + c_1(r,\theta,\varphi),$$

где a_0^2, c_0^2 – некоторые известные константы, а функции a_1, c_1 – неизвестные функции, малые по сравнению с константами a_0^2 и c_0^2, соответственно. Тогда естественно предположить, что функция $\vec{u}(t,r,\theta,\varphi)$, являющаяся решением прямой задачи (1)–(2), представима в виде $\vec{u}(t,r,\theta,\varphi) = \vec{u}^0(r,t) + \vec{u}^1(t,r,\theta,\varphi)$. При этом информация о решении прямой задачи (1)–(2) представима в виде $\vec{h}(t,\theta,\varphi) = \vec{h}_0(t) + \vec{h}_1(t,\theta,\varphi)$, где $\vec{h}_0(t)$ есть след функции $\vec{u}^0(t,r)$ при $r = r_0$, а функция $\vec{h}_1(t,\theta,\varphi)$ определена как $\vec{u}^1|_{r=r_0} = \vec{h}_1(t,\theta,\varphi)$.

Здесь функция $\vec{u}^0(t,r)$ есть решение задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\vec{u}^0}{\partial t^2} &= a_0^2\Delta\vec{u}^0 + (c_0^2 - a_0^2)\nabla\mathrm{div}\vec{u}^0 + (c_0^2 - 2a_0^2)p'(r)\mathbf{e}_r\mathrm{div}\vec{u}^0 + \\ &+ a_0^2 p'(r)\mathbf{e}_r\cdot(\nabla\vec{u}^0 + \vec{u}^0\nabla),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\vec{u}^0\Big|_{t<0} = 0, \qquad \sigma_r^0\Big|_{r=r_0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\vec{l}\theta(t), \tag{4}$$

$$\vec{u}^0\Big|_{r=r_0} = \vec{h}^0(t), \tag{5}$$

где $\sigma_r^0 = (c_0^2 - 2a_0^2)\rho(r)\mathbf{e}_r\mathrm{div}\vec{u}^0 + a_0^2\rho(r)\mathbf{e}_r\cdot(\nabla\vec{u}^0 + \vec{u}^0\nabla)$.

Функция $\vec{u}^1(t,r,\theta,\varphi)$ является решением задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\vec{u}^1}{\partial t^2} &= a_0^2\Delta\vec{u}^1 + (c_0^2 - a_0^2)\nabla\mathrm{div}\vec{u}^1 + (c_0^2 - 2a_0^2)p'(r)\mathbf{e}_r\mathrm{div}\vec{u}^1 + \\ &+ a_0^2 p'(r)\mathbf{e}_r\cdot(\nabla\vec{u}^1 + \vec{u}^1\nabla) + a_1\Delta\vec{u}^0 + (c_1 - a_1)\nabla\mathrm{div}\vec{u}^0 + \\ &+ \Big(\nabla(c_1 - 2a_1) + (c_1 - 2a_1)p'(r)\mathbf{e}_r\Big)\mathrm{div}\vec{u}^0 + \\ &+ \Big(\nabla a_1\cdot(\nabla\vec{u}^0 + \vec{u}^0\nabla) + a_1 p'(r)\mathbf{e}_r\Big)\cdot(\nabla\vec{u}^0 + \vec{u}^0\nabla),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\vec{u}^1\Big|_{t<0} = 0, \qquad \sigma_r^1\Big|_{r=r_0} = 0. \tag{7}$$

$$\vec{u}^1\Big|_{r=r_0} = \vec{h}_1(t,\theta,\varphi). \tag{8}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\sigma_r^1 &= (c_0^2 - 2a_0^2)\rho(r)\mathbf{e}_r\mathrm{div}\vec{u}^1 + a_0^2\rho(r)\mathbf{e}_r\cdot(\nabla\vec{u}^1 + \vec{u}^1\nabla) + \\ &+ (c_1 - 2a_1)\rho(r)\mathbf{e}_r\mathrm{div}\vec{u}^0 + a_1\rho(r)\mathbf{e}_r\cdot(\nabla\vec{u}^0 + \vec{u}^0\nabla).\end{aligned}$$

Обратная задача 1. Пусть T, r_0, c_0, a_0 – заданные положительные константы; $0 < T < 2r_0/c_0$. Определить неизвестную функцию $p(r)$, входящую в равенства (3), (4), $p(r) = \ln\rho(r)$, если относительно решения $\vec{u}^0(t,r,\theta,\varphi)$ прямой задачи (3)–(4), известна информация (5), где $\vec{h}_0(t)$ – заданная функция при $t \in [0,T]$.

Обратная задача 2. Пусть T, r_0, c_0, a_0 – заданные положительные константы; $0 < T < 2r_0/c_0$. Определить неизвестные функции $a_1(r,\theta,\varphi)$ и $c_1(r,\theta,\varphi)$, входящие в равенства (6), (7), если относительно решения $\vec{u}^1(t,r,\theta,\varphi)$ прямой задачи (6)–(7), известна информация (8), где $\vec{h}_1(t,\theta,\varphi)$ – заданная функция при $t \in [0,T]$, $\nu(\theta,\varphi) \in \mathbf{S}^2$; функция $p(r)$ предполагается известной; функция $\vec{u}^0(t,r)$ – известна и является решением прямой задачи (3)–(4).

Функцию $\vec{u}^1(t,r,\theta,\varphi)$ разложим ее в ряд по ортонормированным сферическим гармоникам $\mathbf{R}_{lm}$, $\mathbf{S}_{lm}$, $\mathbf{T}_{lm}$; $l = 0,1,\ldots$; $-l \le m \le l$, определяемых равенствами

$$\mathbf{R}_{00}(\theta,\varphi) = \mathrm{Y}_{00}(\theta,\varphi)\mathbf{e}_r, \qquad \mathrm{Y}_{00} = 1/\sqrt{4\pi} \qquad \mathbf{R}_{lm}(\theta,\varphi) = \mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)\mathbf{e}_r,$$

$$\sqrt{l(l+1)}\mathbf{S}_{lm}(\theta,\varphi) = \left(\mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\mathrm{Y}_{lm},$$

$$\sqrt{l(l+1)}\mathbf{T}_{lm}(\theta,\varphi) = \left(\mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathrm{Y}_{lm},$$

где $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$ – нормированные сферические функции порядка l: $-l \le m \le l$.

Пусть решение $\vec{u}(r,\theta,\varphi,t) = \vec{u}^0(r,t) + \vec{u}^1(r,\theta,\varphi,t)$ системы уравнений Ламе (1) представлено рядом Фурье по системе сферических гармоник $\mathbf{R}_{lm}$, $\mathbf{S}_{lm}$, $\mathbf{T}_{lm}$; $l = 0,1,\ldots$; $-l \le m \le l$, тогда можем написать следующие представления

$$\vec{u}^0(t,r) = U^0_{00}(r,t)\mathbf{R}_{00},$$

$$\vec{u}^1(t,r,\theta,\varphi) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Big[U^1_{lm}(r,t)\mathbf{R}_{lm}(\theta,\varphi) + V^1_{lm}(r,t)\sqrt{l(l+1)}\mathbf{S}_{lm}(\theta,\varphi) + + W^1_{lm}(r,t)\sqrt{l(l+1)}\mathbf{T}_{lm}(\theta,\varphi)\Big].$$

Представим функции $a_1(r,\theta,\varphi)$, $c_1(r,\theta,\varphi)$ в виде формальных рядов по нормированным сферическим функциям $Y_{lm}(\theta,\varphi)$

$$c_1(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{1lm}(r)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi), \quad a_1(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{1lm}(r)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi),$$

где $c_{1lm}(r) =< c_1, \mathrm{Y}_{lm} >_{L_{2,\sin\theta}(\mathbf{S}^2)}$, $a_{1lm}(r) =< a_1, \mathrm{Y}_{lm} >_{L_{2,\sin\theta}(\mathbf{S}^2)}$.

Выписывая уравнения для гармоник $W^1_{lm}(t,r)$ и решая соответствующую прямую задачу, получим, что $W^1_{lm}(t,r) \equiv 0$ для любых l, m: $l = 1,2,\ldots$; $-l \le m \le l$.

Сделаем в равенствах (3)–(8) замену переменных $x = x(r) = \int\limits_r^{r_0} \frac{\mathrm{d}\xi}{c_0} = \frac{r_0 - r}{c_0}$, $r = r(x) = r_0 - \int\limits_0^x c_0 \mathrm{d}\xi = r_0 - c_0 x$ и определим новые функции $\widehat{p}(x) = p(r(x))$, $\widehat{c}_{1lm}(x) = c_{1lm}(r(x))$, $\widehat{a}_{1lm}(x) = a_{1lm}(r(x))$ и $u^0_{00}(x,t)$, $u^1_{lm}(x,t)$, $v^1_{lm}(x,t)$, которые выражаются через гармоники $U^0_{00}(t,r)$, $U^1_{lm}(t,r)$, $V^1_{lm}(t,r)$ следующим образом

$$u^0_{00}(x,t) = \frac{U^0_{00}(r(x),t)}{S(x)}, \quad u^1_{lm}(x,t) = \frac{U^1_{lm}(t,r(x))}{S(x)}, \quad v^1_{lm}(x,t) = \frac{V^1_{lm}(t,r(x))}{S_1(x)}.$$

Здесь

$$S(x)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^x\left(\frac{2c_0}{r(\xi)}-\widehat{p}'(\xi)\right)\mathrm{d}\xi\right\},$$

$$S_1(x)=\exp\left\{\frac{c_0^2}{2a_0^2}\int\limits_0^x\left(\frac{2}{c_0 r(\xi)}a_0^2-\frac{a_0^2}{c_0^2}\widehat{p}'(\xi)\right)\mathrm{d}\xi\right\}.$$

Перепишем уравнения (3)–(5), (6)–(8) в терминах новых функций $u_{00}^0(x,t)$, $u_{lm}^1(x,t)$, $v_{lm}^1(x,t)$.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{00}^0=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{00}^0+q_0(x)u_{00}^0, \tag{9}$$

$$u_{00}^0\Big|_{t<0}=0,\qquad \left[\frac{\partial u_{00}^0}{\partial x}+h_1u_{00}^0\right]_{x=0}=g_0\theta_0(t), \tag{10}$$

$$u_{00}^0\Big|_{x=0}=F_{00}(t); \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{lm}^1}{\partial t^2}\ =\ &\frac{\partial^2 u_{lm}^1}{\partial x^2}+q_{1l}(x)u_{lm}^1+D_{1l}(x)\frac{\partial v_{lm}^1}{\partial x}+D_{2l}(x)v_{lm}^1+\omega_{11}^0\widehat{c}_{1lm}(x)\frac{\partial^2 u_{00}^0}{\partial x^2}+\\ &+\omega_{11}^0\widehat{c}'_{1lm}(x)\frac{\partial u_{00}^0}{\partial x}+\Big(\omega_{31}(x)\widehat{c}'_{1lm}(x)+\omega_{32}(x)\widehat{c}_{1lm}(x)+\\ &+\omega_{33}(x)\widehat{a}'_{1lm}(x)+\omega_{34}(x)\widehat{a}_{1lm}(x)\Big)u_{00}^0,\end{aligned} \tag{12}$$

$$u_{lm}^1\Big|_{t<0}=0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial u_{lm}^1}{\partial x}+h_1u_{lm}^1+D_{3l}(0)v_{lm}^1+\right.\\ &\qquad\left.+\,\omega_{11}^0\widehat{c}_{1lm}(0)\frac{\partial u_{00}^0}{\partial x}+\Big(\omega_{51}^0\widehat{c}_{1lm}(0)+\omega_{52}^0\widehat{a}_{1lm}(0)\Big)u_{00}^0\right]_{x=0}=0,\end{aligned} \tag{14}$$

$$u_{lm}^1\Big|_{x=0}=F_{1lm}(t); \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v_{lm}^1}{\partial t^2}\ =\ &\frac{a_0^2}{c_0^2}\frac{\partial^2 v_{lm}^1}{\partial x^2}+q_{2l}(x)v_{lm}^1+K_3(x)\frac{\partial u_{lm}^1}{\partial x}+K_4(x)u_{lm}^1+\\ &+\Big(\omega_{61}\widehat{c}_{1lm}(x)+\omega_{62}(x)\widehat{a}_{1lm}(x)\Big)\frac{\partial u_{00}^0}{\partial x}+\\ &+\Big(\omega_{71}\widehat{c}_{1lm}(x)+\omega_{72}(x)\widehat{a}_{1lm}(x)\Big)u_{00}^0,\end{aligned} \tag{16}$$

$$v_{lm}^1\Big|_{t<0}=0,\qquad \left[\frac{\partial v_{lm}^1}{\partial x}+h_2v_{lm}^1+K_5(0)u_{lm}^1\right]_{x=0}=0, \tag{17}$$

$$v_{lm}^1\Big|_{x=0}=G_{1lm}(t). \tag{18}$$

Обратная задача 3. Пусть r_0, T – заданные положительные числа. Определить неизвестную функцию $q_0(x) \in \mathrm{C}[0, T/2]$ и число g_0, входящие в равенства (9), (10), если относительно решения $u^0_{00}(x,t)$ прямой задачи (9)–(10) известна информация (11), где $F_{00}(t)$ – заданная функция при $t \in [0,T]$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть r_0, a_0, c_0, T – фиксированные положительные числа; $T < 2r_0/c_0$. Тогда для однозначной разрешимости обратной задачи 3 в классе функций $q_0(x) \in \mathrm{C}[0, T/2]$ необходимо и достаточно, чтобы $F_{00}(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и при $t \in [0,T]$ удовлетворяла условиям $F_{00}(t) \in \mathrm{C}^2[0,T]$, $F_{00}(+0) = 0$, $F'_{00}(+0) > 0$. При этом имеют место равенства $g_0 = -F'_{00}(+0)$, $h_1 = F''_{00}(+0)/F'_{00}(+0)$.*

Зная функцию $q_0(x) \in \mathrm{C}[0, T/2]$ и решая соответствующее уравнение Риккати, можем определить функцию $\widehat{p}(x) \in \mathrm{C}^2[0,T]$, т.е. найти решение обратной задачи 1.

Обратная задача 4. Пусть r_0, a_0, c_0, T – заданные положительные числа, $0 < T < 2r_0/c_0$. Определить неизвестные функции $\widehat{c}_{1lm}(x) \in \mathrm{C}^1[0, T/2]$, $\widehat{a}_{1lm}(x) \in \mathrm{C}^1[0, a_0T/(2c_0)]$, входящие в равенства (12), (14), (16), если относительно решений $u^1_{lm}(x,t)$, $v^1_{lm}(x,t)$ прямых задач (12)–(14), (16)–(17) известна информация (15), (18), где $F_{1lm}(t)$, $G_{1lm}(t)$ – заданные функции при $t \in [0,T]$. Функция $u^0_{00}(x,t)$, входящая в равенства (12), (14), (16), – известна и является решением прямой задачи (9)–(10). Функция $\widehat{p}(x) \in \mathrm{C}^2[0, T/2]$ – предполагается известной.

Коэффициенты при функциях u^1_{lm}, $\partial u^1_{lm}/\partial x$, v^1_{lm}, $\partial v^1_{lm}/\partial x$ зависят от уже известной функции $\widehat{p}(x)$, остальные коэффициенты, входящие в равенства (12)–(14), (16)–(17) также являются известными.

3. Основные результаты

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть r_0, a_0, c_0, T заданные положительные числа; $T < 2r_0/c_0$. Тогда для однозначной разрешимости обратной задачи 4 в классе функций $\widehat{c}_{1lm}(x)$, $\widehat{a}_{1lm}(x) \in \mathrm{C}^1[0, a_0T/(a_0 + c_0)]$, достаточно, чтобы функции $F_{1lm}(t)$, $G_{1lm}(t)$ удовлетворяли условиям $F_{1lm}(t) \equiv 0$, $G_{1lm}(t) \equiv 0$ при $t < 0$; $F_{1lm}(t) \in \mathrm{C}^3[0,T]$, $F_{1lm}(+0) = 0$; $G_{1lm}(t) \in \mathrm{C}^3[0,T]$, $G_{1lm}(+0) = 0$, $G'_{1lm}(+0) = 0$.*

Пусть T, r_0, L, c_0 – фиксированные положительные числа, $T < 2r_0/c_0$. Определим класс функций

$$\mathrm{Q}_p = \Big\{ \widehat{p}(x) \in \mathrm{C}^2[0, T/2] \ \Big| \ \widehat{p}(x) > 0, \ \|\widehat{p}\|_{\mathrm{C}^2[0,T/2]} \le L \Big\}.$$

Имеет место теорема.

Теорема 2. *Пусть T, r_0, c_0, L – заданные положительные числа; $T < 2r_0/c_0$; функции $p(r)$, $p_*(r) \in \mathrm{Q}_p$, являются решениями обратной задачи 1, отвечающими информации $F_{00}(t)$, $F_{00*}(t)$ при $t \in [0,T]$, соответственно. Тогда имеет место следующая оценка: $\|p - p_*\|_{\mathrm{C}^2[r_0 - Tc_0/2, r_0]} \le B_3 \|F_{00} - F_{00*}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}$, величина B_3 зависит от L, T, r_0, c_0.*

Пусть r_0, a_0, c_0, L_*, T – заданные положительные числа, определим класс функций

$$\mathrm{Q}_{ac} \;=\; \Big\{\widehat{a}_1(x,\theta,\varphi)\in \mathrm{C}^1_{(1)}[0,\frac{a_0T}{a_0+c_0}]\cap \mathrm{C}^2_{(2,3)}(\mathbf{S}^2)\;\Big|\; \|\Delta_{\theta,\varphi}\widehat{a}_1\|_{\mathrm{C}^1_{(1)}[0,\frac{a_0T}{a_0+c_0}]\cap \mathrm{L}^2_{(2,3)}(\mathbf{S}^2)}\le L_*\Big\}$$

и величину $\omega^2=\|\vec{h}_1-\vec{h}_{1*}\|^2_{\mathrm{C}^3([0,T];\mathrm{L}_2(\mathbf{S}^2))}$. Здесь $\mathrm{C}^1_{(1)}[0,a_0T/(a_0+c_0)]\cap \mathrm{C}^2_{(2,3)}(\mathbf{S}^2)$ – класс функций $\widehat{c}_1(x,\theta,\varphi)$, принадлежащих $\mathrm{C}^2(\mathbf{S}^2)$ при фиксированном x и принадлежащих $\mathrm{C}^1[0,a_0T/(a_0+c_0)]$ при фиксированных (θ,φ); $\mathrm{C}^1_{(1)}[0,a_0T/(a_0+c_0)]\cap \mathrm{L}^2_{(2,3)}(\mathbf{S}^2)$ – класс функций $\widehat{c}_1(x,\theta,\varphi)$, принадлежащих $\mathrm{L}^2(\mathbf{S}^2)$ при фиксированном x и принадлежащих $\mathrm{C}^1[0,a_0T/(a_0+c_0)]$ при фиксированных (θ,φ).

Теорема 3. *Пусть T, r_0, a_0, c_0, L, L_*, – заданные положительные числа; $0<T<2r_0/c_0$. Пусть $\omega\le\exp(-1/2)$, тогда для функций $\widehat{a}_1(x,\theta,\varphi)$, $\widehat{c}_1(x,\theta,\varphi)$ и $\widehat{a}_{1*}(x,\theta,\varphi)$, $\widehat{c}_{1*}(x,\theta,\varphi)\in \mathrm{Q}_{ac}$, являющихся решениями обратной задачи 2 и отвечающих информации $\vec{h}_1(t,\theta,\varphi)$, $\vec{h}_{1*}(t,\theta,\varphi)$, соответственно, при $t\in[0,T]$, $\nu(\theta,\varphi)\in\mathbf{S}^2$ имеют место следующие оценки:*

$$\|\widehat{a}_1-\widehat{a}_{1*}\|^2_{\mathrm{C}^1_{(1)}[0,a_0T/(a_0+c_0)]\cap \mathrm{L}^2_{(2,3)}(\mathbf{S}^2)}\le B_7\left[\ln\omega^{-1}\right]^{-2},$$

$$\|\widehat{c}_1-\widehat{c}_{1*}\|^2_{\mathrm{C}^1_{(1)}[0,a_0T/(a_0+c_0)]\cap \mathrm{L}^2_{(2,3)}(\mathbf{S}^2)}\le B_7\left[\ln\omega^{-1}\right]^{-2},$$

где B_7 – некоторая положительная величина, зависящая от L, L_*, T, r_0, a_0, c_0.

Полное изложение результатов и список цитируемой литературы содержится в работе [1].

Список литературы

[1] T.V.Bugueva, *Multidimensional inverse problem for isotropic elasticity system in a sphere*, J. Inv. Ill-Posed Problems, Walter de Gruyter - Berlin - New York, **15**: 9 (2007), 893–934.

Татьяна Владимировна Бугуева
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: bugueva@math.nsc.ru